

状元笔记

教材详解

高中数学

必修 1(人教 A 版)

丛书组编：龙门书局教育研究中心

学科主编：傅荣强

本册主编：傅荣强

编者：李有会 刘欣 倪智慧

陈宝祥

龍 門 書 局

北 京

思路决定未来

“考考考，老师的法宝！

分分分，学生的命根！”

这是一句流传了很久的“校园名谣”，很真实，很形象，让你莞尔，又让你几多无奈。

有没有办法让大家轻轻松松就能考出理想的成绩？有没有可能让大家在这种环境和氛围中也能培养出素质、能力和思维？

为了解决这一课题，我们一直在探索、研究。

■ 状元的成功规律 ■

高考状元是考场中的高手，能不能从这些高手的经验中总结出一些规律呢？为此，几年来我们接触了几十位高考状元，追踪到一些共性。

1. 天道酬勤

很多人都会把高考状元的成功归结为聪明，事实果真如此吗？在与他们接触了很久之后，我渐渐发现：他们中有一部分人的确是绝顶聪明，但更多状元的智商并不比普通人高太多，勤奋是他们共同的特质。江苏的一位状元说自己大年三十的晚上还学习到12点；河南的一位状元说自己在病床上还坚持在看书；广东的一位状元对自己读了三年高中的县城竟然极其陌生……

这些事例再一次验证了：天道酬勤。

2. 方法决定效率

他们每个人都有一套完整科学的学习方法，而且十分有效。我曾经反复揣摩他们的这些方法，禁不住欣欣然向往之：假若我们能懂得这些方法并在实际学习中灵活运用，北大、清华等一流名校的大门就会向我们敞开着。

有思路才有方法，好方法往往事半功倍！

3. 好心态比好成绩更重要

据我观察：他们心态都很好，也很自信。心理学家们认为：心理暗示往往能让人超越自己，激发潜力，增强自信心！

■ 反思我们的学习 ■

与这些考试高手们相比较,反思一下我们成绩普通的学生,尤其是成绩中等学生的学习。近几年来,我们也总结出成绩中等学生的一些特质:

- 他们最有希望成为优等生,但往往功亏一篑!
- 他们智商都不错,但却总认为自己不够聪明。
- 他们往往也能够勤奋,但他们的勤奋很盲目,不知道自己什么地方该多下功夫去学。
- 他们试图形成自己的学习方法,但并不系统,更要命的是他们的学习方法并没有成为一种学习的习惯,很随意,很无序。
- 他们渴求全面掌握知识,但往往理解得似是而非。
- 他们的心态往往是“随大流”,缺乏必胜的信心。

.....

亲爱的同学,你有这样的问题吗?如果有,你明白自己的差距在哪里了吗?

以上这些说明你最大的问题就是:学习没有思路!

■ 好书可以改变一个人的命运! ■

在做了大量的研究之后,我们发现,学习很难轻轻松松,但是可以有高效的方法提高学习的效率。我们希望将这些研究成果融汇到本书中,帮助每一个学生高效地学习,快速地提高。

1. 没有什么比基础更重要! 第一秘诀:以教材为中心,夯实基础

曾经有位高考状元跟我说,考试中真正的难题很少,题目不会做或者做错了,多数是因为基础掌握得不够扎实。很多学生自认为自己的基础很不错,其实对知识点的掌握还是似是而非,往往“知其然不知其所以然”,并没有完全吃透知识点。

这位状元还跟我说:平时看的最多的书就是教材,每次看都会有新体会,看教材不是简单的记忆,而是深刻的理解,要把每个知识点的来龙去脉搞得清清楚楚。在考试的时候,每一道考题都可以还原成教材里的例题或者习题。

我跟很多老师探讨过这位状元所说的话,大家都深以为然,教材知识是一切知识的起点和基础。在本书的“基础知识全解”这个栏目中,我们将知识点按照重要程度采用“级”区分,每个知识点是应该“记忆”还是“理解”,存在什么样的“误区”,如何进行“延伸拓展”、“思维发散”等等都进行细致入微的讲解。目的就是帮大家尽力吃透教材,真正夯实基础。

2. 素质、能力比成绩更重要,方法、技巧是素质与能力的体现

任何知识的学习,最终要归结在素质的养成和能力的提升上。不能机械地做题、考试是不能提升素质和能力的,最重要的是如何将知识转化成为个人的素质与能力。拥有素质与能力,就能生发解决问题的方法与技巧,也就拥有了打开一切的“金钥匙”。拥有素质与能力,也定将能考出相当理想的成绩!

