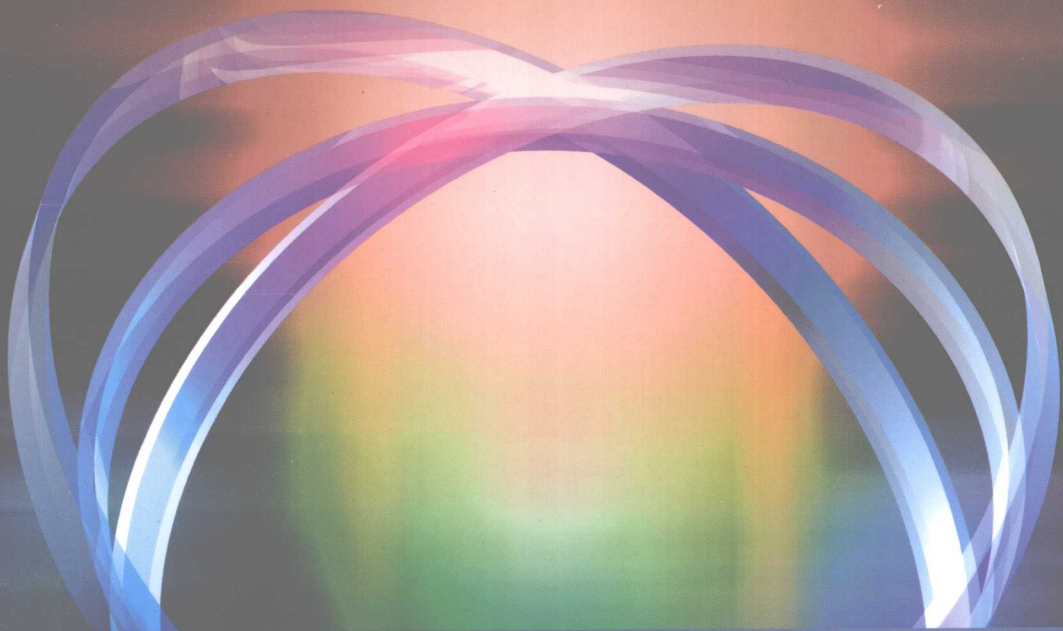




普通高等教育“十一五”国家级规划教材



# 力学 (第四版)

## (下册) 理论力学

梁昆森 原著  
鞠国兴 施毅 修订



高等教育出版社  
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 力 学

(第四版)

## (下册)理论力学

梁昆森 原著

俞 超 马光群 第三版修订

鞠国兴 施 毅 第四版修订

高等教育出版社

## 内容提要

本书第二版于 1987 年获国家教委高等学校优秀教材一等奖。此书为第四版。这次修订,根据读者意见和修订者的教学体会,在保持原书特点的同时,调整充实了一些内容,强化了基础,增加了一些反映学科发展的新内容,更新了部分习题。下册相对独立于上册,可以供物理类专业理论力学课程教学使用。下册内容包括:矢量力学、达朗贝尔原理、拉格朗日力学、有心力、散射问题、微振动、刚体力学、哈密顿力学、力学变分原理、正则变换、哈密顿-雅可比方程、非线性力学、弹性体、流体运动学、流体动力学。

本书可作为高等学校物理类专业或其他相近专业的教材,也可供中学教师参考。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

力学. 下册, 理论力学 / 梁昆森著. — 4 版. — 北京: 高等教育出版社, 2009. 7

ISBN 978-7-04-027283-3

I. 力… II. 梁… III. ①力学-高等学校-教材 ②理论力学-高等学校-教材 IV. O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 085317 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
印 刷	高等教育出版社印刷厂		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
		畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开 本	787×960 1/16	版 次	1980 年 11 月第 1 版
印 张	31		2009 年 7 月第 4 版
字 数	580 000	印 次	2009 年 7 月第 1 次印刷
		定 价	36.20 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 27283-00

