

经典教材辅导·数学

# 微积分学 同步辅导

华中科技大学微积分课题组

华中科技大学出版社  
<http://www.hustp.com>

经典教材辅导用书·数学类丛书

# 微积分学同步辅导

华中科技大学微积分课题组编

华中科技大学出版社  
中国·武汉

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分学同步辅导/华中科技大学微积分课题组编. —武汉:华中科技大学出版社,  
2009年9月

ISBN 978-7-5609-5683-1

I. 微… II. 华… III. 微积分-高等学校-教学参考资料 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 159730 号

**微积分学同步辅导**

**华中科技大学微积分课题组编**

策划编辑:周芬娜

责任编辑:王汉江

责任校对:李 琴

封面设计:潘 群

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16

印张:22.75

字数:476 000

版次:2009年9月第1版

印次:2009年9月第1次印刷

定价:36.50元

ISBN 978-7-5609-5683-1/O·505

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

## 内 容 提 要

本书是依据高等数学教学基本要求,为了帮助学生深入学习微积分学(或高等数学)知识而编写的一本辅导教材.每章内容包括基本要求、学习指导、解题指导、知识扩展、练习题及部分答案与提示.

本书侧重于对学生学习过程中常见的疑难问题以问答方式进行剖析解答,对典型题型的解题方法和策略进行归纳总结,选题范围广、梯度大,注重基础性与综合性相结合,例题分析新颖、易懂,尽可能一题多解,注重归纳与提高.不少内容是作者长期教学经验的总结.阅读此书,必将加深对概念、理论的理解,开阔解题思路,提高分析问题、解决问题及应试的能力.

本书适合正在学习或复习高等数学的学生使用,对备考研究生的学生是一本很好的参考书,同时也可以作为教学参考书和习题课教材.

# 前 言

本书是为正在学习微积分学(或高等数学)课程的大学本科生编写的一本同步辅导书.它可作为习题课教学参考教材,也适合于复习高等数学课程,同时,还可以作为备考研究生数学考试的参考书.

本书内容紧扣教学大纲和考试大纲,编排次序与教学实际一致.内容包括函数、极限与连续、一元微积分、无穷级数、矢量与空间解析几何、多元微积分、微分方程.

本书以章为基本单位,每一章分为四个部分:基本要求、学习指导、解题指导和知识扩展.各部分的编写特点如下.

**基本要求** 列举教学大纲规定的教学要求.

**学习指导** 点拨重要的知识点,归纳概念或结论之间的内在关系,解答学习过程中常见的疑难问题.

**解题指导** 按照典型题型来介绍解题方法和策略,以提高学习的效率.在典型题型中通过若干例子来介绍解题方法和策略的应用.例题选择在确保基本知识的基础上,注重启发性和综合性.例题解答注重分析和引导,详细易懂.

**知识扩展** 提供了适当的相关知识和结论.

学习数学的有效方法便是做题.为了检验解题能力,书中提供了相应的习题.这些练习分为A、B两类,供不同要求的读者使用.

本书由华中科技大学数学与统计学院微积分课程组组织编写,参编人员有毕志伟、何涛、金建华、罗德斌、刘蔚萍、梅正阳、王德荣、吴洁、俞小清、周军等.统稿工作由毕志伟和吴洁负责.

在本书编写过程中参考了原课程组编写的《微积分学习题课教程》(华中科技大学出版社出版)及大量的国内外参考文献,引用了全国硕士研究生入学统一考试的数学试题,特此说明.

