普通高等教育"十一五"国家级规划教材

力学（第四版）

（下 册） 理论力学

梁昆淼 原著
鞠国兴 施 毅 修订

高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

力 学

(第四版)

(下册)理论力学

梁昆淼 原著
俞 超 马光群 第三版修订
鞠国兴 施 毅 第四版修订

高等教育出版社

内容提要

本书第二版于1987年获国家教委高等学校优秀教材一等奖。此书为第四版。这次修订，根据读者意见和修订者的教学体会，在保持原书特点的同时，调整充实了一些内容，强化了基础，增加了一些反映学科发展的新内容，更新了部分习题。下册相对独立于上册，可以供物理类专业理论力学课程教学使用。下册内容包括：矢量力学、达朗贝尔原理、拉格朗日力学、有心力、散射问题、微振动、刚体力学、哈密顿力学、力学变分原理、正则变换、哈密顿－雅可比方程、非线性力学、弹性体、流体运动学、流体动力学。

本书可作为高等学校物理类专业或其他相近专业的教材，也可供中学教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

力学. 下册，理论力学/梁昆淼著. —4版. —北京：高等教育出版社，2009.7

ISBN 978-7-04-027283-3

Ⅰ. 力… Ⅱ. 梁… Ⅲ. ①力学－高等学校－教材 ②理论力学－高等学校－教材 Ⅳ. O3

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第085317号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	400－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1980年11月第1版
开　　本	787×960　1/16		2009年7月第4版
印　　张	31	印　　次	2009年7月第1次印刷
字　　数	580 000	定　　价	36.20元

物料号　27283－00

策划编辑　陶　铮
责任编辑　张海雁
封面设计　张　楠
责任绘图　尹　莉
版式设计　马敬茹
责任校对　殷　然
责任印制　宋克学

第四版前言

第三版出版至今已有十余年了，为适应当前教学的要求，在国家教育部“十一五”教材规划项目的资助下，我们对原教材进行了全面的修订。

自本教材出版以来的教学实践中，前三版中的一些做法已得到一定程度的认可，特别是将分析力学作为理论力学课程基本内容这一编写理科理论力学教材的原则已基本达成共识，在新近出版的一些同类教材中广泛采用了这种方式。与第三版的修订原则相同，本次修订在力图保持原有教材的优点的同时，对某些过于简化的部分作了补充和完善，以增加可读性；另一方面，删简了一些过于琐碎的内容，例如刚体力学部分中关于转动的矩阵描述。我们增加了反映学科发展的新内容，例如诺特定理、哈内角、KdV 方程等，并专设一章讨论非线性物理中与力学关联的内容，注意了将数值计算融合到具体问题的求解之中。为便于读者查阅，本版新增了名词索引和人名原文等信息。此外，订正了前一版中的各类错误，对部分习题进行了更新。

解题是巩固和加深对基本理论理解的一个重要的环节，本教材的习题数目相对而言并不多，但部分习题有一定的难度。有关解题方面的问题，读者可参见修订者之一所编写的《理论力学学习指导与习题解析》(科学出版社，2008 年)。

力学 (下册) 第四版的修订工作由鞠国兴教授和施毅教授负责。在修订过程中，我们参考了国内外新近出版的理论力学教材以及一些研究文章，为方便读者选读相关内容，特将它们列于参考文献或脚注之中。修订本中融合了我们教学中积累的经验和体会，也反映了我们对一些问题的认识和理解。我们对某些问题的处理方法也多次进行讨论求得共识，以确保教材修订工作的质量。

修订工作得到了南京大学物理系领导的支持，柯善哲教授、金国钧教授、李正中教授、王炜教授等提出了一些修改建议并给予了帮助，高等教育出版社陶铮女士和张海雁先生在本书出版的过程中也给予了诸多的帮助，修订者在此一并表示诚挚的感谢。修订者也感谢张林波先生在使用中文 LATEX (CCT) 中所给予的帮助。