# 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真：(010) 82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118

策划编辑	陶铮
责任编辑	张海雁
封面设计	张楠
责任绘图	尹莉
版式设计	马敬茹
责任校对	殷然
责任印制	宋克学

## 第四版前言

第三版出版至今已有十余年了,为适应当前教学的要求,在国家教育部“十一五”教材规划项目的资助下,我们对原教材进行了全面的修订。

自本教材出版以来的教学实践中,前三版中的一些做法已得到一定程度的认可,特别是将分析力学作为理论力学课程基本内容这一编写理科理论力学教材的原则已基本达成共识,在新近出版的一些同类教材中广泛采用了这种方式。与第三版的修订原则相同,本次修订在力图保持原有教材的优点的同时,对某些过于简化的部分作了补充和完善,以增加可读性;另一方面,删简了一些过于琐碎的内容,例如刚体力学部分中关于转动的矩阵描述。我们增加了反映学科发展的新内容,例如诺特定理、哈内角、KdV 方程等,并专设一章讨论非线性物理中与力学关联的内容,注意了将数值计算融合到具体问题的求解之中。为便于读者查阅,本版新增了名词索引和人名原文等信息。此外,订正了前一版中的各类错误,对部分习题进行了更新。

解题是巩固和加深对基本理论理解的一个重要的环节,本教材的习题数目相对而言并不多,但部分习题有一定的难度。有关解题方面的问题,读者可参见修订者之一所编写的《理论力学学习指导与习题解析》(科学出版社,2008年)。

力学(下册)第四版的修订工作由鞠国兴教授和施毅教授负责。在修订过程中,我们参考了国内外新近出版的理论力学教材以及一些研究文章,为方便读者选读相关内容,特将它们列于参考文献或脚注之中。修订本中融合了我们教学中积累的经验 and 体会,也反映了我们对一些问题的认识和理解。我们对某些问题的处理方法也多次进行讨论求得共识,以确保教材修订工作的质量。

修订工作得到了南京大学物理系领导的支持,柯善哲教授、金国钧教授、李正中教授、王炜教授等提出了一些修改建议并给予了帮助,高等教育出版社陶铮女士和张海雁先生在本书出版的过程中也给予了诸多的帮助,修订者在此一并表示诚挚的感谢。修订者也感谢张林波先生在使用中文 LATEX (CCT) 中所给予的帮助。

由于我们学识有限,书中错误和不妥之处概由修订者负责,诚望同行和读者批评指正。

鞠国兴 施毅

2009年3月于南京大学物理系

## 第三版前言

这次修订,注意保持前两版的风格。此外,特别注意使下册相对独立于上册,俾可供物理类专业理论力学的教学使用。

在前两版中,下册起点稍嫌偏高,这次适度放低。例如,矢量力学扩展为较长的一章,加以系统的具体论述,而不再是提纲挈领式的复习性的一节。

有心力、微振动、刚体定点运动,各设专章,用拉格朗日动力学处理,但也适当地引用矢量力学作为对照。我们希望这样既能体现分析力学简明、系统的优点,又可以体现矢量力学物理图像鲜明的优点。

在整个分析力学,尤其是哈密顿动力学及相关内容中,我们力图突出其不同于矢量力学的思考方法、其所具有的更大概括性以及引向近代物理的跳板作用。

这次修订,修改了个别提法,调整更换充实了某些内容。根据学时情况,有些内容可列为选讲,这些或用小字排印或在节码前用记号\*标明。尤其是连续介质力学部分,如受学时限制,可以只保留初等的论述,而略去进一步的讨论。

此次特约的修订者俞超教授、马光群副教授,在南京大学物理系多年使用本书进行理论力学的教学,各自具体修订分工为:俞超负责第一、四、五、七、十一、十二各章及相应的习题,马光群负责第二、三、六、八、九、十各章及相应的习题。我参加了修订过程中的集体讨论。