编 者

2009年7月

# 目 录

<b>第 1 章 函数</b> .....	(1)
1.1 基本要求 .....	(1)
1.2 学习指导 .....	(1)
1-1 函数对应规则的三种形式 .....	(1)
1-2 $y=f(x)$ , $y=f^{-1}(x)$ 及 $x=f^{-1}(y)$ 的关系是什么 .....	(1)
1-3 如何围绕函数的初等运算探索函数的性质 .....	(2)
1.3 解题指导 .....	(2)
题型 1-1 求解不等式 .....	(2)
题型 1-2 确定函数的定义域 .....	(4)
题型 1-3 求可逆函数的反函数 .....	(4)
题型 1-4 求函数的复合及分析复合函数的构成 .....	(5)
题型 1-5 判断函数的几何性质 .....	(6)
1.4 知识扩展 .....	(8)
习题 1 .....	(8)
部分答案与提示 .....	(10)
<b>第 2 章 极限与连续</b> .....	(11)
2.1 基本要求 .....	(11)
2.2 学习指导 .....	(11)
2-1 对数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 定义中的 $\varepsilon, N$ 的理解 .....	(11)
2-2 变量的极限存在(或者说收敛)的几个常用条件 .....	(12)
2-3 变量的极限不存在(或者说发散)的几个常用条件 .....	(12)
2-4 收敛数列是否等同于单调有界数列 .....	(12)
2-5 数列在增加或减少或改变有限项之后是否会改变其敛散性 .....	(12)
2-6 正确使用和与积的极限运算规则 .....	(13)
2-7 注意归纳特殊函数所承载的性质 .....	(13)
2-8 如何论述数列或函数的无界性 .....	(13)
2-9 为什么说初等函数在其定义区间上连续,而不说在其 定义域上连续 .....	(13)
2-10 无界变量为何不一定是无穷大量 .....	(14)
2-11 等价代换与函数运算的关系归纳 .....	(14)
2.3 解题指导 .....	(14)
题型 2-1 依据定义或性质验证极限的存在性 .....	(14)

题型 2-2	给定通项的数列的极限计算 .....	(16)
题型 2-3	递归方式定义的数列的极限计算 .....	(17)
题型 2-4	确定无穷小量的主部 .....	(18)
题型 2-5	使用无穷小量因式替换求函数极限 .....	(19)
题型 2-6	幂指型变量 $u^v$ 的极限 .....	(20)
题型 2-7	确定函数中的待定参数问题(根据极限相关条件) .....	(21)
题型 2-8	判断函数的连续性问题 .....	(22)
题型 2-9	函数的间断点确定与类型识别 .....	(22)
题型 2-10	连续函数的介值问题 .....	(23)
题型 2-11	综合问题 .....	(25)
2.4	知识扩展 .....	(25)
习题 2	.....	(26)
部分答案与提示	.....	(29)
<b>第 3 章</b>	<b>导数与微分</b> .....	<b>(30)</b>
3.1	基本要求 .....	(30)
3.2	学习指导 .....	(30)
3-1	学习导数的重要意义 .....	(30)
3-2	几对容易混淆的导数记号 .....	(30)
3-3	在一点连续但不可导的函数 .....	(31)
3-4	一点处可导与一点附近可导的区别 .....	(31)
3-5	导数概念与微分概念的比较 .....	(32)
3-6	何时需要依据定义求函数在一点的导数 .....	(32)
3-7	复合函数导数的链法则与复合函数微分的链法则 .....	(32)
3-8	导函数的周期性与奇偶性 .....	(33)
3-9	绝对值函数的可导性 .....	(33)
3-10	由极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ 存在能否推出 $f(x)$ 在 点 $x_0$ 处可导 .....	(34)
3.3	解题指导 .....	(34)
题型 3-1	依据导数定义判定函数在某点的可导性,并计算其导数 .....	(34)
题型 3-2	由可导性确定函数中的待定参数 .....	(37)
题型 3-3	讨论导函数在某点的连续性 .....	(38)
题型 3-4	已知函数在某点的导数来计算某个极限 .....	(38)
题型 3-5	含绝对值因式的函数的可导性 .....	(39)
题型 3-6	依据求导法则和公式计算初等函数的导数 .....	(40)
题型 3-7	求反函数的导数 .....	(41)
题型 3-8	求隐函数的导数 .....	(42)

