经典教材辅导·数学

微积分学同步辅导

华中科技大学微积分课题组

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

经典教材辅导用书·数学类丛书

微积分学同步辅导

华中科技大学微积分课题组编

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

微积分学同步辅导/华中科技大学微积分课题组编.—武汉:华中科技大学出版社,2009年9月
ISBN 978-7-5609-5683-1

Ⅰ.微… Ⅱ.华… Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第159730号

微积分学同步辅导 华中科技大学微积分课题组编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:王汉江 封面设计:潘　群
责任校对:李　琴 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:22.75 字数:476 000
版次:2009年9月第1版 印次:2009年9月第1次印刷 定价:36.50元
ISBN 978-7-5609-5683-1/O·505

内容提要

本书是依据高等数学教学基本要求，为了帮助学生深入学习微积分学(或高等数学)知识而编写的一本辅导教材.每章内容包括基本要求、学习指导、解题指导、知识扩展、练习题及部分答案与提示.

本书侧重于对学生学习过程中常见的疑难问题以问答方式进行剖析解答，对典型题型的解题方法和策略进行归纳总结，选题范围广、梯度大，注重基础性与综合性相结合，例题分析新颖、易懂，尽可能一题多解，注重归纳与提高.不少内容是作者长期教学经验的总结.阅读此书，必将加深对概念、理论的理解，开阔解题思路，提高分析问题、解决问题及应试的能力.

本书适合正在学习或复习高等数学的学生使用，对备考研究生的学生是一本很好的参考书，同时也可以作为教学参考书和习题课教材.

前　言

本书是为正在学习微积分学(或高等数学)课程的大学本科生编写的一本同步辅导书. 它可作为习题课教学参考教材,也适合于复习高等数学课程,同时,还可以作为备考研究生数学考试的参考书.

本书内容紧扣教学大纲和考试大纲,编排次序与教学实际一致. 内容包括函数、极限与连续、一元微积分、无穷级数、矢量与空间解析几何、多元微积分、微分方程.

本书以章为基本单位,每一章分为四个部分:基本要求、学习指导、解题指导和知识扩展. 各部分的编写特点如下.

基本要求　列举教学大纲规定的教学要求.

学习指导　点拨重要的知识点,归纳概念或结论之间的内在关系,解答学习过程中常见的疑难问题.

解题指导　按照典型题型来介绍解题方法和策略,以提高学习的效率. 在典型题型中通过若干例子来介绍解题方法和策略的应用. 例题选择在确保基本知识的基础上,注重启发性和综合性. 例题解答注重分析和引导,详细易懂.

知识扩展　提供了适当的相关知识和结论.

学习数学的有效方法便是做题. 为了检验解题能力,书中提供了相应的习题. 这些练习分为 A、B 两类,供不同要求的读者使用.

本书由华中科技大学数学与统计学院微积分课程组组织编写,参编人员有毕志伟、何涛、金建华、罗德斌、刘蔚萍、梅正阳、王德荣、吴洁、俞小清、周军等. 统稿工作由毕志伟和吴洁负责.

在本书编写过程中参考了原课程组编写的《微积分学习题课教程》(华中科技大学出版社出版)及大量的国内外参考文献,引用了全国硕士研究生入学统一考试的数学试题,特此说明.

编　者

2009 年 7 月

目　录

第 1 章 函 数

1.1 基本要求

1. 理解函数的概念.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 了解反函数的概念,理解复合函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 学会建立简单实际问题中的函数关系式.

1.2 学习指导

【1-1】 函数对应规则的三种形式

函数是本课程的研究对象,其表现形式值得关注.函数定义中对应规则 f 有三种常见形式,其特点各异,分别叙述如下.

(1) **解析式** 由数学运算和初等函数构成的对应方式.例如:

$$f(x)=x+\sin x^2;\quad f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0;\end{cases}\quad f(x)=(x+\sin x^2)';$$

$$f(x)=\int_0^x\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t;\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^n};\quad f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots.$$

以上都是最普遍的函数形式,解析式的优点在于表达的意义准确,便于演算和理论研究.