我们期待着同行和读者的批评指正。

梁昆森

1992年5月

# 目 录

<b>第一章 矢量力学</b> .....	<b>1</b>
§1.1 质点运动学.....	2
§1.1.1 质点的速度和加速度.....	2
§1.1.2 直角坐标系.....	3
§1.1.3 平面极坐标系.....	4
§1.1.4 柱坐标系.....	6
§1.1.5 球坐标系.....	9
§1.1.6 自然坐标系.....	12
§1.2 质点动力学基本定律.....	12
§1.3 非惯性参考系.....	17
§1.4 质点动力学运动定理.....	21
§1.4.1 动量定理.....	21
§1.4.2 角动量定理.....	21
§1.4.3 动能定理.....	22
§1.5 质点系动力学.....	23
§1.5.1 两体问题.....	23
§1.5.2 质点系运动定理.....	24
§1.5.3 非惯性系 质心系中的运动定理.....	26
§1.6 变质量质点动力学.....	29
<b>分 析 力 学</b>	
<b>第二章 达朗贝尔原理</b> .....	<b>37</b>
§2.1 约束.....	37
§2.1.1 约束及其分类.....	37
§2.1.2 约束力.....	41
§2.1.3 约束使问题复杂.....	41
§2.2 自由度与广义坐标.....	44
§2.3 虚功原理 达朗贝尔原理.....	47
§2.3.1 虚位移.....	47

§2.3.2	理想约束 虚功原理 .....	48
§2.3.3	广义坐标下的虚功原理 .....	51
§2.3.4	主动力全是保守力的系统的平衡方程 .....	53
§2.3.5	约束力的求解 —— 拉格朗日乘子法 .....	54
§2.3.6	达朗贝尔原理 .....	57
<b>第三章</b>	<b>拉格朗日动力学 .....</b>	<b>60</b>
§3.1	拉格朗日方程 .....	60
§3.1.1	坐标变换关系与拉格朗日关系 .....	60
§3.1.2	拉格朗日方程 .....	61
§3.1.3	主动力全是保守力的系统的拉格朗日方程 .....	64
§3.2	运动积分 诺特定理 .....	68
§3.2.1	可遗坐标与广义动量积分 .....	69
§3.2.2	广义能量积分 .....	70
§3.2.3	诺特定理 .....	77
*§3.3	非完整系统的动力学 .....	80
*§3.4	拉格朗日力学的推广 .....	86
<b>第四章</b>	<b>有心力 散射问题 .....</b>	<b>90</b>
§4.1	两体问题的简化 动力学方程 .....	90
§4.2	平方反比引力 .....	94
§4.2.1	开普勒行星运动定律 .....	94
§4.2.2	平方反比引力作用下的运动 .....	96
§4.2.3	椭圆运动的能量 .....	99
§4.2.4	圆轨道的稳定性 .....	100
§4.3	人造地球卫星 星际航行 .....	104
§4.3.1	环绕卫星 .....	104
§4.3.2	同步卫星 .....	105
§4.3.3	轨道卫星的自动姿态稳定 .....	109
§4.3.4	星际航行 引力助推 .....	112
§4.4	散射问题 .....	116
§4.4.1	平方反比斥力作用下的运动轨道方程 .....	116
§4.4.2	$\alpha$ 粒子在原子核的库仑场中散射 散射角 .....	117
§4.4.3	散射截面 卢瑟福公式 .....	120



