



数学教育研究基础丛书

Fundamental Series for Mathematics Educational Studies

顾泠沅 / 主编

鲍建生 周 超 / 著

数学学习的 心理基础与过程

Psychological Basis and Process of Mathematics Learning

上海教育出版社



数学教育研究基础丛书

Fundamental Series for Mathematics Educational Studies

顾冷沅 / 主编

鲍建生 周 超 / 著

数学学习的 心理基础与过程

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学学习的心理基础与过程/鲍建生,周超著. —上海:
上海教育出版社, 2009.10
(数学教育研究基础丛书; 2)
ISBN 978-7-5444-2498-1

I.数... II.①鲍...②周... III.数学-学习心理学-研究
IV.G447

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第178761号

数学学习的心理基础与过程

鲍建生 周超 著

上海世纪出版股份有限公司出版发行
上海教育出版社

易文网: www.ewen.cc

(上海永福路123号 邮政编码: 200031)

各地新华书店经销 苏州望电印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 25 插页 2

2009年10月第1版 2009年10月第1次印刷

印数 1~5,000本

ISBN 978-7-5444-2498-1/O · 0115 定价: 52.00元

(如发生质量问题, 读者可向工厂调换)

丛书序

—

2004年元宵刚过,十多位数学教育方向的年轻博士,聚集在上海市教育科学研究院。他们中有华东师范大学王建磐校长和我所带的五届学生,还有北京师范大学林崇德的学生、香港大学梁贯成的学生等。久未谋面,话题特别多,谈得最集中的是数学教育研究中的问题与困惑。整个白天谈不完,晚上移师瑞金宾馆再继续,而且还邀请了我的两位同事与朋友——上海市教科院教师发展中心主任周卫和上海市教育报刊总社副社长陈亦冰。真是一个令人难忘的夜晚,就在那天,大家不约而同地意识到,年轻人重任在肩,群策群力编撰一套数学教育基础研究丛书,条件似已初具,于是策划了一个初步的方案。此后每年有一或两次碰头,分工有所调整,人员不断扩大。但编著原则不变:不求急就,力戒浮躁,成一本,出一本。四五年过去了,当可逐一考虑出版。

其实,这也是我们这一代人的一个企盼。我从大学数学系毕业,后来主持青浦教育改革实验,做到1987年,国家教育委员会要我攻读研究生,名为在职读书,实为补上教育基本理论这一课。当时全国没有数学教育的博士点,我的导师刘佛年校长召集华东师范大学不同系所的六位著名教授联合培养,可是,全程六年就是没有数学教育的课程。1999年,王建磐校长邀我合作创建数学教育的博士方向,设置课程与教学论专业,全国招生,至今已满十届。平心而论,我们藉以培养学生的数学教育内容,虽有初步框架,但仍然是数学与教育学、心理学的“领养儿”,尚无自己的独立品格。这是个跨世纪的期待。如今一批年富力强的精英,志愿自己组织力量来打造研究的基础,当然是件特别有意义的事情。于是我建议,这套丛书要由“1960后”的中青年人来担纲,理由是只有他们才有15年至30年的时间来初成并打磨出自己的力作。

—

17世纪中叶,夸美纽斯号召“把一切事物教给一切人”,他的百科全书式的教材——《世界图解》,包括自然、人类活动、社会生活和语言文字诸方面,还没有独立成科的数学。数学成为普通学校的一个科目,那是18世纪的事。因此不少学者以为,严格地说学校数学教育萌芽于18世纪。究其内容,仍沿袭古希腊以来重视“和行动没有关系的真科学”(如数论和抽象的几何学)的传统,几何学就是欧几里得《几何原本》的最初六卷,代数学和三角限于17世纪前材料的简缩。这一现象一直延续到19世纪之末,随着近代科学的迅速崛起和各国产业革命的深远影响,数学教育才有了迟来的觉醒。

20世纪的数学教育风云迭起。回望这一百年,首先是出现所谓改造运动,冲破以往数学教育纯粹理性的象牙之塔,倡导应用的特别重要性。1901年,彼利(J. Perry)在英国科学协会作“启蒙的改造”的演讲,主张由实践发现数学的法则,不光是说些教授的技巧。几乎与此同时,克莱因(F. Klein)在自然科学会议席上作“对于中学数学和中学物理的注意”的演讲,推动了德国的新主义数学并形成“梅兰要目”;慕尔(E. Moore)在美国数学年会上发表“数学之基础”的会长演讲,指责初等数学范围内“理论和应用的划界分疆”,提出数学教育的根本问题是两者的“融合”,使数学、物理和日常生活有密切的关系。这场运动开启了将数学教育作为研究对象的思想闸门。然而,紧接着的是两次世