题型 3-9 求由参变量确定的函数的导数 .....	(43)
题型 3-10 求幂指函数与连续积商函数的导数 .....	(44)
题型 3-11 微分的计算与应用 .....	(44)
题型 3-12 求函数的 $n$ 阶导数 .....	(45)
题型 3-13 求相关变化率 .....	(47)
题型 3-14 导数的几何应用 .....	(47)
3.4 知识扩展 .....	(48)
习题 3 .....	(49)
部分答案与提示 .....	(53)
<b>第 4 章 微分中值定理·应用</b> .....	(55)
4.1 基本要求 .....	(55)
4.2 学习指导 .....	(55)
4-1 本章的脉络和主要思想方法 .....	(55)
4-2 拉格朗日中值公式的等价形式及意义 .....	(55)
4-3 柯西中值定理的下述证法对吗 .....	(56)
4-4 正确理解微分中值定理的条件 .....	(56)
4-5 选用微分中值定理的一般原则和思路 .....	(56)
4-6 使用洛必达法则求未定型(也称为不定式)极限时, 应注意什么问题 .....	(57)
4-7 函数的驻点与函数的极值点关系 .....	(57)
4-8 极值与最值的区别与联系是什么 .....	(58)
4-9 泰勒公式的重要性和典型用途归纳 .....	(58)
4.3 解题指导 .....	(58)
题型 4-1 函数的中值问题(或表现为方程的根问题) .....	(58)
题型 4-2 函数恒等式(或函数恒为常数)的证明 .....	(64)
题型 4-3 含中值点导数(或 $f(x_2) - f(x_1)$ )的不等式的证明 .....	(65)
题型 4-4 函数不等式 $u(x) > v(x)$ 的证明 .....	(67)
题型 4-5 求函数的泰勒展开式 .....	(70)
题型 4-6 泰勒公式用于确定无穷小量主部和导数计算 .....	(71)
题型 4-7 未定型(或不定式)的极限 .....	(73)
题型 4-8 函数单调性与凹凸性的判别 .....	(75)
题型 4-9 极值问题 .....	(78)
题型 4-10 最值问题 .....	(79)
题型 4-11 求曲线的渐近线 .....	(80)
题型 4-12 求曲线的曲率 .....	(81)
题型 4-13 函数的作图 .....	(81)
4.4 知识扩展 .....	(82)



习题 4 .....	(83)
部分答案与提示 .....	(87)
<b>第 5 章 不定积分</b> .....	(89)
5.1 基本要求 .....	(89)
5.2 学习指导 .....	(89)
5-1 在区间 $(a, b)$ 内有间断点的函数是否存在原函数 .....	(89)
5-2 如何理解公式 $\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C (x \neq 0)$ .....	(89)
5-3 如何理解计算不定积分时使用的方法不同导致的答案不一样 .....	(90)
5-4 初等函数的原函数是否还是初等函数 .....	(90)
5-5 常见的计算错误 .....	(90)
5-6 不定积分法的选择要领 .....	(91)
5-7 注意扩充基本积分表 .....	(91)
5.3 解题指导 .....	(91)
题型 5-1 用分项积分法计算不定积分 .....	(91)
题型 5-2 用凑微分法计算不定积分 .....	(92)
题型 5-3 用换元法计算不定积分 .....	(96)
题型 5-4 用分部积分法计算不定积分 .....	(98)
题型 5-5 求有理函数的不定积分 .....	(100)
题型 5-6 一题多解举例 .....	(103)
题型 5-7 分段函数的积分 .....	(106)
题型 5-8 概念与性质的综合问题 .....	(107)
5.4 知识扩展 .....	(108)
习题 5 .....	(109)
部分答案与提示 .....	(112)
<b>第 6 章 定积分</b> .....	(115)
6.1 基本要求 .....	(115)
6.2 学习指导 .....	(115)
6-1 能利用定积分概念解决问题的特点 .....	(115)
6-2 如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界, 那么 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上 一定可积吗 .....	(115)
6-3 如果 $ f(x) $ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 那么 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上 一定可积吗 .....	(115)
6-4 函数可积与存在原函数是不是一回事 .....	(116)
6-5 为什么说牛顿-莱布尼兹公式是微积分基本公式 .....	(116)
6-6 对称区间上的连续奇函数的原函数都是偶函数吗 .....	(116)
6-7 对称区间上的连续偶函数的原函数都是奇函数吗 .....	(116)