在本书的“方法·技巧·能力”栏目中,我们用案例的方式,帮助你发散拓展、突破思维障碍,学会综合运用、举一反三,破解误区和陷阱,最终实现从知识向能力的转化、迁移,培养你的创造性思维和创新能力。

3. 新颖、原创、应试

兴趣是最好的老师,人类认识自然、探索自然就是从好奇、兴趣开始的。在本书的编写中,我们力求使用最新颖的素材,让大家学会运用知识理解、分析、判断社会热点问题;我们力求最大程度用新方法、新思路去做一些原创的讲解和题目,当然也要保留多年沉淀下来的经典题目;我们也力求能够将考试融汇到日常的学习中,“随风潜入夜,润物细无声”,在不知不觉中培养考取高分的素质和能力。

■ 独立之精神,自由之思想 ■

1929年,学术大师陈寅恪先生在书写纪念王国维的碑铭中提出了“独立之精神,自由之思想”,从此,独立精神和自由思想便成了中国人追求的价值取向。孟子有言曰:“尽信书则不如无书。”任何书籍都不是十全十美的,里面可能会存在一些不足之处。每一个有独立思考能力的学生在面对任何权威时都可以提出自己的见解和看法,我们欢迎大家来信讨论和赐教。

总策划:



《状元笔记·教材详解》

编委会

丛书主编: 龙门书局教育研究中心

总策划: 田旭

执行编委: 刘娜 王涛 王美容

各学科主编:

语文: 郭能全 何涛 数学: 傅荣强 李新星

英语: 张成标 赵炳河 物理: 张忠新 胡志坚

朱如忠 陈俊 化学: 朱智铭 张希顺

生物: 姚登江 历史: 张华中 魏明

地理: 何纪延 政治: 张清

编委:	崔军	陈俊	曹景国	陈建忠	陈俊亮	曹爱国	代曙光
	董玉叶	方立波	傅荣强	封秀英	樊研	高鹤	郭杰
	郭能全	高波	高玉兰	谷玉艳	郭存斌	侯翠兰	黄芳
	何纪延	郝守均	何涛	胡希	郝玉静	胡志坚	纪永华
	姬玉玲	凌春来	刘传宾	刘凌昊	李桂红	刘和水	刘红英
	陆炯	刘娟	刘江	李建全	鲁晓梅	李新星	刘岩
	李永刚	李义军	李子良	马合山	牛鑫哲	潘露	裴文
	单娟	史景辉	双金鳞	石铁明	石兴涛	涂木年	佟志军
	汤小梅	王静	王可线	魏明	王平	王学春	王亚军
	王壮	王秀敬	徐冬琴	项非	邢海燕	徐勤红	胥晓华
	夏桂芳	于长军	姚登江	杨梅	于小芹	于春芳	尤齐辉
	张成标	章端	赵方	周国强	张华中	赵炳河	赵建云
	周萍	张琪	张清	朱如忠	张硕	张升军	张书祥
	赵现标	张晓红	张希顺	翟玉明	周映平	朱岩	朱智铭
	张忠新	张美丽					

目 录

第一章 集合与函数概念

章前概述 1

1.1 集合 1

芝麻开门 1

基础知识全解 1

1.1.1 集合的含义与表示 1

★集合的含义 1

★常用的数集及其记法 3

★★★集合的表示方法 4

1.1.2 集合间的基本关系 5

★子集 5

★两个集合相等 6

★真子集 7

★空集 9

1.1.3 集合的基本运算 11

★★★并集 11

★★★交集 13

★★★补集 14

教材阅读与思考 集合中元素的个数 16

模糊点·易错点·障碍点 18

★模糊点 符号“ $\in$ ”的用法 18★易错点 由 $\emptyset$ 引发的漏解 19

★★★障碍点 分类讨论思想 20

方法·技巧·能力 22

1. 思维发散点 用 Venn 图表示多个集合的关系 23

2. 方法技巧点 借助数轴表示集合 24

3. 综合能力点 怎样解综合题 26

4. 探究能力点 寻找解题的切入点 28

5. 思想方法点 数形结合思想 30

习题讲练 33

教材课后练习、习题解答 33

教材练习、习题变式练习 36

答案与提示 36

1.2 函数及其表示 37

芝麻开门 37

基础知识全解 38

1.2.1 函数的概念 38

★★★函数的定义 38

★★★区间概念 41

1.2.2 函数的表示法 43

★★函数的三种表示方法 43

★映射 45

教材探究活动 反比例函数的定义域、对应关系和值域 48

模糊点·易错点·障碍点 49

★模糊点 $f(x)$ 与 $f(x+k)$ 的关系 49★易错点 $f(x+1)$ 的定义域 50★障碍点 $f(x)$ 与 $f(x+1)$ 的定义域的相互转化 50

