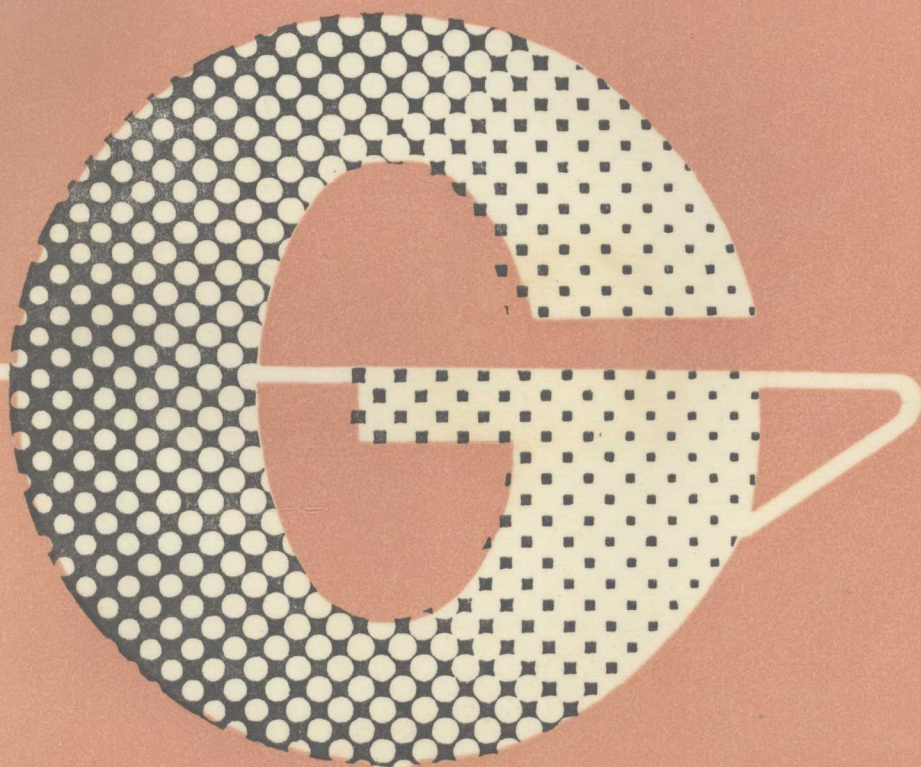


普通高等专科学校教育机电类规划教材

自动控制原理



4

重庆钢铁高等专科学校 姜泓 主编

机械工业出版社

普通高等专科学校教育机电类规划教材

自动控制原理

重庆钢铁高等专科学校 姜 泓 主编



机械工业出版社

(京)新登字054号

本书是按照全国高等专科学校电气工程类专业“自动控制原理”课程教学大纲的要求编写的。本书着重讨论了自动控制原理的基本概念、基本原理和基本方法。内容包括自动控制系统的基本概念、控制系统的数学模型、系统的时域分析法、频域分析法、非线性系统的描述函数法及采样系统的基本理论等。本书注意突出重点,强调物理概念,加强理论联系实际。全书有较多的例题和习题,并在每章后附有小结,以利巩固基础知识和训练解决实际问题的能力。

本书可作为高等专科学校电气自动化类专业自动控制原理课程的教材或教学参考书,也可供有关专业师生及从事自动化方面工作的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理/重庆钢铁高等专科学校姜泓主编。—北京:
机械工业出版社,1994普通高等专科学校教育机电类规划教材
ISBN 7-111-04116-X

I. 自…
I. 姜…
Ⅱ. 自动控制-高等学校-教材
N. TP13-43

出版人:马九荣(北京市百万庄南街1号邮政编码100037)
责任编辑:韩雪清 版式设计:王颖 责任校对:韩晶
封面设计:郭景云 责任印制:王国光
机械工业出版社京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1994年10月第1版·1994年10月第1次印刷
787mm×1092mm^{1/16}·14印张·339千字
00 001—10 000册
定价:8.50元

前 言

本教材是按照全国高等专科学校电气工程类专业“自动控制原理”课程教学大纲的要求编写的。

自动控制技术有效地提高了劳动生产率和产品质量,改善了工人劳动条件,在国民经济及国防建设中发挥着愈来愈重要的作用。自动控制原理是研究自动控制基本规律的科学,是自动控制技术的理论基础。按其发展的不同阶段,可以分为经典控制理论与现代控制理论。本书着重讨论了经典控制理论(主要是反馈控制理论)的基本概念、基本原理与基本方法。全书共分七章,包括自动控制系统的基本概念、控制系统的数学模型、系统的时域分析法、频域分析法、非线性系统的描述函数法及采样系统的基本理论等内容,以便供学生掌握分析和设计自动控制系统的基本理论和方法,为进一步学习有关专业知识及进行工程实践打好必要的基础。

编者根据多年讲授本课的经验,力求突出重点,精简篇幅;强调物理概念,减少繁琐数学推导;加强理论与实际的结合,在应用上下功夫,以突出专科特色,适合专科教学。全书有较多的例题和习题,每章附有小结,以利巩固基础知识和训练解决实际问题的能力。

本书由姜泓主编,并编写了第一、二、三、六章,沈德全编写了第七章,刘祖润编写了第四、五章。张永丰、黄坚、田晓晔、陈金玉等参加了审稿工作。唐敏莉任本书的主审。他们对本书提出了许多宝贵的修改意见,在此表示诚挚的感谢。