6-8	连续周期函数的原函数都是周期函数吗 .....	(117)
6-9	反常积分与定积分的关系 .....	(117)
6-10	能否将定积分中“对称性方法”用在反常积分上 .....	(117)
6.3	解题指导 .....	(117)
题型 6-1	用牛顿-莱布尼兹公式(简称 N-L 公式)计算定积分 .....	(117)
题型 6-2	用换元法求定积分 .....	(118)
题型 6-3	用分部积分法求定积分 .....	(119)
题型 6-4	求对称区间上的定积分 .....	(120)
题型 6-5	求周期函数的定积分 .....	(121)
题型 6-6	求分段函数的定积分 .....	(123)
题型 6-7	利用几个定积分公式求某些定积分 .....	(124)
题型 6-8	利用定积分求某些 $n$ 项和的数列的极限 .....	(125)
题型 6-9	求变限积分函数的导数 .....	(127)
题型 6-10	定积分等式的证明 .....	(128)
题型 6-11	与定积分有关的方程的根的存在性问题或中值问题 .....	(130)
题型 6-12	定积分不等式的证明 .....	(134)
题型 6-13	求含变限积分或定积分的极限 .....	(139)
题型 6-14	讨论变限积分函数的基本性质 .....	(141)
题型 6-15	求分段函数的变限积分 .....	(144)
题型 6-16	求解包含 $f(x)$ 的积分方程 .....	(145)
题型 6-17	求无穷区间上的反常积分 .....	(147)
题型 6-18	求无界函数的反常积分 .....	(148)
题型 6-19	求混合型反常积分 .....	(149)
题型 6-20	求平面区域的面积 .....	(150)
题型 6-21	求立体的体积 .....	(151)
题型 6-22	求平面曲线的弧长 .....	(152)
题型 6-23	定积分的物理应用 .....	(153)
题型 6-24	定积分的应用与最大(小)值相结合的问题 .....	(155)
6.4	知识扩展 .....	(156)
	习题 6 .....	(157)
	部分答案与提示 .....	(163)
<b>第 7 章</b>	<b>常微分方程</b> .....	(165)
7.1	基本要求 .....	(165)
7.2	学习指导 .....	(165)
7-1	方程分类与解法对应总览 .....	(165)
7-2	微分方程的通解、特解与奇解(奇异解) .....	(166)
7-3	如何求二阶齐次常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解 .....	(167)