<b>第五章 小振动</b> .....	<b>124</b>
§5.1 两个自由度的振动 .....	124
§5.2 分子的振动 .....	133
§5.3 小振动的一般理论 .....	137
§5.3.1 拉格朗日函数 .....	138
§5.3.2 化平方和 .....	139
§5.3.3 直接求解 .....	139
§5.3.4 证明 $\lambda^2 < 0$ .....	141
*§5.3.5 矩阵表述 .....	142
<b>第六章 刚体力学</b> .....	<b>150</b>
§6.1 刚体运动学 .....	150
§6.1.1 刚体的自由度 .....	150
§6.1.2 刚体的运动 .....	152
§6.1.3 刚体里各点的运动 .....	154
§6.1.4 基点的选取 .....	157
§6.1.5 角速度矢量 .....	158
*§6.1.6 转动的矩阵表述 .....	158
§6.1.7 欧拉角 .....	161
§6.2 刚体动力学 .....	163
§6.2.1 运动定理 .....	163
§6.2.2 刚体的角动量和动能 .....	165
§6.2.3 惯量张量 惯量椭球 .....	167
§6.2.4 欧拉动力学方程 .....	173
§6.2.5 拉格朗日方程 .....	178
§6.2.6 定点运动的动能定理 .....	178
§6.3 刚体的平移 定轴转动 平面平行运动的动力学 .....	179
§6.4 无外力矩的定点运动 (欧拉 - 潘索情况) .....	187
§6.4.1 对称刚体 .....	187
§6.4.2 非对称刚体 .....	191
§6.4.3 动平衡的稳定性 .....	193
§6.5 对称重刚体的定点运动 (拉格朗日 - 泊松情况) .....	194
§6.5.1 欧拉动力学方程 .....	195
§6.5.2 拉格朗日方程 .....	195
§6.5.3 解算与阐释 .....	196
§6.5.4 简明的解释 .....	199
*§6.6 带电的旋转物体在磁场中的进动 (拉莫尔进动) .....	204

<b>第七章 哈密顿力学</b> .....	<b>206</b>
§7.1 哈密顿正则方程 .....	206
§7.1.1 哈密顿正则方程 .....	206
§7.1.2 勒让德变换与哈密顿正则方程 .....	209
§7.1.3 运动积分 .....	210
§7.1.4 例题 .....	211
§7.2 相空间 刘维尔定理 .....	221
*§7.3 位力定理 .....	225
§7.4 泊松括号 .....	228
§7.4.1 力学量的时间变化率 .....	228
§7.4.2 泊松括号 .....	229
§7.4.3 雅可比恒等式 泊松定理与可积性 .....	232
§7.4.4 量子力学中的泊松括号 .....	234
*§7.5 关于拉格朗日力学和哈密顿力学的对话 .....	235
<b>第八章 力学变分原理</b> .....	<b>238</b>
§8.1 变分法初步 .....	238
§8.1.1 泛函 .....	239
§8.1.2 变分问题 .....	239
§8.1.3 欧拉方程 .....	239
§8.1.4 约束条件下的变分问题 .....	244
§8.2 哈密顿原理 .....	246
§8.2.1 位形空间的哈密顿原理 .....	246
§8.2.2 相空间的哈密顿原理 .....	248
§8.2.3 位形世界的哈密顿原理 .....	249
*§8.3 最小作用量原理 .....	252
§8.3.1 可遗坐标和哈密顿原理 .....	252
§8.3.2 雅可比最小作用量原理 .....	254
<b>第九章 正则变换 哈密顿 – 雅可比方程</b> .....	<b>256</b>
§9.1 正则变换 .....	256
§9.1.1 正则变换的条件 .....	256
§9.1.2 母函数 .....	257
§9.1.3 正则变换举例 .....	259
§9.1.4 泊松括号的不变性 .....	262
§9.1.5 无限小正则变换 .....	264