(2) **几何式** 在直角坐标系中,用动点 $(x,f(x))$ 形成的几何图形来表达函数 f 的对应关系.例如,一元函数 $y=\sin x$ 的几何图形如图 1-1 所示.

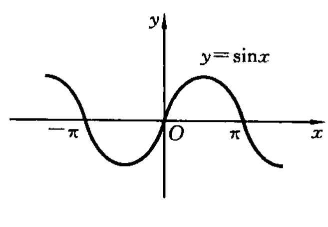

图 1-1

几何式的优点在于能够直观地表现函数的重要属性.像极值、单调性、周期性和奇偶性均能从图形上一目了然,便于理解.

(3) **表格式** 通过表格中的行或列表现自变量所取的值与因变量所取的值的对应关系.在函数应用问题中常常采用表格式,如在中学用过的平方根表、对数表等,其优点在于无须计算,直接得到函数的取值.当然,由于表格的容量有限,仅适合于自变量取值为有限数集的情形.

【1-2】 $y=f(x)$,$y=f^{-1}(x)$ 及 $x=f^{-1}(y)$ 的关系是什么

$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数,在同一个坐标系下,它们的图形相同.因为对曲线 $y=f(x)$ 上的任意一点 (a,b),有 $b=f(a)$ 成立,即 $a=f^{-1}(b)$,这说明点 (a,b) 也在

曲线 $x=f^{-1}(y)$ 上.

$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 是同一个函数,因为它们的定义域、对应法则及其值域均未改变,只是变量的符号变了.但在同一个坐标系下,它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.因为对曲线 $x=f^{-1}(y)$ 上的任意一点 (a,b),有 $a=f^{-1}(b)$ 成立,这说明点 (b,a) 在曲线 $y=f^{-1}(x)$ 上,而点 (a,b) 与点 (b,a) 恰好关于直线 $y=x$ 对称.

【1-3】 如何围绕函数的初等运算探索函数的性质

函数的初等运算是指加、减、乘、除、复合和求反函数的操作.通过对给定的函数作初等运算,能够构建一系列新的函数.新构建函数是否继承原有函数的性质是一个经常考虑的问题,以下是几个典型的例子.

(1) 如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=g(x)$,那么当 $f(x)$ 依次是奇函数、单调增加函数时,反函数 $g(x)$ 是否也依次是奇函数、单调增加函数?

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=g(x)$ 依次均是奇函数、偶函数、单调增加函数,那么它们的和 $f(x)+g(x)$ 与积 $f(x)g(x)$ 是否也依次是奇函数、偶函数、单调增加函数?

(3) 如果函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的导数(极限、积分)能够求得,那么如何计算由它们构建的函数的导数(极限、积分)? 这一类问题实际上涉及导数(极限、积分)的计算规则,是微积分的主要内容.

(4) 如果 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 均为连续函数,那么它们经初等运算后是否还是连续函数? 这一类问题的回答便是第 2 章中的一些重要结论.

在大学阶段的学习中,培养学生学习的主动性和研究性比掌握和理解知识更为重要.而主动性和研究性的习惯是在一门一门课程学习过程中,在一个个小问题的求解中逐步养成的.希望读者在学习过程中变被动为主动,多探索,常质疑,使自己的提问能力和研究能力得到提升.

1.3 解题指导

【题型 1-1】 求解不等式

应对 初等数学课程中介绍过解不等式的各种方法.例如,判定一元多项式 $p(x)$ 符号的"符号法"($p(x)$ 在偶次重根两侧同号,奇次重根两侧异号);分式不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 或不等式 $f(x)g(x)>0$ 的"转换法";含绝对值不等式的"分析法";以及具备普遍意义的"函数图像法";等等.本课程中,解不等式是一个基本要求(如确定定义域,判定函数的单调性、凸凹性等问题中都需要),所以必须熟练掌握.

例 1-1 解下列函数不等式:

(1) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\geqslant 0$; (2) $\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$; (3) $\log_{1/e}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)>1$.

解 (1) 这是多项式函数不等式,三个实根分别是 $x=1,2,3$.如图 1-2 所示,在坐