在编写过程中,学习和汲取了兄弟院校教材的部分内容,在此表示感谢。

本教材可作为高等专科学校电气自动化类专业自动控制原理课程的教材,也可供有关专业师生及自动化方面工作的工程技术人员参考。

由于编者水平所限,错误和不当之处在所难免,恳切希望广大读者批评指正。

编者 1992年7月

目 录

前言	
第一章 自动控制系统的一般概念	1
第一节 自动控制系统的基本原理	1
第二节 自动控制的基本方式	2
第三节 对控制系统性能的基本要求	5
第四节 自动控制系统的类型	6
小结	7
习题	7
第二章 自动控制系统的数学模型	9
第一节 数学模型的基本概念	9
第二节 控制系统的动态微分方程	9
第三节 控制系统的传递函数	16
第四节 动态结构图及其等效变换	27
小结	37
习题	37
第三章 时域分析法	41
第一节 控制系统的典型输入信号	41
第二节 线性系统的稳定性分析	43
第三节 代数稳定判据	45
第四节 稳态误差分析与计算	50
第五节 复合控制系统的稳态误差	57
第六节 控制系统的动态响应及其性能指标	58
第七节 二阶系统的动态响应分析	59
第八节 具有闭环零点的二阶系统分析	65
第九节 二阶系统性能的改善	68
第十节 高阶系统的动态分析	70
小结	71
习题	71
第四章 频率特性法	77
第一节 频率特性	77
第二节 典型环节的频率特性	82
第三节 系统开环频率特性	90
第四节 系统开环频率特性与闭环系统的稳定性	97
第五节 系统时域性能和开环频率特性的关系	105
第六节 根据系统闭环频率特性分析系统的动态性能	113
小结	117
习题	118
第五章 控制系统的频率法校正	124
第一节 控制系统校正的一般概念	124
第二节 常用校正装置及其特性	125
第三节 串联校正	132
第四节 反馈校正	147
第五节 恒值系统的校正	150
小结	155
习题	155
第六章 非线性系统	160
第一节 非线性系统概述	160
第二节 描述函数法	164
第三节 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用	175
小结	178
习题	178
第七章 采样控制系统	182
第一节 采样控制系统概述	182
第二节 采样过程和采样信号的复现	182
第三节 z 变换	187
第四节 脉冲传递函数	194
第五节 采样系统的时域分析	200
第六节 采样控制系统的稳态误差	205
第七节 采样系统的校正	208
小结	211
习题	212
附录	214
附录A 常用函数拉氏变换表	214
附录B 拉氏变换的一些定理	215
附录C Z 变换表	215
参考文献	217

第一章 自动控制系统的一般概念

本章将概括地介绍自动控制系统的组成及类型，以及对自动控制系统性能的基本要求，以便对本学科的研究任务、对象及要研究的问题，有一个较为明确的认识，同时找到学习的入门方法。

第一节 自动控制系统的基本原理

在工业生产中，为了提高产品质量及生产率，需要对生产设备和工艺过程进行自动控制。所谓自动控制，就是在人不直接参与下，靠控制装置使被控制对象(设备或工艺过程)自动地按照预定的规律运行，或使某个被控制的参数按预定要求变化。如果用一个数学式来表达自控系统的控制任务时，应使被控制对象的被控物理量满足。

$$\text{被控量 } x_o(t) = \text{给定量 } x_i(t)$$

下面以炉温控制系统为例，说明自动控制的基本原理，如图1-1所示。

控制的任务是保持炉温恒定(或按一定的温度要求变化)。炉温的高低受到加工件数量及环境温度的影响，而主要受混合器输出煤气的控制。调整煤气阀门的开度，可以控制炉温的高低。如果采用人工操纵，则靠人眼观察实际温度和要求温度的差，用手不断调节阀门，以保持炉内温度恒定(或按要求温度变化)。控制工作情况可以分解为如图1-2所示的人工职能方框图，图中表示了各部分的功能及相互关系。如果采用控制装置来代替人工操作，自动完成控制过程时，图1-3a即为一种简单的控制系统。

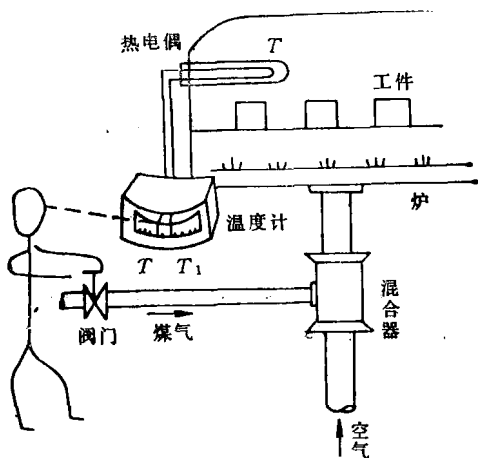


图1-1 炉温人工控制系统原理图

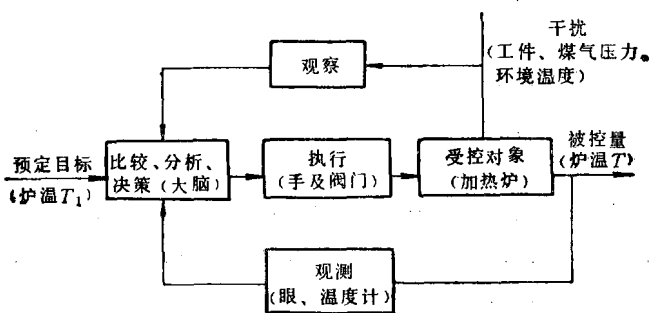


图1-2 炉温控制系统功能方框图

热电偶将温度的高低转换成电动势的大小，作测炉温用。热电动势通过放大后作为反馈电压 u_f ，并与给定温度 T_0 所对应的给定电压 u_s 作比较，将温度差变换成电压差，如所测炉温不等于给定温度，即 $T \neq T_0$ ，则有电压差 $\Delta u = u_s - u_f$ ，它通过放大器放大后去控制电动机，带动阀门，启闭煤气阀以调节炉温。若 $T > T_0$ 则 $u_f > u_s$ ， Δu 为负，使电动机反转关小阀门，