界大战的相继爆发,战争带来了混乱,刚开始发生变化的数学教育,有的搁置了,有的后退了,当然也有像美国那样受战争影响小,可收渔翁之利、得以继续推进的。当时教育界所谓传统派与现代派、接受式学习与活动式学习的激烈争论,对于美国数学教育的实用主义倾向起了推波助澜的作用。

接着,到了 50—60 年代,由于苏联人造卫星上天,引起了美国的教育改革,首当其冲的是数学教育,这就是遍及欧美诸国的新数学运动,推行数学教育的现代化。其中布鲁纳(J. Bruner)主张任何年龄的儿童都能学会任何深奥的学问,只要加以针对性的处理。改革中采纳了现代纯数学高度抽象和形式化的许多特点,例如小学引入集合,初中讲代数结构与逻辑结构,线性代数取代解析几何,再对微积分作形式改造等,几乎完全忽视对数学应用的考虑;方法上沿袭当时工业界用于技术开发的模式,先由专家学者研发然后自上而下推行,这样的变动严重脱离儿童的认识实际和常态的学校生活,既缺乏广大家长的支持,又没有必要的师资准备,结果陷入困境。整个 70 年代,世界各国纷纷处于回到基础的调整阶段。

最后,进入 80—90 年代,数学教育改革重又蓬勃发展起来,这一浪潮以学生学习数学为立场,关注课程内容、教师培养和教学研究、课堂情境及其相互影响,主要有问题解决、非形式化和大众数学等口号的提出,还有计算机和计算器的使用。改革又一次点燃争论,比如美国教育界的“数学大战”。数学的学习,走问题化之路,还是结构化之路;要学习的过程,还是要学习的结果;浪漫的合情推理与严格的逻辑演绎、探究学习与基本训练,等等。直到 20 世纪末,争论才以调和的方式告一段落,叫做平衡基本技能、概念理解和问题解决。2008 年 4 月,美国“国家数学咨询委员会”公布《成功需要基础》的总结性报告,重申基础的重要性,提倡“阶梯式”进步的理念。

在我国,学校普遍开设数学课程,当在辛亥革命(1911 年)之后,至今也是一百年。开始时移学日本,后曾模仿美国。新中国成立之初,基本上照搬苏联。后来经过 50—60 年代的大跃进和调整巩固,60—70 年代的“文革”和拨乱反正,直到始于 20 世纪 70 年代末的改革开放。数学教育的撞击和动荡随处可见,其中有活跃也有纷乱,有繁荣也显无力,思想多元了,观点分歧了,但这正是时代复兴的伟大征兆,这正是诞生适合自己的数学教育之路的前夜。

三

我国学者关于数学教育的早期研究,不能不关注陈建功先生的“20 世纪的数学教育”一文(原载《中国数学杂志》第一卷第二期,1952 年)。该文提出了支配数学教育目标、材料和方法的三大原则,他写道:(1)实用性的原则,数学在日常生活有广泛的实用价值,自然科学、产业技术、社会科学的理解、研究和进展都需要数学。假如数学没有实用,它就不应该编入教科书之中。(2)论理的原则,数学是由推理组成的体系,推理之成为说理体系者,限于数学一科。忽视数学教育论理性的原则,无异于数学教育的自杀。(3)心理的原则,站在学生的立场,顺应学生的心理发展去教学生,才能满足他们的真实感。学生不发生任何真实感的教材,简直没有教育的价值。而且提出三原则必须统一,心理性和实用性应该是论理性的向导;选择教材不应该先将实用性和论理性分别采取,然后合拢,数学的真理性具有向实在进展和内部对应联系的两面,两面不会分道扬镳、各自存在。据此三原则,陈先生评述了 20 世纪以前数学教育偏重理论、排斥应用的弊病,肯定了 20 世纪初彼利等改造运动的重要意义。更为有趣的是,这一世纪后来相继出现以结构主义为特征的新数学运动和站在学生学习立场的第三波浪潮,竟然都是三原则的各自倚重和摇摆,而最终却都以平衡各方为结局。

把数学教育作为一种理论来研究,荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔(H. Freudenthal)在国际上作出了重大贡献。他于 1967 年至 1970 年间任国际数学教育委员会(ICMI)主席,在他倡议下召开了首届国际数学教育大会。他认为,数学源自常识,人们通过自身的实践与反思,把这些常识组织起来,不断在横向或纵向上系统化。因此,他提出数学学习主要是如前所说的“数学化”,或者是进行