7-4 如何求二阶非齐次常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=f(x)$ 的通解 .....	(167)
7.3 解题指导 .....	(167)
题型 7-1 求一阶微分方程的通解或特解 .....	(167)
题型 7-2 积分方程求解 .....	(171)
题型 7-3 高阶可降阶微分方程求解 .....	(172)
题型 7-4 二阶常系数线性微分方程求解 .....	(173)
题型 7-5 高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程的求解 .....	(175)
题型 7-6 已知微分方程的解,反求常系数线性微分方程 .....	(176)
题型 7-7 微分方程的几何应用 .....	(176)
题型 7-8 微分方程的物理应用 .....	(177)
题型 7-9 微分方程综合问题 .....	(179)
题型 7-10 变系数线性微分方程(主要是欧拉方程)的求解 .....	(180)
题型 7-11 已知微分方程的通解,求其所满足的微分方程 .....	(182)
7.4 知识扩展 .....	(183)
习题 7 .....	(184)
部分答案与提示 .....	(186)
<b>第 8 章 矢量代数与空间解析几何</b> .....	(189)
8.1 基本要求 .....	(189)
8.2 学习指导 .....	(189)
8-1 矢量与数量的比较 .....	(189)
8-2 数量积、矢量积、混合积的比较 .....	(190)
8-3 平面方程的四种形式 .....	(190)
8-4 直线方程的四种形式 .....	(191)
8-5 直线、平面间的位置关系 .....	(191)
8-6 柱面和旋转面的方程特征 .....	(192)
8-7 如何求空间点或曲线在其他图形上的投影点或投影线 .....	(192)
8.3 解题指导 .....	(192)
题型 8-1 矢量的性质与运算 .....	(192)
题型 8-2 矢量方法的应用 .....	(195)
题型 8-3 求平面方程 .....	(196)
题型 8-4 求直线方程 .....	(199)
题型 8-5 直线、平面间的位置关系 .....	(201)
题型 8-6 点到直线与点到平面的距离 .....	(202)
题型 8-7 求旋转曲面的方程 .....	(204)
题型 8-8 求空间曲线在坐标平面上的投影 .....	(205)
8.4 知识扩展 .....	(206)

习题 8 .....	(206)
部分答案与提示 .....	(210)
<b>第 9 章 多元函数微分学</b> .....	(212)
9.1 基本要求 .....	(212)
9.2 学习指导 .....	(212)
9-1 多元函数极限与一元函数极限的对比 .....	(212)
9-2 多元函数的连续与对其单个变量连续的关系 .....	(213)
9-3 在某点的连续、偏导存在、方向导数存在及可微等的相互关系 .....	(213)
9-4 任给一对连续函数 $u(x, y), v(x, y)$ , 是否一定存在函数 $z=f(x, y)$ , 使得 $z_x=u(x, y), z_y=v(x, y)$ .....	(213)
9-5 如果函数 $z=f(x, y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 都存在, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ 是否一定是函数 $z=f(x, y)$ 的全微分 $dz$ .....	(213)
9-6 条件极值与拉格朗日乘法 .....	(214)
9-7 怎样理解梯度概念 .....	(214)
9.3 解题指导 .....	(214)
题型 9-1 多元极限的存在性问题 .....	(214)
题型 9-2 连续、偏导存在、可微的判定问题 .....	(215)
题型 9-3 复合函数求导 .....	(218)
题型 9-4 隐函数求导 .....	(222)
题型 9-5 几何应用——空间曲线的切线和空间曲面的切平面 .....	(225)
题型 9-6 方向导数与梯度 .....	(227)
题型 9-7 求多元函数的(无条件)极值 .....	(228)
题型 9-8 求有界闭区域上连续函数的最大值与最小值 .....	(230)
题型 9-9 最值的应用问题 .....	(231)
9.4 知识扩展 .....	(233)
习题 9 .....	(234)
部分答案与提示 .....	(237)
<b>第 10 章 重积分</b> .....	(239)
10.1 基本要求 .....	(239)
10.2 学习指导 .....	(239)
10-1 如何在直角坐标系下将二重积分化为逐次积分 .....	(239)
10-2 在什么情况下采用极坐标代换计算二重积分 .....	(240)
10-3 如何利用对称性化简重积分 .....	(240)
10-4 如何利用几何意义与重心公式计算重积分 .....	(241)
10-5 如何在直角坐标系下将三重积分化为二重积分及定积分 .....	(242)
10-6 在什么情况下采用柱面坐标代换计算三重积分, 如何定限 .....	(242)