§9.2 哈密顿 – 雅可比方程 .....	268
§9.2.1 哈密顿主函数 .....	268
§9.2.2 哈密顿特征函数 .....	269
§9.2.3 可分离系统 .....	271
§9.2.4 例题 .....	272
*§9.3 作用量变量与角变量 .....	276
*§9.4 浸渐不变量与哈内角 .....	282
§9.4.1 作用量变量的浸渐不变性 .....	282
§9.4.2 哈内角 .....	285
*§9.5 正则微扰理论 .....	287
*§9.6 从“几何力学”到波动力学 .....	290
§9.6.1 从波动光学到几何光学 .....	291
§9.6.2 从“几何力学”到波动力学 .....	292
<b>第十章 非线性力学初步 .....</b>	<b>295</b>
§10.1 非线性振动与微扰法 .....	295
§10.2 参数共振 .....	299
§10.3 平衡点的类型与性质、极限环和轨道稳定性 .....	302
§10.3.1 平衡点及其类型 .....	302
§10.3.2 极限环 .....	308
§10.3.3 轨道稳定性 .....	309
§10.4 庞加莱截面 .....	311
§10.5 近可积系统与 KAM 定理 .....	313
§10.6 保守系统中的混沌 .....	314
§10.7 耗散系统中的混沌 .....	320
§10.8 逻辑斯谛映射 倍周期分岔与混沌 .....	323
§10.9 孤子 .....	329
§10.9.1 KdV 方程 运动积分 .....	330
§10.9.2 KdV 方程的求解 .....	332
<b>连续介质力学</b>	
<b>第十一章 弹性体 .....</b>	<b>339</b>
§11.1 张变 (或长变) .....	339
§11.1.1 胡克定律 杨氏模量 .....	339
§11.1.2 泊松比 一般情况下的胡克定律 .....	341
§11.1.3 体积的改变 体积模量 .....	342

§11.1.4	弹性限度 极限强度 .....	343
§11.2	切变 (或剪变) .....	344
§11.2.1	切变 .....	344
§11.2.2	纯切变 .....	345
§11.2.3	切变模量与杨氏模量的关系 .....	346
§11.2.4	切变弹性势能密度 .....	348
§11.3	圆杆的扭转 .....	348
§11.4	杆的弯曲 .....	351
§11.4.1	单纯弯曲 .....	351
§11.4.2	关于截面的形状 .....	354
§11.4.3	带有切变的弯曲 .....	355
*§11.5	胁变的一般分析 .....	357
§11.5.1	胁变张量 .....	357
§11.5.2	胁变主轴 .....	361
§11.5.3	体胀系数 .....	362
§11.5.4	相容条件 .....	362
*§11.6	胁强的一般分析 .....	364
§11.6.1	胁强张量 .....	364
§11.6.2	胁强主轴 .....	366
§11.6.3	胁强与胁变之间的关系 .....	367
§11.6.4	相容条件 .....	368
*§11.7	弹性体静力学 .....	369
*§11.8	弹性体动力学 .....	374
§11.8.1	动力学基本方程 .....	374
§11.8.2	哈密顿原理 拉格朗日方程 .....	375
§11.8.3	弹性体中的波动 .....	376
<b>第十二章</b>	<b>流体运动学 .....</b>	<b>378</b>
§12.1	流体运动学的特点 .....	378
§12.1.1	着重研究速度场 .....	378
§12.1.2	迹线与流线 .....	378
§12.1.3	当地变化率与实体变化率 .....	381
*§12.2	速度场的分析 .....	382
§12.2.1	速度场的一般分析 .....	382
§12.2.2	有旋流动与无旋流动 .....	386
§12.2.3	连续性方程 .....	392