降低炉温，反之则开大阀门。直到 $T = T_0$ 、 $\Delta u = 0$ 时，电动机停转。图1-3b画出了以上系统各部分的职能及相互关系的功能方框图。

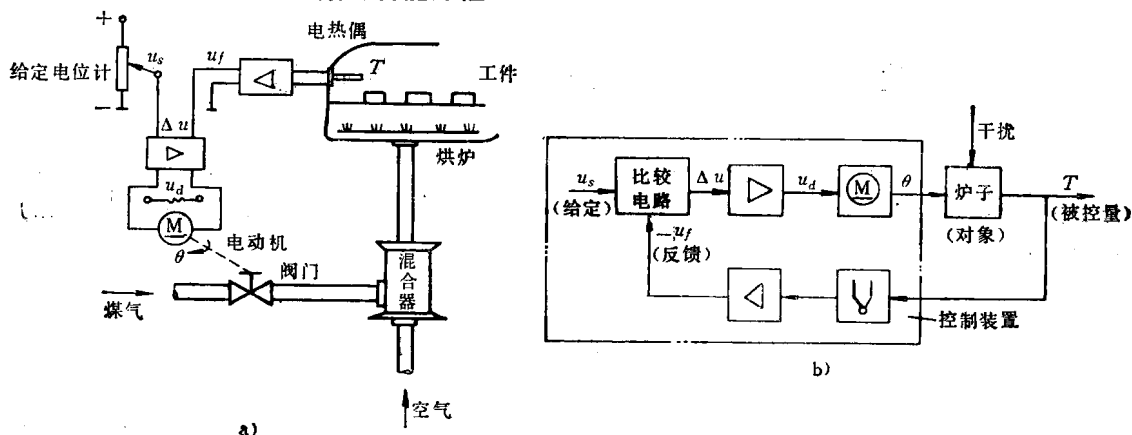


图1-3 炉温自动控制系统

a) 原理图 b) 方框图

由上例可见，一个控制系统包括如下几部分：

1. 控制对象与控制装置

控制系统即指这两大部分的组合。其中控制对象指工作对象，它可以是一个工作机械或生产过程，如上例指的加热炉。控制装置则是为完成规定控制任务而按一定方式联接的各种元器件及设备，如图1-3b点划线框内的部分。控制装置的功能一般为检测、比较、运算调节、放大、执行等。

2. 参与控制的信号

(1) 输出量 即为系统的被控量，在上例中为温度。

(2) 输入量 是指影响被控量的外来信号。通常分为两种

1) 给定量 它是人们期望系统输出按照这种输入的要求而变化的控制量。故一般又称给定输入或简称输入。上例中电位器电压 u_s 即是给定输入。

2) 扰动量 它是一种人们所不希望的、影响系统输出使之偏离了给定作用的控制量，上例中工件的数量、环境温度及煤气压力的变化都属于扰动。

(3) 反馈量 是从输出量中取得、直接或经过某种变换后返回到输入端参与系统控制的一种信号。反馈环节可以是系统中的某个局部环节、反馈量也可以是某个局部环节的输出的反馈信号。上例是按检测的实际炉温转换成电压 u_f 后、与表示给定炉温 u_s 比较，所得的偏差来进行控制。采用炉温负反馈，反馈量变换成了一个电压信号。

3. 信号传递通道

信号传递通道包括主通道(又称前向通道)和反馈通道。

第二节 自动控制的基本方式

按照自控系统的结构及控制方式，可将其分为三种。

一、开环控制系统

以直流电动机调速系统为例，其原理图及方框图如图1-4所示。

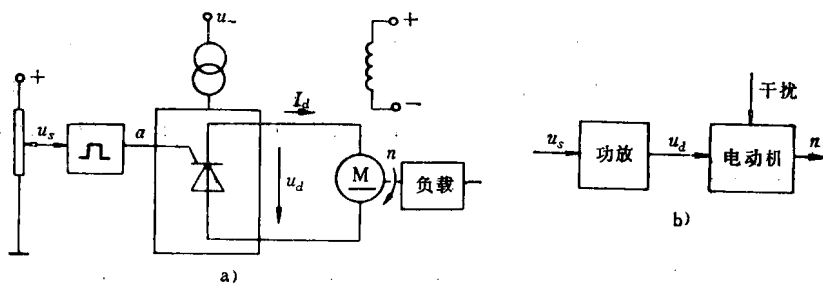


图1-4 直流电动机开环调速系统

a) 原理图 b) 方框图

电动机为控制对象，给定输入为电压 u_s ，输出为转速 n 。由于电动机的励磁磁通恒定，当改变 u_s 时，晶闸管的相控角 α 及整流电压 u_d 改变，使电动机的速度 $n = \frac{u_d - I_d R}{C_e}$ 随之变化，实现了电动机的调速。若给定不变，则速度不变。但电网电压的波动，负载电流的变化，都将引起速度的变化，这些便是系统的扰动量。这种控制方式由改变输入直接控制输出，而输出对系统的控制过程没有直接影响，叫开环控制。系统的结构也只有主通道。这种开环控制的特点是系统结构简单，但控制精度不高，抗干扰能力差。只用于对控制性能要求不高的场合。

如果扰动因素已知，并能直接或间接地检测出来。那么也可以利用扰动信号来产生一种补偿作用，以抵消扰动的影响，这叫按扰动控制。图1-5为一种简单的扰动控制系统的原理图及方框图。