10-7	在什么情况下采用球面坐标代换计算三重积分,如何定限 .....	(243)
10-8	分析以下两个重积分的处理方法是否正确 .....	(243)
10-9	不绘制空间图形可否确定出三重积分依“先一后二”法的积分限 .....	(243)
10.3	解题指导 .....	(244)
题型 10-1	在直角坐标系下计算二重积分 .....	(244)
题型 10-2	在极坐标系下计算二重积分 .....	(246)
题型 10-3	结合对称性计算二重积分 .....	(248)
题型 10-4	交换积分次序或两种坐标系中的二次积分的转换 .....	(251)
题型 10-5	在直角坐标系下计算三重积分 .....	(254)
题型 10-6	在柱面坐标系下计算三重积分 .....	(255)
题型 10-7	在球面坐标系下计算三重积分 .....	(256)
题型 10-8	利用对称性计算三重积分 .....	(257)
题型 10-9	改变积分次序或坐标系计算三重积分 .....	(258)
题型 10-10	求分段函数的重积分 .....	(259)
题型 10-11	利用形心计算重积分 .....	(261)
题型 10-12	利用一般变量代换计算重积分 .....	(262)
题型 10-13	重积分的不等式或等式的证明 .....	(264)
题型 10-14	变区域重积分问题 .....	(265)
题型 10-15	重积分的几何应用举例 .....	(266)
题型 10-16	重积分的物理应用 .....	(267)
10.4	知识扩展 .....	(269)
习题 10	.....	(269)
部分答案与提示	.....	(273)
<b>第 11 章</b>	<b>曲线积分与曲面积分</b> .....	<b>(275)</b>
11.1	基本要求 .....	(275)
11.2	学习指导 .....	(275)
11-1	第一型曲线积分的计算方法 .....	(275)
11-2	第一型曲面积分的计算方法 .....	(276)
11-3	关于第一型曲线积分的对称性 .....	(276)
11-4	关于第一型曲面积分的对称性 .....	(276)
11-5	如何利用几何意义与重心公式计算第一型曲线及曲面积分 .....	(277)
11-6	将第二型曲线积分化为定积分的要点是什么 .....	(277)
11-7	如何选择第二型平面线积分的计算方法 .....	(277)
11-8	第二型空间曲线积分 $I = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L P dx + Q dy + R dz$ 的计算步骤 .....	(278)
11-9	将第二型曲面积分化为二重积分的要点 .....	(279)

11-10	两类曲面积分的关系 .....	(280)
11-11	如何将组合型的第二型曲面积分化为单一型的 第二型曲面积分 .....	(280)
11-12	如何选择第二型曲面积分的计算方法 .....	(280)
11-13	什么是有势场、无旋场、保守场、无源场、调和场 .....	(281)
11-14	关于场论的几个结论 .....	(282)
11.3	解题指导 .....	(282)
题型 11-1	第一型曲线积分的计算 .....	(282)
题型 11-2	第一型曲面积分的计算 .....	(284)
题型 11-3	第一型曲线积分与曲面积分的物理应用 .....	(285)
题型 11-4	第二型平面曲线积分的计算 .....	(286)
题型 11-5	利用曲线积分与路径无关的条件求函数 .....	(294)
题型 11-6	第二型曲面积分的计算 .....	(295)
题型 11-7	第二型空间曲线积分的计算 .....	(299)
题型 11-8	第二型线、面积分的物理应用举例 .....	(302)
题型 11-9	梯度、散度、旋度的综合计算 .....	(303)
11.4	知识扩展 .....	(305)
习题 11	.....	(307)
部分答案与提示	.....	(313)
<b>第 12 章</b>	<b>无穷级数</b> .....	(315)
12.1	基本要求 .....	(315)
12.2	学习指导 .....	(315)
12-1	在一个级数中是否可以任意添加括号(即结合律) .....	(315)
12-2	发散级数的通项是否一定不趋于零 .....	(316)
12-3	对正项级数,应如何选择适当的判别法来讨论其敛散性 .....	(316)
12-4	对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ , 是否可以说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的敛散性相同 .....	(316)
12-5	对交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n (a_n > 0)$ , 若 $a_n$ 趋于零, 但不是 单调减少的, 该级数是否就不收敛 .....	(316)
12-6	两个绝对收敛的级数之和是否为绝对收敛, 两个条件收敛的 级数之和是否为条件收敛, 条件收敛的级数与绝对收敛的 级数之和又如何 .....	(317)
12-7	如何求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛半径 .....	(317)