<b>第十三章 流体动力学</b> .....	<b>394</b>
§13.1 流体动力学的特点.....	394
§13.2 流体静力学.....	395
§13.2.1 流体的平衡方程.....	395
§13.2.2 静止液体的自由表面.....	396
§13.2.3 不可压缩流体中的静压强分布.....	398
§13.2.4 可压缩流体中的静压强分布.....	399
§13.3 理想流体稳恒流动的运动定理.....	400
§13.3.1 动量定理.....	400
§13.3.2 伯努利定理.....	401
*§13.4 无黏性流体动力学.....	408
§13.4.1 欧拉方程.....	408
§13.4.2 欧拉方程的第一次积分.....	409
§13.4.3 涡旋动力学.....	410
§13.4.4 绕流对物体的作用力.....	411
§13.4.5 欧拉方程的线性近似.....	413
*§13.5 重力场中的表面波.....	414
§13.5.1 基本方程与边界条件.....	414
§13.5.2 小幅波.....	418
§13.5.3 浅水长波 KdV 方程.....	421
§13.6 黏性流体.....	423
§13.6.1 黏性系数.....	423
§13.6.2 直圆管的流量公式.....	424
§13.6.3 运动定理.....	426
*§13.7 黏性流体动力学方程.....	429
§13.7.1 纳维尔-斯托克斯方程.....	429
§13.7.2 球体所受黏性阻力 斯托克斯公式.....	431
§13.7.3 雷诺数.....	434
§13.7.4 边界层.....	436
<b>附录</b> .....	<b>437</b>
习题.....	437
答案.....	461
<b>参考文献</b> .....	<b>472</b>
<b>索引</b> .....	<b>473</b>

# 第一章 矢量力学

研究力学,很自然从矢量力学开始.这就是说:用位移、速度、动量、加速度等矢量来描述运动,用力矢量表征物体之间的相互作用,机械运动基本规律也表述为牛顿<sup>①</sup>运动定律之类的矢量定律.当然,功、动能、势能这些重要的力学量并不是矢量,但它们与力矢量、位移矢量有着密不可分的联系.

在展开具体论述之前,先要谈谈方法论方面的问题.

(a) **区分主要因素与次要因素** 任一物理现象总要牵涉到众多因素.我们必须把起决定性作用、主要作用、次要作用、微不足道作用的各种因素加以区分,否则即使对最简单的物理现象也不可能进行分析研究.针对某一特定问题所涉及的实际对象,应当只保留那些起决定性作用、主要作用的性质,必要时最多再考虑某些起次要作用的性质,坚决抛弃那些只起偶然作用或微不足道作用的因素,这样就把实际对象抽象为模型.例如,“质点”和“刚体”都是力学中常用的模型.

(b) **掌握与运用变量与常量之间的辩证关系** 初等物理学一般只考虑常量,例如匀速、匀加速、常力.但在客观世界中经常出现变速、变加速、变力.因此,首先需要学会在小区间上把变量作为常量处理再令小区间趋于0.具体说,就是用微分和积分处理变量.例如,对于  $x$  轴上的直线运动,

$$\begin{aligned}v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}, \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v}; \\x &= x_0 + \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \sum v(\tau) \Delta \tau = x_0 + \int^t v(\tau) d\tau, \\v &= v_0 + \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \sum a(\tau) \Delta \tau = v_0 + \int^t a(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

(c) **建立“代数式”思考方法** 初等物理所研究的问题虽然计算有繁有简,但性质上都是比较单纯的.人们往往可以从已知数直接算出某个未知数,接着又可利用已求数依次推算出第二个、第三个未知数,如此等等,即沿着一条“链”推算下去.但是,在客观世界的绝大多数现象中,各种物理量之间往往交织为错综复杂的“网”,“链”式推算法难以奏效.因此,应当通过具体分析,把已知、未知的各物理量间的错综复杂关系尽可能如实地表为“代数”方程,例如动力学中的运动方程.当然,这些方程很可能是微分方程,并不真的是代数方程.

<sup>①</sup> Isaac Newton, 1642—1727, 英国数学家、物理学家和天文学家.

## §1.1 质点运动学

为描述物体的机械运动,首先要选定参考系,运动就是相对于参考系来描述的.

### §1.1.1 质点的速度和加速度

在参考系上选定一点作为原点. 质点的位置可用从原点到质点的径矢  $r$  表示, 质点的运动则由径矢随时间  $t$  的变化  $r(t)$  描述.