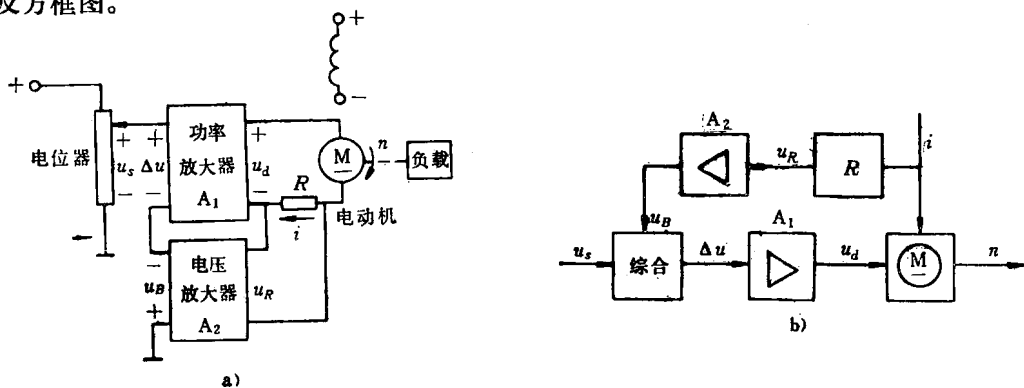


图1-5 直流电动机按扰动控制的调速系统

a) 原理图 b) 方框图

这里电动机是控制对象， n 为被控量， u_s 为给定输入，负载电流是一种扰动量。当负载增大($I \uparrow$)转速下降($n \downarrow$)时，电阻 R 上的压降增大($u_R \uparrow$)，它加强了输入信号，使 $u_d \uparrow$ 补偿 $n \downarrow$ 。这种系统在结构上输出量 n 对系统的控制作用没有任何影响， u_s 来自扰动量，因此它仍属于开环控制系统，它具有控制作用迅速的特点。

二、闭环控制系统

电动机调速系统的另一例如图1-6所示，其中a为原理图，b为方框图。

电动机为控制对象，输出 n 为被控量，速度给定 u_s 为输入量。测速发电机TG将输出转速 n 变换成电压 u_n ，并反回到输入端去，形成一个闭环。这种系统的输出量参与控制，直接影响系统的控制过程，这种系统叫闭环控制系统。系统的调速原理同上，但它采用了差值

$\Delta u = u_s - u_{fn}$ 来控制。例如在某给定数 u_s 下电动机工作在某一相应速度 n 时,若负载增大 ($I_d \uparrow$),引起转速降低 ($n \downarrow$),则测速发电机的输出也相应减小 ($u_{fn} \downarrow$),使比较环节的出差值增大 ($\Delta u \uparrow$),通过放大,控制电动机转速升高,来补偿由扰动(负载)引起的转速下降,而保持系统转速恒定。这种闭环控制系统的特点是:

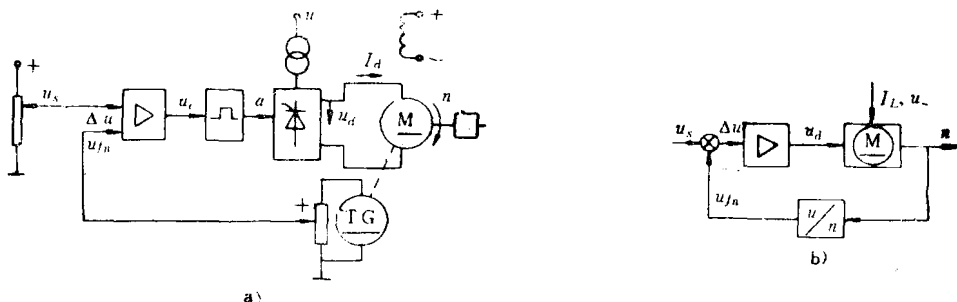


图1-6 直流电动机按闭环控制的调速系统

a) 原理图 b) 方框图

1) 因为输出信号要返回输入端进行比较,以得到偏差值来进行控制,所以信号传递必然存在两类通道,一是通过放大器、晶闸管去控制电动机速度,这称主通道。另一是将输出信号返回输入端,这一信号传递通道称反馈通道。

2) 系统是采用差值进行控制的,差值所产生的控制作用是使系统向减少或消除偏差值的方向变化,故有利于克服惯性和干扰而维持给定作用的控制,常称这种控制为偏差控制。具有上述两个特点的系统叫反馈控制系统。

3) 对一个反馈控制系统而言,无论取哪种物理量反馈,包围在他反馈环内的各种干扰量所引起的输出量变化的偏差值,都能得到减小或消除,而使系统具有较好的动、静态精度。如转速反馈系统能维持转速恒定,电压反馈系统能保持电压恒定。由于闭环控制系统具有一系列的优良性能,因而广泛用于各种控制装置中。

三、复合控制系统

将闭环控制系统和开环控制系统结合在一起,构成开环—闭环相结合的控制系统,称复合控制系统。图1-7为按偏差控制和扰动控制相结合的复合控制系统的原理图及方框图。图1-8为偏差控制和顺馈控制相结合的复合控制系统的方框图。这类系统兼有闭环及开环的优点,控制精度高,控制作用快,但结构也较为复杂。