方法·技巧·能力 52

1. 思维发散点 数学模型 52

2. 方法技巧点 恒成立问题 53

3. 综合能力点 两函数的图象的交点与方程的解 55

4. 探究能力点 函数、方程、不等式的关系 56

5. 思想方法点 对称变换 58

习题讲练 59

教材课后练习、习题解答 59

教材练习、习题变式练习 64

答案与提示 65

1.3 函数的基本性质 66

芝麻开门 66

基础知识全解	67
1.3.1 单调性与最大(小)值	67
★★★增函数、减函数	67
教材探究活动 反比例函数的单调性	70
★★★最大(小)值	71
1.3.2 奇偶性	73
★★★奇偶函数	73
模糊点·易错点·障碍点	75
★模糊点 单调区间能合并吗?	75
★易错点 问与答脱节	77
★障碍点 抽象函数的单调性、奇偶性问题的讨论	78
方法·技巧·能力	80
1. 发散思维点 函数 $-f(x)$ 、 $f(-x)$ 和 $-f(-x)$ 的单调性	80
2. 方法技巧点 复合函数的奇偶性	82
3. 综合能力点 复合函数的单调性	83
4. 探究能力点 和函数、积函数的单调性	85
5. 思想方法点 等价转化思想	87
习题讲练	89
教材课后练习、习题解答	89
教材练习、习题变式练习	92
答案与提示	92
本章知识能力整合	94
知识结构图	94
难点·综合·易错点	94
★★★闭区间上的二次函数	94
★翻转变换	97
★满足 $f(a+x)=f(a-x)$ 的 $f(x)$ 的图象	98
方法·技巧·能力	99
1. 恒成立问题	99
2. 最大(小)值或值域问题	100
三年高考两年模拟名题赏析	103
1. 高考题	103
2. 模拟题	105

教材复习参考题解答	107
-----------------	-----

第二章 基本初等函数(I)

章前概述	112
2.1 指数函数	112
芝麻开门	112
基础知识全解	113
2.1.1 指数与指数幂的运算	113
★根式	113
1. 回顾平方根、立方根	113
2. n 次方根	113
★实数指数幂	114
1. 分数指数幂	114
2. 无理数指数幂	115
2.1.2 指数函数及其性质	116
★★★指数函数的定义、图象和性质	116
1. 指数函数的定义	116
2. 指数函数的图象和性质	116
教材探究活动 函数 $y=2^x$ 的图象与函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图象有什么关系?	119
模糊点·易错点·障碍点	119
★模糊点 $y_i=f(x)(i=1,2,\cdots)$ 的设法不妥	119
★★★易错点 丢解 $a=1$	120
★障碍点 引入中间值比较大小	120
方法·技巧·能力	121
1. 思维发散点 数学模型 $y=N(1+p)^x$	121
2. 方法技巧点 把“同增异减”用于 $y=a^x$ 中	122
3. 综合能力点 对应观点	125
4. 探究能力点 含有 a^{2x} 与 a^x 的问题	128
5. 思想方法点 由未知寻找已知	130
习题讲练	132
教材课后练习、习题解答	132

教材练习、习题变式练习	136	芝麻开门	166
答案与提示	137	基础知识全解	166
2.2 对数函数	139	★幂函数的定义	166
芝麻开门	139	★五个幂函数的图象与性质	167
基础知识全解	139	教材探究活动 五个幂函数的性质	169
2.2.1 对数与对数运算	139	模糊点·易错点·障碍点	169
★★★对数	139	★模糊点 辨别 a^x 与 x^a	169
1. 对数的定义	139	★易错点 x^2 与 x^3 的大小	169
2. 常用对数与自然对数	139	障碍点 $a^{-1} > b^{-1}$	170
3. 换算	139	方法·技巧·能力	171
★★★对数运算	141	1. 思维发散点 单调性	171
教材探究活动 换底公式	143	2. 方法技巧点 奇偶性	172
2.2.2 对数函数及其性质	144	3. 综合能力点 要善于使用公式	172
★★★对数函数的定义、图象和性质	144	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 和 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$	172
1. 对数函数的定义	144	4. 探究能力点 凸凹性	172
2. 对数的函数的图象和性质	144	5. 思想方法点 认识图象	173
★反函数	146	习题讲练	174
模糊点·易错点·障碍点	148	教材课后练习、习题解答	174
模糊点 “原函数”	148	教材练习、习题变式练习	175
★易错点 漏掉 $f(x) > 0$ 会增解的	148	答案与提示	176
障碍点 平移中函数和它的反函数是协调变化的	149	本章知识能力整合	177
方法·技巧·能力	149	知识结构图	177
1. 思维发散点 由 $\log_a x$ 衍生出来的恒成立问题	149	难点·综合·易错点	177
2. 方法技巧点 正确理解 $f(x) = \log_a x$ 的值域是 $\mathbf{R}$	151	1. 解的分类	178
3. 综合能力点 套用模型	154	2. 赋值法	180
4. 探究能力点 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 的背景 f , 它是表示函数的要素之一, 即对应关系	156	3. 待定系数法	182
5. 思想方法点 $y = \log_a x$ 与 $y = \log_b x$ 的图象比较	157	方法·技巧·能力	185
习题讲练	159	1. 原创综合题	185
教材课后练习、习题解答	159	2. 经典综合题	193
教材练习、习题变式练习	164	三年高考两年模拟名题赏析	195
答案与提示	164	1. 高考题	195
2.3 幂函数	166	2. 模拟题	198
		教材复习参考题解答	199
		第三章 函数的应用	
		章前概述	204
		3.1 函数与方程	204
		芝麻开门	204