12-8	如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $R_1, R_2$ , 它们的和级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径一定为 $R = \min\{R_1, R_2\}$ 吗	(318)
12-9	幂级数经逐项求导或逐项积分后, 其收敛半径、收敛区间和收敛域会发生变化吗	(318)
12-10	$f(x)$ 的泰勒级数在收敛域内一定处处收敛于 $f(x)$ 吗	(318)
12-11	如何理解函数的幂级数展开式的唯一性	(318)
12-12	学习傅里叶级数的要点	(319)
12.3	解题指导	(319)
题型 12-1	计算数项级数的部分和与数项级数的和	(319)
题型 12-2	利用数项级数的性质讨论敛散性	(320)
题型 12-3	用正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的比值法或根值法判敛散	(321)
题型 12-4	使用比较判别法及其极限形式判别正项级数的敛散性	(322)
题型 12-5	使用积分判别法判别正项级数的敛散性	(324)
题型 12-6	判定变号级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (或者称为任意项级数) 的敛散性	(325)
题型 12-7	证明包含有抽象的通项的数项级数的敛散性	(327)
题型 12-8	求幂级数的收敛半径及收敛域	(328)
题型 12-9	将函数展开为幂级数	(331)
题型 12-10	求幂级数的和函数	(333)
题型 12-11	利用幂级数求数项级数的和	(335)
题型 12-12	将区间 $[-\pi, \pi]$ (或 $(-\pi, \pi], [-\pi, \pi), (-\pi, \pi)$ 等) 上的函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数	(336)
题型 12-13	将区间 $[0, \pi]$ 上的函数展开为正弦(余弦)级数	(338)
题型 12-14	将区间 $[-l, l]$ 上的函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数, 以及将区间 $[0, l]$ 上的函数 $f(x)$ 展开为正弦(或余弦)级数	(340)
题型 12-15	求 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数 $S(x)$ 或和函数 $S(x)$ 在某点处的值	(341)
12.4	知识扩展	(342)
习题 12		(343)
	部分答案与提示	(346)

# 第 1 章 函 数

## 1.1 基本要求

1. 理解函数的概念.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 了解反函数的概念,理解复合函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 学会建立简单实际问题中的函数关系式.

## 1.2 学习指导

### 【1-1】 函数对应规则的三种形式

函数是本课程的研究对象,其表现形式值得关注.函数定义中对应规则  $f$  有三种常见形式,其特点各异,分别叙述如下.

(1) 解析式 由数学运算和初等函数构成的对应方式.例如:

$$f(x) = x + \sin x^2; \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0; \end{cases} \quad f(x) = (x + \sin x^2)';$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t} dt; \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^n}; \quad f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

以上都是最普遍的函数形式,解析式的优点在于表达的意义准确,便于演算和理论研究.

(2) 几何式 在直角坐标系中,用动点  $(x, f(x))$  形成的几何图形来表达函数  $f$  的对应关系.例如,一元函数  $y = \sin x$  的几何图形如图 1-1 所示.

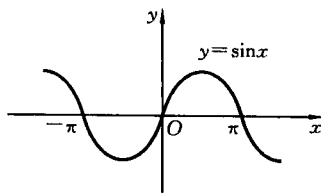


图 1-1

几何式的优点在于能够直观地表现函数的重要属性.像极值、单调性、周期性和奇偶性均能从图形上一目了然,便于理解.