由于我们学识有限，书中错误和不妥之处概由修订者负责，诚望同行和读者批评指正。

鞠国兴　施毅

2009 年 3 月于南京大学物理系

第三版前言

这次修订，注意保持前两版的风格。此外，特别注意使下册相对独立于上册，俾可供物理类专业理论力学的教学使用。

在前两版中，下册起点稍嫌偏高，这次适度放低。例如，矢量力学扩展为较长的一章，加以系统的具体论述，而不再是提纲挈领式的复习性的一节。

有心力、微振动、刚体定点运动，各设专章，用拉格朗日动力学处理，但也适当地引用矢量力学作为对照。我们希望这样既能体现分析力学简明、系统的优点，又可以体现矢量力学物理图像鲜明的优点。

在整个分析力学，尤其是哈密顿动力学及相关内容中，我们力图突出其不同于矢量力学的思考方法、其所具有的更大概括性以及引向近代物理的跳板作用。

这次修订，修改了个别提法，调整更换充实了某些内容。根据学时情况，有些内容可列为选讲，这些或用小字排印或在节码前用记号 * 标明。尤其是连续介质力学部分，如受学时限制，可以只保留初等的论述，而略去进一步的讨论。

此次特约的修订者俞超教授、马光群副教授，在南京大学物理系多年使用本书进行理论力学的教学，各自具体修订分工为：俞超负责第一、四、五、七、十一、十二各章及相应的习题，马光群负责第二、三、六、八、九、十各章及相应的习题。我参加了修订过程中的集体讨论。

我们期待着同行和读者的批评指正。

梁昆淼

1992 年 5 月

目　　录

第一章 矢量力学

研究力学, 很自然从矢量力学开始. 这就是说: 用位移、速度、动量、加速度等矢量来描述运动, 用力矢量表征物体之间的相互作用, 机械运动基本规律也表述为牛顿[①]运动定律之类的矢量定律. 当然, 功、动能、势能这些重要的力学量并不是矢量, 但它们与力矢量、位移矢量有着密不可分的联系.

在展开具体论述之前, 先要谈谈方法论方面的问题.

(a) **区分主要因素与次要因素** 任一物理现象总要牵涉到众多因素. 我们必须把起决定性作用、主要作用、次要作用、微不足道作用的各种因素加以区分, 否则即使对最简单的物理现象也不可能进行分析研究. 针对某一特定问题所涉及的实际对象, 应当只保留那些起决定性作用、主要作用的性质, 必要时最多再考虑某些起次要作用的性质, 坚决抛弃那些只起偶然作用或微不足道作用的因素, 这样就把实际对象抽象为模型. 例如, "质点" 和 "刚体" 都是力学中常用的模型.

(b) **掌握与运用变量与常量之间的辩证关系** 初等物理学一般只考虑常量, 例如匀速、匀加速、常力. 但在客观世界中经常出现变速、变加速、变力. 因此, 首先需要学会在小区间上把变量作为常量处理再令小区间趋于 0. 具体说, 就是用微分和积分处理变量. 例如, 对于 x 轴上的直线运动,

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\dot{x},\quad a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\dot{v};$$

$$x=x_0+\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum v(\tau)\Delta\tau=x_0+\int^t v(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$v=v_0+\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum a(\tau)\Delta\tau=v_0+\int^t a(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

(c) **建立 "代数式" 思考方法** 初等物理所研究的问题虽然计算有繁有简, 但性质上都是比较单纯的. 人们往往可以从已知数直接算出某个未知数, 接着又可利用已求数依次推算出第二个、第三个未知数, 如此等等, 即沿着一条 "链" 推算下去. 但是, 在客观世界的绝大多数现象中, 各种物理量之间往往交织为错综复杂的 "网", "链" 式推算法难以奏效. 因此, 应当通过具体分析, 把已知、未知的各物理量间的错综复杂关系尽可能如实地表为 "代数" 方程, 例如动力学中的运动方程. 当然, 这些方程很可能是微分方程, 并不真的是代数方程.