基础知识全解	205	★障碍点 列式	232
3.1.1 方程的根与函数的零点	205	方法·技巧·能力	233
★函数的零点	205	1. 思维发散点 $y=a^x$ 与 $y=b \cdot a^x$	233
★★★零点的存在性	206	2. 方法技巧点 解应用题的总体思路	234
3.1.2 用二分法求方程的近似解	209	3. 综合能力点 读题	235
★二分法	209	4. 探究能力点 $y=x+\frac{p}{x}$	235
模糊点·易错点·障碍点	212	5. 思想方法点 作图	237
1. 离散型无解辨别	212	习题讲练	240
2. 连续型无解辨别	213	教材课后练习、习题解答	240
方法·技巧·能力	213	教材练习、习题变式练习	246
1. 构造函数讨论方程	213	答案与提示	247
2. 构造函数讨论不等式	213	本章知识能力整合	249
习题讲练	214	知识结构图	249
教材课后练习、习题解答	214	难点·综合·易错点	249
教材练习、习题变式练习	220	1. 分段函数的零点	250
答案与提示	220	2. 以分段函数为背景的应用题	250
3.2 函数模型及其应用	222	方法·技巧·能力	252
芝麻开门	222	1. 最大(小)值问题	252
基础知识全解	222	2. 多方案比较	255
3.2.1 几类不同增长的函数模型	222	三年高考两年模拟名题赏析	257
★★★挑选解析式	222	1. 高考题	257
3.2.2 函数模型的应用实例	226	2. 模拟题	259
★★★建立解析式	226	教材复习参考题解答	260
★★★使用解析式	228		
★创造解析式	230		
模糊点·易错点·障碍点	232		
★模糊点 选 $b \cdot a^x$ 还是选 cx^d	232		
★易错点 增解	232		

第一章 集合与函数概念

◆◆◆ 章 前 概 述 ◆◆◆

数学,是研究数量关系与空间形式的一门科学.

本章包括集合、函数的概念两大部分.

学习集合,意在收集我们要研究的对象.

在函数概念的学习中,我们将要探究函数及其表示、函数的基本性质两大问题.前者重点解决普遍意义下变量之间的依赖关系,以合适的形式表示函数;后者着力讨论函数的通性,例如:单调性、奇偶性等.

现行高考中,到处都有集合与函数概念的影子.

◆◆◆ 1.1 集 合 ◆◆◆

芝麻开门

物以类聚,泛指把同类物放在一起.

集合就是把同类物放在一起的产物.“神 1”,“神 2”,“神 3”,…放在一起,它们组成了神州宇宙飞船的集合;奥运吉祥物放在一起,它们组成了奥运吉祥物的集合.

数学中讨论的集合,最重要的是实数的集合、点的集合.

基础知识全解

1.1.1 集合的含义与表示

★知识点 1 集合的含义

[理解]一般地,被研究的对象称为元素,一些元素放在一起就是一个集合.通常用字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用字母 $a, b, c, \dots$ 表示元素.如果 a 是 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$,读作 a 属于 A ;如果 a 不是 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$,读作 a 不属于 A .

〈点拨〉集合给定以后,它的元素是确定的、互异的.

【例 1】(原创题)下列对象能否组成集合:

(1)乘“神 7”登上宇宙太空的人;

(2)“5·12”四川汶川大地震中,赴灾区参与救援的台湾籍人.

思路分析:判断一些对象能否组成集合看这些对象是否确定.

规范解答:(1)乘“神 7”登上宇宙太空的共有 3 人,他们能组成一个集合.

(2)经过调查统计,在“5·12”四川汶川大地震中,赴灾区参与救援的台湾籍人是明确的,他们能组成一个集合.

误区

在集合中,要求描述元素的语言明确而不模糊,也就是说,要把描述元素的语言说得清清楚楚、明明白白,不允许使用模棱两可的语句.如,“大于1的实数”、“能被2整除的数”等都是明确的.又如,“小于零的正数”也是明确的,尽管不存在这样的数,但是话还是说明白了.再如,“比较老实的人”、“某校水平比较高的老师”等描述都是模糊的.