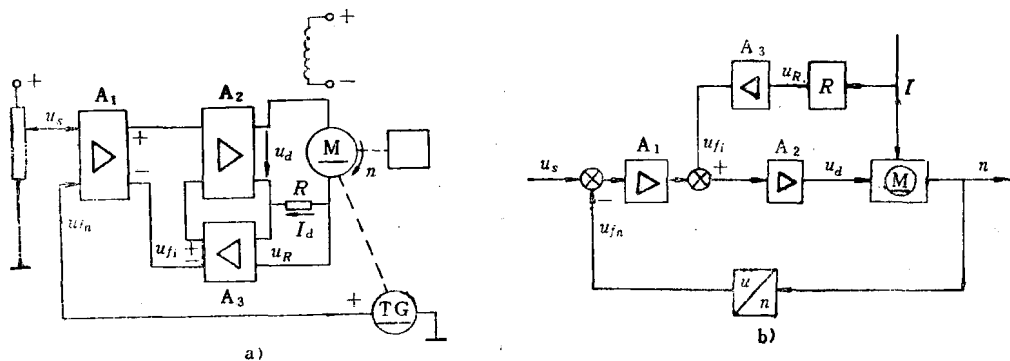


图1-7 直流电动机按复合控制的调速系统

a) 原理图 b) 方框图

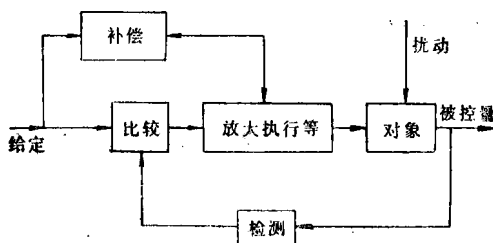


图1-8 复合控制系统方框图

第三节 对控制系统性能的基本要求

按以上结构所设计的自动控制系统是否都能很好地完成控制任务？在理想情况下，应该任何时候被控量和给定值都应完全相等，不受惯性和干扰影响，即

$$x_o(t) \equiv x_i(t) \quad (1-1)$$

然而实际上当给定量变化时，由于系统总存在机械的和电磁的惯性，能源功率也是有限的，被控量不可能随着跃变，被控量由一个状态变到另一个状态，必然有一个过渡过程，这种随时间 t 变化的过渡过程称为系统的动态(或暂态)过程。时间足够长(理论上为 $t \rightarrow \infty$)以后，被控量趋于(新的)稳态。一个系统性能的好坏，在动态过程和稳态中将充分显示出来。图1-9为当给定和扰动输入作阶跃变化时输出的动态过程。工程上一般以动态过程的稳定性及快速性，稳态的稳态误差(精度)来对控制系统提出要求。

一、稳定性

稳定性指动态过程的振荡倾向及重新恢复平衡工作的能力。一个系统稳定与否是决定系统能否工作的首要问题。当系统给定变化(图1-9a)或因受扰动而偏离原工作状态时(图1-9b)，重新恢复平衡可能有三种曲线。曲线3是一种发散性的振荡过程，最终导致系统不能恢复平衡，无法稳定工作，这种系统称为不稳定系统。曲线2为衰减振荡，可能达到平衡工作，系统是稳定的，但在衰减振荡过程中，要求振幅不要过大，过大的振幅使运动部件处于过载状态而易于造成破坏。

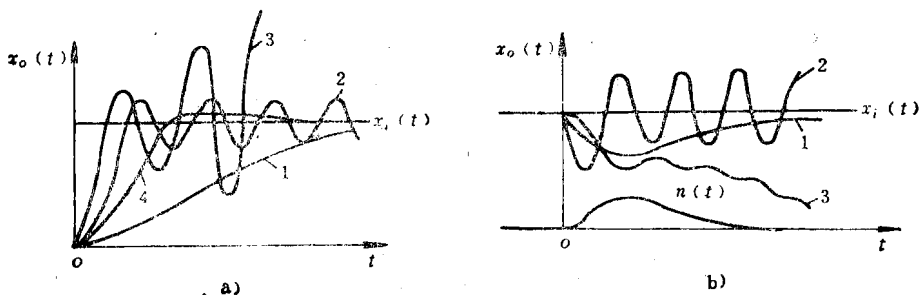


图1-9 控制系统的随动过程和抗扰过程

二、快速性

快速性指动态过程延续的时间。时间短说明动态过程进行快，曲线1为单调变化过程，虽平稳但响应时间长，反应太迟钝，这对系统工作也是不利的。曲线4既快且跟随输入时幅

值偏离又小, 较为理想, 动态精度高。

三、准确性

准确性指系统重新恢复平衡后, 输出偏离给定值的误差大小, 此指标表明了系统的稳态精度。如果最终误差为零则称为无差系统, 反之为有差系统。控制系统将根据控制对象对工艺的要求, 对准确性提出不同的要求。

必须注意: 同一个系统以上三方面的性能常常是相互制约的, 提高了快速性, 可能增大振荡幅值, 加剧了系统的振荡。改善了稳定性又可能使动态过程进行缓慢, 增长了过渡时间, 甚至导致稳态误差增大, 降低了系统的精度。对于一个控制系统而言, 一般应兼顾几方面的要求, 或根据它的工作任务不同, 要求有所侧重, 应按照具体情况合理解决矛盾。

第四节 自动控制系统的类型

随着生产规模的不断扩大, 以及自动化技术和控制理论不断发展, 为满足生产要求, 自动控制系统在不断完善, 并出现了各式各样的类型, 现将常见的自动控制系统的类型, 概括如下:

一、线性系统和非线性系统

线性系统是线性元件组成的系统, 其数学模型用线性微分方程式来描述, 是本书讨论的重点, 系统中只要有一个非线性元件, 即为非线性系统。本书第六章将作简单介绍。

二、连续系统和离散系统

连续系统是指系统各部分的信号都是模拟量及连续函数。目前多数闭环系统都属这种类型, 因此为本书的主要内容。离散系统是指系统的一处或多处信号, 是以脉冲列或数码形式传递的, 它包括有脉冲控制系统和数字控制系统。目前采用数字控制的系统愈来愈多, 故本书在第七章讨论其原理。

三、恒值系统、随动系统和程序控制系统

按照控制系统中给定量的特征, 可以分成以下三种类型:

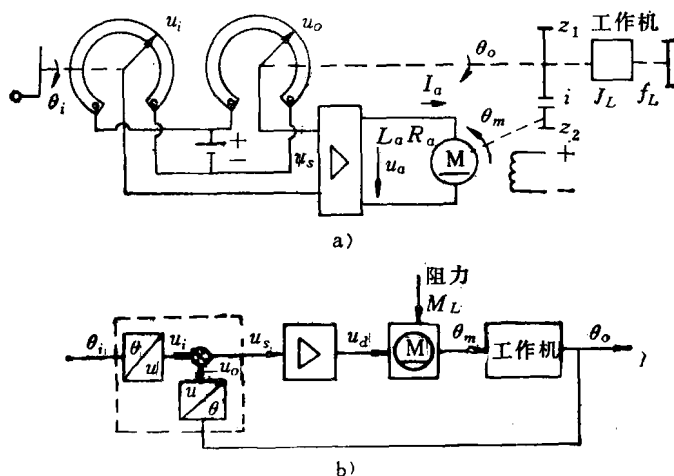


图1-10 控制轮舵位置的随动系统

a) 原理图 b) 方框图

1. 恒值控制系统

这种系统的给定量是一定的, 控制任务是保持被控制量为一定不变常数, 在发生扰动时尽快地使被控量恢复到整定值。如恒温、恒压、恒速等控制系统属这类系统。

2. 随动控制系统

这种系统给定量是按照事先不知道的时间函数变化的, 要求输出跟随给定量变化。例如军工上的自动火炮、冶金厂的带钢飞剪机等控制系统均是。图1-10为一种控制轮舵位置的随动系统。

控制的任务是手柄转动 θ_i 角时, 工作机械(轮舵)跟着转 θ_o 角, 要求 $\theta_o(t) \approx \theta_i(t)$ 。其工作原理是两个电位器上的滑动节点分别和手柄及工作机联动, 因而电位器的输入输出电压 U_i 、 U_o 正比于两者的转角 θ_i 、 θ_o 。当手柄转动时, $\theta_i \neq \theta_o$ 而产生角差, 由角差转换的电压差 U_e , 经放大后控制电动机, 经过减速器带动工作机, 使工作机跟踪手柄转动, 并力图消灭角差。当手柄转过一定角停下, 工作机将转过相同的角, 到 $\theta_o = \theta_i$ 时停下。由于手柄的操作是任意的, 工作机必须跟踪转动, 故也称它为自动跟踪系统或伺服系统。

从控制作用上讲, 以上系统是一个按偏差控制的反馈系统。所以恒值系统和随动系统在控制原理上是一样的, 区别在于前者主要是克服扰动影响, 而后者主要是克服本身惰性影响, 以跟随控制量的变化。矛盾不同对系统的要求也不同。恒值系统要求稳定性较高, 要求稳态误差小。而随动系统则对快速性及动态精度要求较高。

3. 程序控制系统

这种系统的给定量是按照已确定的一定时间函数的变化而变化的, 如程控机床及一些工艺过程自动化的生产线等属这类控制系统。

以上三种系统当然都可以是连续的或离散的, 线性的或非线性的。

随着生产和自动化技术的飞速发展, 特别当今计算机技术和航天技术的发展, 促进了自控理论的飞速发展, 出现了多变量、变参数、最优控制、自适应控制等复杂控制系统, 近年来在大系统工程、人工智能控制方面又有新的发展。这些都属于现代控制理论的范畴了。

小 结

要分析一个自动控制系统, 首先必须弄清楚系统的工作原理, 它的组成方式及参与控制的量。分析组成时又需注意各组成部分的作用及其相互关系。分析原理时, 要了解清楚控制作用是如何产生的? 有否反馈和补偿? 偏差是怎样纠正的? 并能用系统方框图来表示各部分的作用及关系和信号的传递, 这样才能进一步进行定量分析。

对一个控制系统, 主要围绕其完成控制任务的性能如何进行分析研究, 首先是系统能否稳定工作, 稳态时的稳态误差(精度)如何? 动态过程中的快速性与动态精度如何? 可将它简单化概括为稳、快、准, 而这些性能指标间往往是互相制约的。

分析系统不是研究自动控制理论的最终目的, 最终目的应该是根据分析的结论去设计系统。通常采用校正的方法, 围绕着完成一定控制任务所要求达到的性能指标来改造和设计系统的控制装置。以下各章将逐步介绍一些工程上常用的分析计算法, 归纳一些普遍规律, 以对系统进行分析及校正。

习 题

1-1 举例解释下述名词术语的含义

自动控制系统 被控对象与被控量 给定输入与扰动输入 偏差与误差 有差系统与无差系统 开环控制与闭环控制 反馈控制与复合控制 主通道与反馈通道 恒值控制与随动控制。

1-2 回答以下问题

(1) 用方块图说明反馈控制系统的组成、特点及其原理。

(2) 比较开环控制系统和闭环控制系统的特点。

1-3 画出图1-11所示的温度控制系统及自动门开闭系统的方块图，分析其工作原理。

1-4 图1-6中的反馈控制系统中放大器的参数发生变化，电网电压波动，电动机负载变化，电动机励磁电压发生变化，这些都将影响电动机的速度，其中哪些影响可以得到补偿，哪些不能得到补偿？

1-5 为什么说一种补偿装置只能补偿一种与之相应的扰动因素，对图1-8所采用扰动控制的系统中，当电网电压变化及电动机励磁电压发生变化时，转速能否得到补偿？

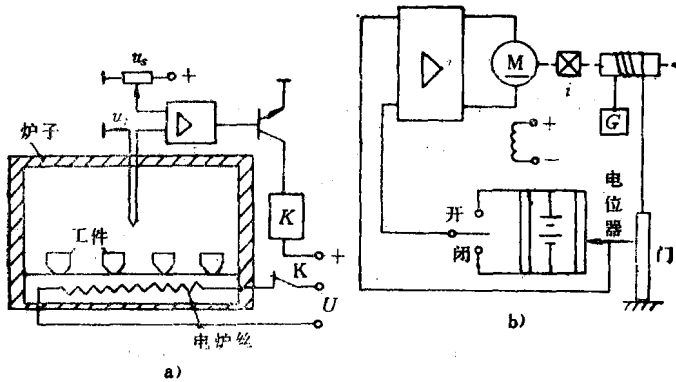


图1-11 习题1-3图

第二章 自动控制系统的数学模型

第一节 数学模型的基本概念

为了分析或者设计一个自动控制系统，首先需要建立其数学模型，建模通常是研究自动控制系统首要的和最基本的工作。

自控系统的数学模型是描述系统在运动过程中各物理变量之间相互关系的数学表达式。因为系统在运动中各物理变量是随时间而变化的，所以这个运动方程是微分方程而不是代数方程，通常称为动态微分方程。