---

① Isaac Newton, 1642—1727, 英国数学家、物理学家和天文学家.

§1.1　质点运动学

为描述物体的机械运动, 首先要选定参考系, 运动就是相对于参考系来描述的.

§1.1.1　质点的速度和加速度

在参考系上选定一点作为原点. 质点的位置可用从原点到质点的**径矢** $\boldsymbol{r}$ 表示, 质点的运动则由径矢随时间 t 的变化 $\boldsymbol{r}(t)$ 描述.

在一段时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 上, 质点径矢的改变 $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ 叫做质点的**位移**. 径矢对时间的平均变化率 $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ 叫做这段时间内的平均速度. 令 $\Delta t \to 0$, 平均速度 $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ 的极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1.1}$$

叫做质点在该时刻的 **(瞬时) 速度** $\boldsymbol{v}(t)$. 速度是矢量, 它的大小 $= \lim\limits_{\Delta t\to 0}|\Delta \boldsymbol{r}|/\Delta t = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s/\Delta t = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 即速率 v, 这里 Δs 是质点在 Δt 时间内走过的距离. 速度的指向就是 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限指向即轨道的切向, 以 $\boldsymbol{\tau}$ 为切向单位矢量, 则 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$.

速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 的时间变化率 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 即 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ 叫做质点的 **(瞬时) 加速度** $\boldsymbol{a}(t)$. 作为速度的变化率, 既要考虑速度大小的变化, 也要考虑速度指向的变化. 即

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}.$$

这里还需要 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/\mathrm{d}t$ 的具体表达式. 参看图 1–1. 设在时刻 t, 质点经过点 A; 很短时间 Δt 之后, 在时刻 $t + \Delta t$, 质点经过点 B. 在 A 和 B 分别作轨道的切向

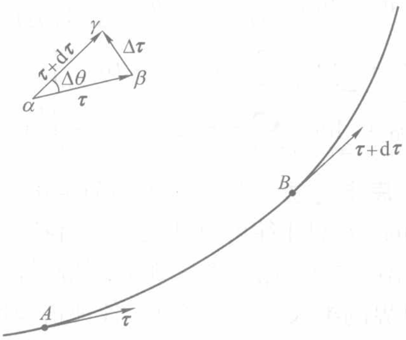

图 1–1

单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau} + \Delta\boldsymbol{\tau}$, 这两个矢量大小相等但指向不同. (为清晰起见, A 与 B 的间距在图中是极为夸大了的. 事实上, A 与 B 很近, $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau} + \Delta\boldsymbol{\tau}$ 的指向差

异极小.) 为便于思考起见, 从点 α 引矢量 $\overrightarrow{\alpha\beta}$ 与 $\overrightarrow{\alpha\gamma}$, 前者等同于 $\boldsymbol{\tau}$, 后者等同于 $\boldsymbol{\tau}+\Delta\boldsymbol{\tau}$, 那么 $\overrightarrow{\beta\gamma}$ 就是 $\Delta\boldsymbol{\tau}$. 容易看出, 只要时间 Δt 很短, 则 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的大小几乎就等于 A 与 B 两点的切向之间所夹的角 $\Delta\theta$, 而指向则既垂直于 $\boldsymbol{\tau}$ 也垂直于 $\boldsymbol{\tau}+\Delta\boldsymbol{\tau}$, 并指着轨道曲线的凹侧. 把指着轨道曲线凹侧的法向单位矢量记作 $\boldsymbol{n}$, 那么, 当 $\Delta t\to 0, \Delta\boldsymbol{\tau}\to\Delta\theta\boldsymbol{n}$, 从而 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/\mathrm{d}t=\dot{\theta}\boldsymbol{n}$. 于是, 质点的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau})=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\dot{v}\boldsymbol{\tau}+v\dot{\theta}\boldsymbol{n}. \tag{1.1.2}$$

这样, 加速度的切向分量 a_τ 为 $\dot{v}$, 而法向分量 a_n 为 $v\dot{\theta}$.