在一段时间  $\Delta t = t_2 - t_1$  上, 质点径矢的改变  $\Delta r = r_2 - r_1$  叫做质点的位移. 径矢对时间的平均变化率  $\Delta r/\Delta t$  叫做这段时间内的平均速度. 令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 平均速度  $\Delta r/\Delta t$  的极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (1.1.1)$$

叫做质点在该时刻的(瞬时)速度  $v(t)$ . 速度是矢量, 它的大小  $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta r|/\Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s/\Delta t = ds/dt$  即速率  $v$ , 这里  $\Delta s$  是质点在  $\Delta t$  时间内走过的距离. 速度的指向就是  $\Delta r$  的极限指向即轨道的切向, 以  $\tau$  为切向单位矢量, 则  $v = v\tau$ .

速度  $v(t)$  的时间变化率  $dv/dt$  即  $d^2r/dt^2$  叫做质点的(瞬时)加速度  $a(t)$ . 作为速度的变化率, 既要考虑速度大小的变化, 也要考虑速度指向的变化. 即

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v\tau) = \frac{dv}{dt}\tau + v\frac{d\tau}{dt}.$$

这里还需要  $d\tau/dt$  的具体表达式. 参看图 1-1. 设在时刻  $t$ , 质点经过点  $A$ ; 很短时间  $\Delta t$  之后, 在时刻  $t + \Delta t$ , 质点经过点  $B$ . 在  $A$  和  $B$  分别作轨道的切向

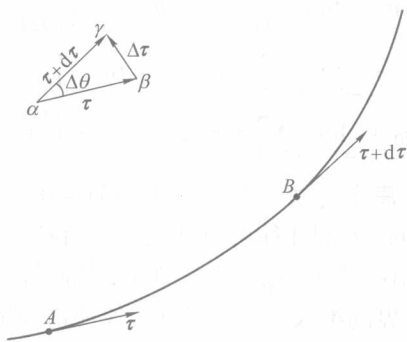


图 1-1

单位矢量  $\tau$  和  $\tau + \Delta\tau$ , 这两个矢量大小相等但指向不同. (为清晰起见,  $A$  与  $B$  的间距在图中是极为夸大的了. 事实上,  $A$  与  $B$  很近,  $\tau$  和  $\tau + \Delta\tau$  的指向差

异极小.) 为便于思考起见, 从点  $\alpha$  引矢量  $\overrightarrow{\alpha\beta}$  与  $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ , 前者等同于  $\boldsymbol{\tau}$ , 后者等同于  $\boldsymbol{\tau} + \Delta\boldsymbol{\tau}$ , 那么  $\overrightarrow{\beta\gamma}$  就是  $\Delta\boldsymbol{\tau}$ . 容易看出, 只要时间  $\Delta t$  很短, 则  $\Delta\boldsymbol{\tau}$  的大小几乎就等于  $A$  与  $B$  两点的切向之间所夹的角  $\Delta\theta$ , 而指向则既垂直于  $\boldsymbol{\tau}$  也垂直于  $\boldsymbol{\tau} + \Delta\boldsymbol{\tau}$ , 并指着轨道曲线的凹侧. 把指着轨道曲线凹侧的法向单位矢量记作  $\boldsymbol{n}$ , 那么, 当  $\Delta t \rightarrow 0, \Delta\boldsymbol{\tau} \rightarrow \Delta\theta\boldsymbol{n}$ , 从而  $d\boldsymbol{\tau}/dt = \dot{\theta}\boldsymbol{n}$ . 于是, 质点的加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v\dot{\theta}\boldsymbol{n}. \quad (1.1.2)$$

这样, 加速度的切向分量  $a_\tau$  为  $\dot{v}$ , 而法向分量  $a_n$  为  $v\dot{\theta}$ .

法向加速度  $v\dot{\theta}$  中的  $\dot{\theta}$  计算起来不很方便, 让我们把它改写成较为方便的形式, 这是不难做到的:

$$a_n = v\frac{d\theta}{dt} = v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\theta}{ds}.$$

$d\theta/ds$  是轨道曲线的一种几何性质, 即曲线上极为相近的两点的切向之间的夹角与两点之间距离的比, 亦即曲线在那里的弯曲程度, 通常称为曲率. 曲率的倒数  $ds/d\theta$  称为曲率半径, 兹记作  $R$ . 这样

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.1.3)$$

以上矢量式适合于进行一般的理论探讨, 但在具体计算中却以使用坐标系较为简便.