对一个复杂的实际物理系统，建立恰当的数学模型是一件不容易的事，一般应根据系统的实际结构及参数，按照系统计算所要求的精度，抓住反映系统本质和主流的东西，忽略一些非本质和次要的因素(如电路在一定条件下不考虑分布参数及各种非线性影响等)，在简化系统的一些假设基础上，把物理系统理想化。系统理想化后的物理模型的数学描述(动态微分方程)就是系统所要建的数学模型。当准确度要求愈高时，理想化的假设条件愈少，系统的物理模型愈复杂。而过于复杂的模型，既不利于研究，也难得保证所要求的准确度。而简化的数学模型，与实际系统是否相符，需要在实践中验证和完善。所以建模过程，实质上是对控制系统的一个调查研究和再认识的过程。

当系统的数学模型是线性微分方程时，称为线性系统。如果为常系数线性微分方程，常称为定常线性系统。线性系统可以运用叠加原理，所以当几个输入量同时作用时，可以作为单输入、单输出处理，然后进行叠加以求总输出。在一定范围内，非线性系统可以当作线性系统处理，求得近似特性。

线性微分方程在一定条件下，可以用拉氏变换转换成传递函数，并用动态结构图表示，所以系统数学模型的形式有微分方程、传递函数和动态结构图。

建立系统数学模型，有两种基本方法：解析法和实验法。所谓解析法就是根据系统及元件各变量遵循的物理规律，推导出其数学表达式，从而建立数学模型。实际上只有部分系统的数学模型，它们主要由简单的环节组成，能够根据机理分析推导而得，而相当多数量的系统，特别是复杂装置，涉及的因素较多，往往通过实验方法去建立，即根据实验数据进行整理和编写。本章仅就定常线性系统的解析建模法讨论如下，实验建模法将在后续章节及实验中介绍。

第二节 控制系统的动态微分方程

一、列写动态微分方程的一般方法

列写系统的动态微分方程，目的在于确定被控制量与给定量或扰动量之间的函数关系，而系统是由各种元件组成的，因此列写的一般步骤是：

1) 确定系统或各元件的输入变量、输出变量。系统的给定量或扰动量都是输入变量,而被控量则是输出变量。对于一个环节或元件而言,应按系统信号传递情况来确定输入、输出变量。

2) 按照信号的传递顺序,从系统的输入端开始,依据各变量所遵循的物理规律(如电路中的基尔霍夫定律,力学中的牛顿定律,热力系统的热力学定律以及能量守恒定律等),列出在变化(运动)过程中的各个动态微分方程,列写时按工作条件,忽略一些次要因素,并考虑相邻元件的彼此影响(负载效应)。

3) 消去所列各微分方程组的中间变量,得到描述系统的输入、输出变量的微分方程。

4) 整理所得微分方程,一般将输出量放在等号左侧按降幂排列,并将各系数归化为具有一定物理意义(如时间常数)的形式。

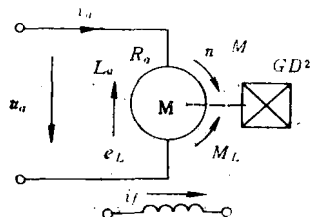


图2-1 直流电动机电枢回路

以下举例说明建立动态微分方程的步骤和方法:

例2-1 如图2-1所示,列写电枢控制的他励直流电动机的微分方程。

解 电动机是控制系统中常用的执行机构或控制对象,改变电枢电压 u_a , 可控制其转速 n 或角速度的变化。

(1) 设输入变量为 u_a , 输出变量为 n 。

(2) 按电动机转动原理,列出各运动微分方程:

电路的电压平衡方程式

$$L_a \frac{di_a}{dt} + i_a R_a = u_a - e_a$$

若忽略电枢反应、涡流及磁滞影响。当励磁电流 i_f 一定时,磁通 φ 为恒定。则

电枢反电动势 $e_a = C_e \omega$

式中 ω ——角速度,单位 s^{-1} ;

C_e ——电动势常数,单位 $V \cdot S$ 。

电磁力矩 $M = C_m i_a$

式中 C_m ——力矩常数,单位 $kg \cdot m/A$ 。

机械力矩平衡方程式 $M = f\omega + M_L + J \frac{d\omega}{dt}$

式中 f ——集中粘性摩擦系数,单位 $kg \cdot m \cdot s$;

M_L ——负载力矩,单位 $kg \cdot m$ 。

(3) 消去中间变量,可得输入 u_a 与输出 ω 间的函数关系

$$\begin{aligned} \frac{JL_a}{C_m} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \left(\frac{L_a f}{C_m} + \frac{JR_a}{C_m} \right) \frac{d\omega}{dt} + \left(C_e + \frac{R_a f}{C_m} \right) \omega \\ = u_a - \frac{R_a}{C_m} M_L - \frac{L_a}{C_m} \frac{dM_L}{dt} \end{aligned} \quad (2-1)$$

其中右边后两项为负载 M_L 带来的扰动。它为二阶常系数线性微分方程,简称二阶系统。含有 J 、 L_a 两个储能元件。

(4) 讨论:在大电机中,粘性摩擦力矩相对较小而可忽略,则上式有

$$\frac{JL_a}{C_m} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{JR_a}{C_m} \frac{d\omega}{dt} + C_e\omega = u_d - \frac{R_a}{C_m} M_L - \frac{L_a}{C_m} \frac{dM_L}{dt}$$