法向加速度 $v\dot{\theta}$ 中的 $\dot{\theta}$ 计算起来不很方便, 让我们把它改写成较为方便的形式, 这是不难做到的:

$$a_n=v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s$ 是轨道曲线的一种几何性质, 即曲线上极为相近的两点的切向之间的夹角与两点之间距离的比, 亦即曲线在那里的弯曲程度, 通常称为**曲率**. 曲率的倒数 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\theta$ 称为**曲率半径**, 兹记作 R. 这样

$$a_n=\frac{v^2}{R}. \tag{1.1.3}$$

以上矢量式适合于进行一般的理论探讨, 但在具体计算中却以使用坐标系较为简便.

§1.1.2 直角坐标系

经典力学认为空间是欧几里得[①]的, 即平直而无弯曲的. 在欧几里得空间中可以建立直角坐标系 $Oxyz$. 设 x,y,z 轴正方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 而任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可用直角坐标分量表示为 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$, 其中

$$\begin{cases} A_x=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}=A\cos\ \alpha,\\ A_y=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}=A\cos\ \beta,\\ A_z=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}=A\cos\ \gamma,\end{cases}\qquad \begin{cases} A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2},\\ \cos\ \alpha=\dfrac{A_x}{A},\\ \cos\ \beta=\dfrac{A_y}{A},\\ \cos\ \gamma=\dfrac{A_z}{A},\end{cases}$$

α,β,γ 分别为矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x,y,z 轴之间的夹角. 这样, 在直角坐标系中, 位矢、速

① Euclid, 约前 330 — 前 275, 古希腊数学家.

度和加速度的分量形式分别为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{1.1.4}$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}, \tag{1.1.5}$$

$$\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}. \tag{1.1.6}$$

§1.1.3 平面极坐标系

对于平面问题, 还可以建立平面极坐标系. 任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可用径向分量 A_ρ 与横向分量 A_φ 表示为 $\boldsymbol{A}=A_\rho\boldsymbol{\rho}^0+A_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0$, 其中 $\boldsymbol{\rho}^0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 分别是径向和横向单位矢量. 注意 $\boldsymbol{\rho}^0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 的指向随地点而异, 因而 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}^0/\mathrm{d}t$ 一般并不等于零.

为了计算 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0/\mathrm{d}t$, 作出对应于 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 两时刻的径向单位矢量 $\boldsymbol{\rho}^0$, $\boldsymbol{\rho}^0+\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0$ (图 1–2), 这两个矢量的大小相同而指向不同. 易见 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0$ 的大小等于 $\mathrm{d}\varphi$; 当 $\mathrm{d}t\to 0$ 时, $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0$ 的指向趋于 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 的指向, 因而

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}^0=\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0.$$

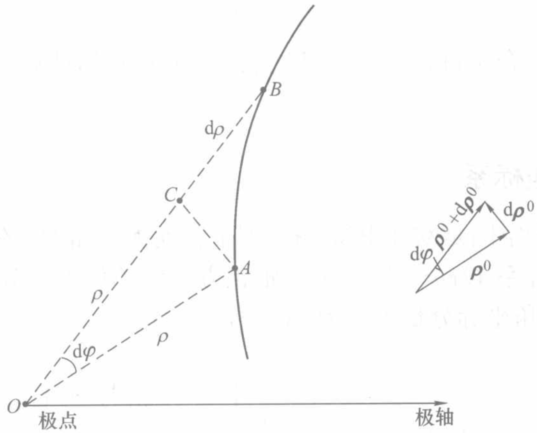

图 1–2

同理可以得出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}^0}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\rho}^0=-\dot{\varphi}\boldsymbol{\rho}^0.$$

这样, 在极坐标系中

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{\rho}^0, \tag{1.1.7}$$