【变式1】 解答下列各题:

(1)平方小于零的实数能构成集合吗?

(2)记 A, a 的意义为 A : 北京第29届奥运会的吉祥物, a : 团团. $a \in A$ 正确吗?

(3)方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 的解集中含有两个元素,这样的说法正确吗?

规范解答: (1) 设 x 是实数.

$x^2 \geq 0$ 总成立, 这表明不存在平方小于零的实数, 尽管如此, “平方小于零的实数”这种描述还是明确而不模糊的. 所以“平方小于零的实数”能构成一个集合.

(2) A : 北京第29届奥运会的吉祥物, A 是一个集合, 它由贝贝、晶晶、欢欢、迎迎、妮妮组成(意思是“北京欢迎你”).

a : 团团, 它是大陆拟赠送台湾的大熊猫“团团, 圆圆”之一, a 是一个元素.

“ $a \in A$ ”不正确.

(3) 解方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$, 得

$$x_1 = x_2 = 2.$$

方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 的解集中只有一个元素2.

“方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 的解集中含有两个元素”, 这样的说法不正确.

规律总结

在本变式题中, 第(1)小题告诉我们, 在集合中, 明确是指存在、不存在一定能说清楚, 不存在属于明确的范畴. 第(2)小题明确了元素与集合之间的从属关系, 即元素的确定性, 也就是说, 一个集合给定了, 它的元素就确定了, 而后就可以判定某个元素是否属于这个集合, 在题中的体现是 $a \notin A$. 第(3)小题谈的是元素的互异性, 即集合中的元素是互不相同的, 在题中的具体处理是, 两个根都是2, 作为集合的元素只能是2.

【变式2】 设集合 A 由不等式 $2x + 1 > 0$ 的解组成, $-1 \in A, 0 \in A$ 正确吗?

规范解答: 解不等式 $2x + 1 > 0$, 得

$$x > -\frac{1}{2}.$$

所以, 集合 A 由大于 $-\frac{1}{2}$ 的一切实数组成.

所以, “ $-1 \in A$ ”不正确, “ $0 \in A$ ”正确.

规律总结

一个集合以不等式、方程等形式给出时要了解这样的集合含有的元素,就必须对不等式、方程先施行求解.

★知识点2 常用的数集及其记法

[记忆] 全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集,记作 $\mathbf{N}$;全体正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.)

〈点拨〉 引进记号 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$,由这些记号经常为我们使用所致,它们的含义已约定俗成,今后不再重述,直接使用就可以了.

【例2】(经典题)填空:

(1) 0 _____ $\mathbf{N}^*$, 0 _____ $\mathbf{N}$;

(2) π _____ $\mathbf{Q}$, π _____ $\mathbf{R}$.

思路分析:解答本例,一是要记忆 $\mathbf{N}^*$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 的含义,二是要知道 0 是自然数、 π 是无理数.

规范解答:(1) 0 是自然数, $\mathbf{N}^*$ 、 $\mathbf{N}$ 分别是正整数集、自然数集. $0 \notin \mathbf{N}^*$, $0 \in \mathbf{N}$.

(2) π 是无理数, $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 分别是有理数集、实数集, $\pi \notin \mathbf{Q}$, $\pi \in \mathbf{R}$.

总结

数集 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 除了表达一类数的全体之功能而外,它还可以参与运算,以“限制条件”的形式出现.例如,满足条件 $1 < x < 3$ 且 $x \in \mathbf{N}$ 得 $x = 2$. 在这个问题中,如果去掉“ $x \in \mathbf{N}$ ”,那么“ $x = 2$ ”就错了.

【变式1】 设集合 A 由满足条件 $-1 \leq x+1 < 5$ 且 $x \in \mathbf{Z}$ 的 x 构成. 指出 -3 、 0 与 A 的关系.

规范解答:由 $-1 \leq x+1 < 5$ 且 $x \in \mathbf{Z}$, 得

$$-2 \leq x < 4, \text{ 且 } x \in \mathbf{Z},$$

所以, x 的值有 6 个, 即 A 有 6 个元素, 它们是

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3,$$

所以

$$-3 \notin A, 0 \in A.$$

【变式2】 设集合 A 由满足条件 $4 \leq x < y < 8$ 且 $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$ 的点 (x, y) 组成. 写出 A 的所有元素.