将上式除以 C_e ，并令

$$T_m = \frac{JR_a}{C_e C_m}, \text{ 称为机电时间常数;}$$

$$T_L = \frac{L_a}{R_a}, \text{ 称为电枢电磁时间常数。}$$

则上式可简化成

$$T_m T_L \frac{d^2\omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{C_e} u_d - \frac{T_m}{J} M_L - \frac{T_m T_L}{J} \frac{dM_L}{dt} \quad (2-2)$$

如果进一步忽略电机电枢的 L_a 时, $T_L = 0$, 则有

$$T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{C_e} u_d - \frac{T_m}{J} M_L \quad (2-3)$$

为一阶系统。工程上常使用 n (r/min)、 GD^2 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$) 计量, $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, $J = \frac{GD^2}{4g}$, 则式(2-2)、式(2-3)变为

$$T_m' T_L \frac{d^2 n}{dt^2} + T_m' \frac{dn}{dt} + n = \frac{1}{C_e'} u_d - \frac{T_m' M_L}{GD^2/375} - \frac{T_m' T_L}{GD^2/375} \frac{dM_L}{dt} \quad (2-4)$$

$$T_m' \frac{dn}{dt} + n = \frac{1}{C_e'} u_d - \frac{T_m' M_L}{GD^2/375} \quad (2-5)$$

在伺服系统中, 伺服电机为执行机构, 若取 M_L 为恒定值, 且忽略小电机的 L_a , 而粘性摩擦力矩不能忽略。由式(2-1)有

$$JR_a \frac{d\omega}{dt} + (C_e C_m + R_a f) \omega = C_m u_d - R_a M_L$$

$$\frac{JR_a}{C_e C_m + R_a f} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{C_m}{C_e C_m + R_a f} u_d - \frac{R_a}{C_e C_m + R_a f} M_L \quad (2-6)$$

$$T_m'' \frac{d\omega}{dt} + \omega = K'' u_d - K_m' M_L \quad (2-7)$$

式中 T_m'' ——机电时间常数, $T_m'' = \frac{JR_a}{C_e C_m + R_a f}$;

K'' ——比例系数, $K'' = \frac{C_m}{C_e C_m + R_a f}$;

K_m' ——比例系数, $K_m' = \frac{R_a}{C_e C_m + R_a f}$ 。

例2-2 列写如图2-2所示的闭环调速系统的微分方程。

速度给定电压 u_s 、速度反馈 u_{fn} 通过运算放大器比较放大后, 供给触发器触发晶闸管, 改变电动机电枢电压 u_d , 以调节电动机的速度 n 。

解 (1) 输入变量为给定电压 u_s , 输出变量为 n 。

(2) 各环节的运动方程, 按照信号流程列写如下:

①比较放大环节

$$\frac{u_s - u_{fn}}{R_0} = \frac{u_o}{R_{12}}$$

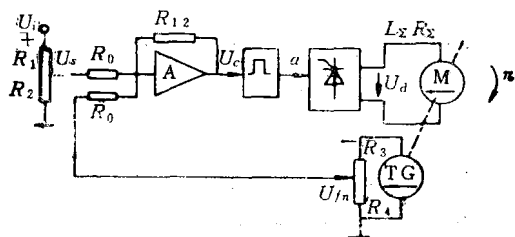


图2-2 闭环调速控制系统

$$u_o = \frac{R_{12}}{R_o} (u_s - u_{fn}) = K_1 (u_s - u_{fn})$$

②晶闸管功率放大环节。忽略控制的时滞作用, 设 K_s 为晶闸管的电压放大系数

$$u_d = K_s u_o$$

③控制对象——直流他励电动机, 由上例式(2-4)知空载有

$$T_m T_L \frac{d^2 n}{dt^2} + T_m \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d}{C_e}$$

式中 $T_m = \frac{GD^2 R_\Sigma}{375 C_e C_m}$

$$T_L = \frac{L_\Sigma}{R_\Sigma}$$

④反馈环节

$$u_{fn} = C_o f n \frac{R_4}{R_3 + R_4} = K_f n$$

(3) 消去中间变量, 并整理得

$$\frac{T_L T_m}{1+K} \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{T_m}{1+K} \frac{dn}{dt} + n = \frac{K_s u_s}{C_e (1+K)} \quad (2-8)$$

式中 $K = \frac{K_1 K_s K_{fn}}{C_e}$
 $K_f = K_1 K_s$

(2-9)

称 K 为闭环系统的开环放大倍数。 K_s 为正向通道的放大倍数。

讨论: 当系统处于稳态时, $\frac{dn}{dt} = \frac{d^2 n}{dt^2} = 0$, 可得空载稳态时的速度

$$n = \frac{K_s u_s}{C_e (1+K)} \propto u_s \quad (2-10)$$

例2-3 列写图2-3RLC串联电路的微分方程, 设 u_i 为输入变量, u_o 为输出变量。

解 根据电路原理, 各元件上 $u_R = iR$, $u_L = L \frac{di}{dt}$, $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$, 忽略与输出端相并联的电流 i_o , 有

$$u_i = u_R + u_L + u_o = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (2-11)$$

$$u_o = \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{则 } i = C \frac{du_o}{dt}$$

代入整理后有

$$LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$$

令 $T_L = \frac{L}{R}$, $T_o = RC$ 均为时间常数, 则上式为

$$T_L T_o \frac{d^2 u_o}{dt^2} + T_o \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i \quad (2-12)$$

为二阶常系数线性微分方程, 有 L 、 C 两个储能元件。

例2-4 列写图2-4所示弹簧—质量块—阻尼器的机械位移系统的微分方程。设外作用力 F 为输入变量, 位移 x 为输出变量。