### §1.1.2 直角坐标系

经典力学认为空间是欧几里得<sup>①</sup>的, 即平直而无弯曲的. 在欧几里得空间中可以建立直角坐标系  $Oxyz$ . 设  $x, y, z$  轴正方向的单位矢量分别为  $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ , 而任一矢量  $\boldsymbol{A}$  可用直角坐标分量表示为  $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ , 其中

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i} = A \cos \alpha, \\ A_y = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} = A \cos \beta, \\ A_z = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} = A \cos \gamma, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \\ \cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \\ \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \\ \cos \gamma = \frac{A_z}{A}, \end{array} \right.$$

$\alpha, \beta, \gamma$  分别为矢量  $\boldsymbol{A}$  与  $x, y, z$  轴之间的夹角. 这样, 在直角坐标系中, 位矢、速

<sup>①</sup> Euclid, 约前 330 — 前 275, 古希腊数学家.



度和加速度的分量形式分别为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad (1.1.4)$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}, \quad (1.1.5)$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}. \quad (1.1.6)$$

### §1.1.3 平面极坐标系

对于平面问题, 还可以建立平面极坐标系. 任一矢量  $\boldsymbol{A}$  可用径向分量  $A_\rho$  与横向分量  $A_\varphi$  表示为  $\boldsymbol{A} = A_\rho \boldsymbol{\rho}^0 + A_\varphi \boldsymbol{\varphi}^0$ , 其中  $\boldsymbol{\rho}^0$  和  $\boldsymbol{\varphi}^0$  分别是径向和横向单位矢量. 注意  $\boldsymbol{\rho}^0$  和  $\boldsymbol{\varphi}^0$  的指向随地点而异, 因而  $d\boldsymbol{\rho}^0/dt$  和  $d\boldsymbol{\varphi}^0/dt$  一般并不等于零.

为了计算  $d\boldsymbol{\rho}^0/dt$ , 作出对应于  $t$  和  $t+dt$  两时刻的径向单位矢量  $\boldsymbol{\rho}^0, \boldsymbol{\rho}^0+d\boldsymbol{\rho}^0$  (图 1-2), 这两个矢量的大小相同而指向不同. 易见  $d\boldsymbol{\rho}^0$  的大小等于  $d\varphi$ ; 当  $dt \rightarrow 0$  时,  $d\boldsymbol{\rho}^0$  的指向趋于  $\boldsymbol{\varphi}^0$  的指向, 因而

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}^0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \boldsymbol{\varphi}^0 = \dot{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^0.$$

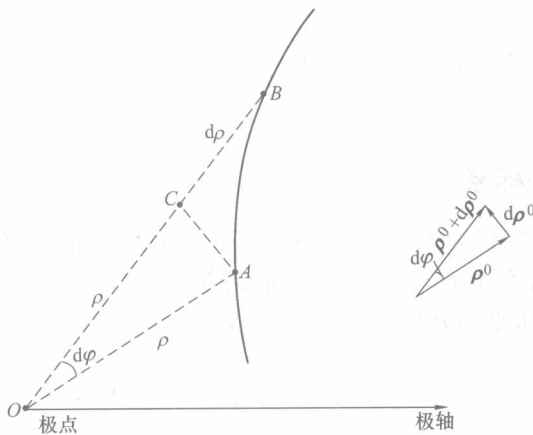


图 1-2

同理可以得出

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}^0}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \boldsymbol{\rho}^0 = -\dot{\varphi} \boldsymbol{\rho}^0.$$

这样, 在极坐标系中

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{\rho}^0, \quad (1.1.7)$$