规范解答:由 $4 \leq x < y < 8$ 且 $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$, 得

$$x=4, y=5, 6, 7;$$

$$x=5, y=6, 7;$$

$$x=6, y=7.$$

集合 A 由满足条件 $4 \leq x < y < 8$ 且 $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$ 的点 (x, y) 组成, 所以, A 的所有元素为

$$(4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7).$$

拓展提升

在本变式题的解答中,我们的做法是先固定 x 再讨论 y , 即当 $x=4$ 时, $y=5, 6, 7$; 当 $x=5$ 时, $y=6, 7$; 当 $x=6$ 时, $y=7$. 这种做法的本质是对 x 实施分类讨论, 具体地说就是把 x 分成“ $x=4, x=5, x=6$ ”三类来讨论. 分类讨论的最大优势在于它能及时地找到解决问题的切入点并使得解决问题的思路层次清楚、分明.

★★★知识点3 集合的表示方法

[掌握] (1) 列举法

把集合的元素一一列举出来, 并用花括号“ $\{\}$ ”括起来表示集合的方法叫做列举法.

例如, 由“方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根组成的集合 A ”可以表示为 $A = \{2, 3\}$.

〈提醒〉 当集合中元素的个数较少时, 采用列举法来表示它较为适宜.

[掌握] (2) 描述法

用集合所含元素的共同特征来表示集合的方法称为描述法. 共同特征是指只有这个集合中的元素才具有而不是这个集合中的元素不具有的特征.

〈点拨〉 用描述法表示集合, 语言可以是文字也可以是符号. 例如, 大于1小于2的实数的集合 A 可以分别表示为

$$A = \{\text{大于1小于2的实数}\},$$

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 2\}.$$

其中, 后者较有代表性.

一般地, 用描述法表示集合的格式是

$$\{P \mid P \text{ 的共同特征}\}.$$

其中, P 是表示这个集合的元素的一般符号, 可称其为代表元素.

【例3】(经典题)解答下列各题:

(1) 用列举法表示方程 $2x^2 + 4x - 1 = 0$ 的根的集合 A ;

(2) 用描述法表示不等式 $3x - 2 \leq -4x + 8$ 的解的集合 B .

思路分析: 第(1)小题需要先求出方程的根 x_1 与 x_2 , 再写成 $A = \{x_1, x_2\}$ 的形式. 第(2)小题需要先解不等式, 再以 $\{P \mid P \text{ 的共同特征}\}$ 的格式书写 B .

规范解答: (1) 解方程 $2x^2 + 4x - 1 = 0$, 得

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2},$$

即

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2},$$

所以

$$A = \left\{ -\frac{2 - \sqrt{6}}{2}, -\frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right\}.$$

(2) 解不等式 $3x - 2 \leq -4x + 8$, 得

$$x \leq \frac{10}{7}.$$

所以

$$B = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \leq \frac{10}{7} \right\}.$$

思考

本例中, A 是有限集(A 中元素的个数是有限的), 用列举法可以完成对它的表示; B 是无限集(B 中元素的个数是无限的), 表示 B , 只能选择描述法了. 在 B 中, 元素的一般符号我们又选择了 x , 这是由代表不等式 $3x-2 \leq -4x+8$ 的解的符号是 x 所致, 这就告诉我们, 集合由怎样的元素组成, 元素的一般符号就采用怎样的符号, 二者是统一的. 例如, 在初中我们学习过一次函数, 表示一次函数的函数值, 元素的一般符号再使用 x 就不妥了, 应该使用 y .

【变式 1】 写出二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的所有函数值的集合.

规范解答: 二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的所有函数值的集合为 $\{y|y=x^2-2x+3\}$.

规律总结

集合中元素的一般符号又称为代表元素. 用描述法表示集合, 代表元素由集合的属性来决定, 集合由什么样的元素组成, 代表元素就选择什么样的符号. 例如, 集合由点组成, 代表元素就应当选为 (x, y) , 其他形式都不恰当.

【变式 2】 写出可以表示双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 的集合.

规范解答: 双曲线由点组成. 可以表示双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 的集合是 $\{(x, y)|y=\frac{1}{x}\}$.

规律总结

对比是丰富知识、提高能力的好方法. 观察下列集合:

$y=\frac{1}{x}$ 中, x 的集合是 $\{x|x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq 0\}$;

函数 $y=\frac{1}{x}$ 的所有函数值的集合是 $\{y|y=\frac{1}{x}\}$;

双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上所有点的集合是 $\{(x, y)|y=\frac{1}{x}\}$.

通过以上对比, 你要领悟“集合由 a 类元素组成时, 代表元素选用 a 就对了”.

1.1.2 集合间的基本关系

★知识点 4 子集

【理解】 对于两个集合 A, B , 如果 $x \in A$, 那么 $x \in B$, 就说 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (或记作 $B \supseteq A$), 读作 A 包含于 B (或读作 B 包含 A).

【提醒】 任何集合 A 都是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$.

【点拨】 集合除了可以用文字语言、符号语言表示之外, 还可以用图形语言来表示.

如图 1-1, 用封闭曲线的内部代表集合, 这个图形就可以表示 A 与 B 的包含关系 $A \subseteq B$.