(3) 表格式 通过表格中的行或列表现自变量所取的值与因变量所取的值的对应关系.在函数应用问题中常常采用表格式,如在中学用过的平方根表、对数表等,其优点在于无须计算,直接得到函数的取值.当然,由于表格的容量有限,仅适合于自变量取值为有限数集的情形.

### 【1-2】 $y=f(x)$ , $y=f^{-1}(x)$ 及 $x=f^{-1}(y)$ 的关系是什么

$y=f(x)$  与  $x=f^{-1}(y)$  互为反函数,在同一个坐标系下,它们的图形相同.因为对曲线  $y=f(x)$  上的任意一点  $(a, b)$ , 有  $b=f(a)$  成立,即  $a=f^{-1}(b)$ , 这说明点  $(a, b)$  也在



曲线  $x=f^{-1}(y)$  上.

$x=f^{-1}(y)$  与  $y=f^{-1}(x)$  是同一个函数, 因为它们的定义域、对应法则及其值域均未改变, 只是变量的符号变了. 但在同一个坐标系下, 它们的图形关于直线  $y=x$  对称. 因为对曲线  $x=f^{-1}(y)$  上的任意一点  $(a, b)$ , 有  $a=f^{-1}(b)$  成立, 这说明点  $(b, a)$  在曲线  $y=f^{-1}(x)$  上, 而点  $(a, b)$  与点  $(b, a)$  恰好关于直线  $y=x$  对称.

### 【1-3】 如何围绕函数的初等运算探索函数的性质

函数的初等运算是指加、减、乘、除、复合和求反函数的操作. 通过对给定的函数作初等运算, 能够构建一系列新的函数. 新构建函数是否继承原有函数的性质是一个经常考虑的问题, 以下是几个典型的例子.

(1) 如果函数  $y=f(x)$  有反函数  $y=g(x)$ , 那么当  $f(x)$  依次是奇函数、单调增加函数时, 反函数  $g(x)$  是否也依次是奇函数、单调增加函数?

(2) 如果函数  $y=f(x)$  与函数  $y=g(x)$  依次均是奇函数、偶函数、单调增加函数, 那么它们的和  $f(x)+g(x)$  与积  $f(x)g(x)$  是否也依次是奇函数、偶函数、单调增加函数?

(3) 如果函数  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  的导数(极限、积分)能够求得, 那么如何计算由它们构建的函数的导数(极限、积分)? 这一类问题实际上涉及导数(极限、积分)的计算规则, 是微积分的主要内容.

(4) 如果  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  均为连续函数, 那么它们经初等运算后是否还是连续函数? 这一类问题的回答便是第 2 章中的一些重要结论.

在大学阶段的学习中, 培养学生学习的主动性和研究性比掌握和理解知识更为重要. 而主动性和研究性的习惯是在一门一门课程学习过程中, 在一个个小问题的求解中逐步养成的. 希望读者在学习过程中变被动为主动, 多探索, 常质疑, 使自己的提问能力和研究能力得到提升.

## 1.3 解题指导

### 【题型 1-1】 求解不等式

应对 初等数学课程中介绍过解不等式的各种方法. 例如, 判定一元多项式  $p(x)$  符号的“符号法”(  $p(x)$  在偶次重根两侧同号, 奇次重根两侧异号); 分式不等式  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  或不等式  $f(x)g(x) > 0$  的“转换法”; 含绝对值不等式的“分析法”; 以及具备普遍意义的“函数图像法”; 等等. 本课程中, 解不等式是一个基本要求(如确定定义域, 判定函数的单调性、凸凹性等问题中都需要), 所以必须熟练掌握.

例 1-1 解下列函数不等式:

$$(1) (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \geq 0; (2) \frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0; (3) \log_{1/e} \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 1.$$

解 (1) 这是多项式函数不等式, 三个实根分别是  $x=1, 2, 3$ . 如图 1-2 所示, 在坐