像这样用封闭曲线的内部表示集合的图形, 一般称它为 Venn 图.

【例 4】 (原创题) 在初中, 我们学习过方程. 设计两个方程的解集 A 与 B , 使得 $A \subseteq B$.

思路分析: 要使得 $A \subseteq B$, 必须使得“若 $x \in A$, 则 $x \in B$ ”.

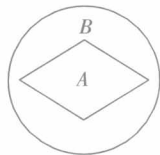


图 1-1

规范解答:设方程 $x+1=0$ 的解集为 A , 这时 $A=\{-1\}$.

再设方程 $(x+1)(x-2)=0$ 的解集为 B , 这时 $B=\{-1, 2\}$.

以上设计的 A 与 B 使得 $A \subseteq B$.

规律总结

在本例中,把方程 $x+1=0$ 的解集设计为 A 之后,设计 B 可以有无穷多种形式,即 $(x+1)(x+a)=0$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 这其中最根本的东西是 $(x+1)(x+a)$ 里面含有 $x+1$ 这个因式.

【变式1】设计一个方程的解集 M 和一个函数值的集合 N , 使得 $M \subseteq N$.

规范解答:设 $M=\{x|(x-1)^2=0\}$, $N=\{y|y=x^2+1\}$.

M, N 分别是

$$M=\{1\}, N=\{y|y \geq 1\}.$$

以上设计的 M, N 使得 $M \subseteq N$.

拓展提升

本变式题的要求是 $M \subseteq N$, 要满足这一要求, 只要把 M 的元素含在 N 里面就可以了, 这样的答案不是唯一的而是无穷的.

【变式2】设 $P=\{(x, y)|y=2x-1\}$. 设计一个含有两个元素的集合 Q , 使得 $Q \subseteq P$.

规范解答:在 $y=2x-1$ 中, 分别令 $x_1=0$ 与 $x_2=1$ 得

$$y_1=-1, y_2=1.$$

记 $Q=\{(0, -1), (1, 1)\}$.

以上设计的 Q 使得 $Q \subseteq P$.

规律总结

本例中,集合 P 是点集,由直线 $y=2x+1$ 上的点组成. 找 Q , 就是要在这条直线上找出两点,以这两点为元素构建一个集合就可以了.

★知识点5 两个集合相等

[理解] 对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 那么就称这两个集合相等, 记作 $A=B$.

〈点拨〉在 A, B 都有元素的情况下, $A=B$ 就是指 A 与 B 的元素完全相同, 但不计元素的顺序, 例如, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 1\}$, 这时 $A=B$.

【例5】(原创题)记 $A=\{x|x=2n+1, n \in \mathbf{Z}\}$, 给出 A 的另外两种表示形式.

思路分析: A 是奇数的集合. 表示奇数的式子有无穷多个, 像 $2n-3, 2n-1, 2n+3, \dots$ 都可以表示奇数, 其中 $n \in \mathbf{Z}$.

规范解答: $A=\{x|x=2n+1, n \in \mathbf{Z}\}$ 是奇数集, A 还可以表示成下面的形式:

$$A=\{x|x=2n-1, n \in \mathbf{Z}\},$$

$$A=\{y|y=2k+3, k \in \mathbf{Z}\}.$$

结论

本例的要求是给出 A 的另外两种表示形式, 其本质就是找出与 A 相等的两个集合. 表示奇数, 可在 $2n+1$ 的基础上依次加 2 或依次减 2, 其中 $n \in \mathbf{Z}$, 但最简单的形式还是 $2n+1$ 或者 $2k-1$, 其中 $n, k \in \mathbf{Z}$.

【变式1】 记 $A=\{x|x=2n, n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x|x=4n, n\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x|x=2k+2, k\in\mathbf{Z}\}$.

(1) A 与 B 相等吗?

(2) $A=C$ 对吗?

规范解答: (1) $A=\{x|x=2n, n\in\mathbf{Z}\}$, 它是偶数集; $B=\{x|x=4n, n\in\mathbf{Z}\}$, 它是由 A 的部分元素组成的集合, 例如: $2\notin B$.

所以, A 与 B 不相等.

(2) A 的意义同第(1)小题; $C=\{x|x=2k+2, k\in\mathbf{Z}\}$, 它是偶数集.

由以上讨论可知, $A=C$.

规律总结

在本变式题的解答中, C 是偶数集的道理在哪儿呢?

$$\because x=2k+2=2(k+1).$$

$$\text{又} \because k\in\mathbf{Z}, \therefore k+1\in\mathbf{Z}.$$

$$\therefore x=2(k+1) \text{ 表示偶数集.}$$

【变式2】 已知 $A=\{x|x=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{y|y=4m\pm 1, m\in\mathbf{Z}\}$, 求证: $A=B$.

规范解答: (1) $x\in A$ 时, $x=2n+1, n\in\mathbf{Z}$.

① 设 $n=2k, k\in\mathbf{Z}$.

$$x=2n+1=2\times(2k)+1=4k+1, k\in\mathbf{Z};$$

② 设 $n=2k-1, k\in\mathbf{Z}$.

$$x=2n+1=2\times(2k-1)+1=4k-1, k\in\mathbf{Z}.$$

以上表明, $x\in A$ 时, $x\in B$,

所以 $A\subseteq B$.

(2) $y\in B$ 时, $y=4m\pm 1, m\in\mathbf{Z}$.

$4m\pm 1$ 表示奇数, $x=2n+1 (n\in\mathbf{Z})$ 表示所有奇数,

所以 $B\subseteq A$.

由(1)、(2), 得

$$A=B.$$

规律总结

在集合中, 要证明集合 A 与集合 B 相等, 即 $A=B$, 只需证明 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

也可以通过证明 A 与 B 的元素完全相同来证明 $A=B$.

★知识点6 真子集

【理解】 如果 $A\subseteq B$, 且存在 $x\in B$ 使得 $x\notin A$, 那么就称 A 是 B 的真子集, 记作 $A\subsetneq B$ (或 $B\supsetneq A$).

【辨析】 由 $A\subseteq B, A=B, A\subsetneq B$ 三者的意义可知, $A\subseteq B$ 包括 $A=B$ 与 $A\subsetneq B$ 两种情况, 二者必居其一而且只居其一.

【提醒】 在集合中, 包含关系具有传递性, 即若 $A\subseteq B, B\subseteq C$, 则 $A\subseteq C$; 若 $A\subseteq B, B\subsetneq C$, 则 $A\subseteq C$; 若 $A\subseteq B, B\subseteq C$, 则 $A\subseteq C$; 若 $A\subsetneq B, B\subsetneq C$, 则 $A\subsetneq C$.

【例6】 (原创题) 已知 $A=\{1\}$, $C=\{1, 2, 3\}$. 设计一个集合 B , 使得 $A\subsetneq B\subsetneq C$.

思路分析: $A\subsetneq B$ 的意义是 $A\subseteq B$, 且存在 $x\in B$ 使得 $x\notin A$.

规范解答: $A=\{1\}$, 为了使 $A \subsetneq B$, 必须使 $1 \in B$; $B \subsetneq C, C=\{1, 2, 3\}$, 可使 $2 \in B$ 或者 $3 \in B$, 但两者不得兼有.

综上, B 可设计为 $B=\{1, 2\}$ 或 $B=\{1, 3\}$.

思考

本例要求中有 $B \subsetneq C$ 这一项, 想一想, 2, 3 都在 B 中能行吗? 如果 $2, 3 \in B$, 结论又该怎样修改?

【变式1】 设 $a < 4, A=\{x | a < x \leq 4\}, B=\{x | 1 \leq x \leq 4\}$.

(1) 当 $A \subsetneq B$ 时, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $B \subsetneq A$ 时, 求 a 的取值范围.

规范解答: (1) 如图 1-2①, 对于 $a < 4, A=\{x | a < x \leq 4\}, B=\{x | 1 \leq x \leq 4\}$, 当 $A \subsetneq B$ 时, $1 \leq a < 4$, a 的取值范围是 $\{a | 1 \leq a < 4\}$.

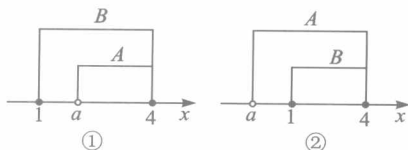


图 1-2

(2) 如图 1-2②, 当 $B \subsetneq A$ 时, $a < 1$, a 的取值范围是 $\{a | a < 1\}$

规律总结

在解决用不等式表示的集合的子集的问题时, 通常采用数轴来解决, 比较直观, 但需特别注意端点问题.

【变式2】 记 $A=\{y | y=x^2+2x-1\}, B=\{y | y=x^2-2x+k\}$, 且 $A \subsetneq B$, 求实数 k 的取值范围.

规范解答: 函数 $y=x^2+2x-1$ 的最小值是

$$y_{\min} = \frac{4 \times 1 \times (-1) - 2^2}{4 \times 1} = -2,$$

所以 $A=\{y | y \geq -2\}$.

函数 $y=x^2-2x+k$ 的最小值是

$$y_{\min} = \frac{4k - (-2)^2}{4} = k-1,$$

所以 $B=\{y | y \geq k-1\}$.

因为 $A \subsetneq B$,

所以 $k-1 < -2$,

解得 $k < -1$,

所以, 实数 k 的取值范围是 $\{k | k < -1\}$.