“再创造”，从而培养学生自己获取数学的态度，构建自己的数学。弗赖登塔尔从数学发生发展的特有过程出发，架设了一条通往教育的桥梁。1987年冬，他曾应邀来华讲学。他的《作为教育任务的数学》一书和许多独特而深刻的见解，在我国广为传播。与数学家迥然不同，心理学与现代认知理论却以精密研究的姿态介入到数学学习的探讨中来，从行为分析到认知理论，从建构主义到情境学习，视角新颖，有的还切中当今数学教育的流弊，一时间如异军突起，影响颇深，推动了数学教育科学化的进程。但是，科学方法对人的心理研究毕竟处于比较肤浅的程度，一旦用于数学，显见其琐碎与凌乱。学习的理论与数学教育的现实，还是一个未曾跨越的缺口，基础演绎的数学教育研究尚在起始阶段。与此同时，致力于扎根、总结、归纳、借鉴乃至升华的事情尤须实实在在地做。于是，凭借教育工作领域严格分门别类的研究骨架终于被多数人接纳。20世纪80年代美国凯伦(T. Kieren)的“数学教育研究——三角形”一文也被介绍到我国，他把数学教育研究比作一个三角形，三个顶点分别是课程设计者、教师和学生，对应着课程、教学和学习“三论”；三角形的内部以儿童和成人实际学习数学的经验为兴趣中心，包括① 数学教师在备课、教学和分析课堂活动时所做的非正式研究，② 定向观察，③ 教学实验；三角形的外部有数学、心理学、哲学、技术手段、符号语言等很多方面。这一图式在数学教育理论框架的初建中影响较大，但它显然并不仅仅适用于数学教育，而是属于通式的分类。

就数学学科本身的特点来说，中西方的差别也非常值得注意，这对中国特色的数学教育理论不可或缺。吴文俊先生在20世纪80年代发表了《对中国传统数学的再认识》、《出入相补原理》等多篇文章，明确指出：以《几何原本》为代表的欧几里得体系，着重抽象概念与逻辑思维以及概念与概念之间的逻辑关系，表达形式由定义、公理、定理、证明构成；而我国的传统数学，以《九章算术》为例，基本上是一种从实际问题出发，经过分析提炼出一般的原理、原则与方法，以最终达到解决一大类问题的体系。吴先生所说的两种思维各具特色，一直发展到当代公理化与算法化的两大分野。两种思维、两大分野的融会，也许能为数学教育新体系的建立提供思路。看来我们对中华文化中的精华还是不能妄自菲薄的。

四

然而，中国文化绝非仅执实用一端，而是讲求明体达用，体用一源。这里的“体”是个相对稳定且一以贯之的系统，而“用”则随时随物而变具有区别对待的特性。西方人侧重达用，中国人素好明体。与欧美学者接触，他们讲区别，我们说求同；他们讲变易，我们说万变不离其宗；他们赞赏不同意见和对立，我们崇尚中和与圆融；他们善用形式逻辑，我们喜好辩证思维。如此巨大的文化差别，在世纪之交竟以“悖论”的形式呈现了一个国际关注的热点：华人如何学习数学。20世纪80年代以来，一方面，中国学生无论在数学测试的国际比较，还是奥林匹克数学竞赛中，表现都优于西方学生；另一方面，许多西方研究者认为，中国学生的学习环境不太可能产生好的学习，比如教师单一讲授、低认知水平的频繁考试等，被形容为被动灌输和机械训练。这种看似矛盾的结果引出了深入的讨论，有的认为是由于有好的课程，有的认为是由于教师的有效教学，关注扎实的基础知识和基本技能的学习，也有的认为这是华人家庭、社会特有的包括考试在内的文化支撑。个中原因，还在进一步的研究中。

这里，我们不妨从另一角度去看看，前面说到美国《成功需要基础》的总结报告，它针对美国数学教育重点不清、逻辑关系不明等要害，在改进的要点中强调重点突出、基础扎实、前后连贯这三条，其中国文化元素的浓重色彩，当是不言自明的。事实上，我国的百年数学教育，尤其是新中国成立以来，经历正面如传统经验的深厚积淀，反面如“文革”的一时劫难，再加上最近30年来的改革开放，吸纳世界上各种先进的教育理念与精神，在整个“正反合”的洗礼中，中国数学教育改革取得的

如下原则是宝贵的：第一是兴趣与爱好，没有兴趣没有学习，不讲致用、缺乏责任难有好的数学学习。第二是循序渐进的儒家文化，数学教学尤其要讲究有层次推进的中国理念，这已被境内外广泛推崇。第三，实践和探索中的感悟，尤其是数学活动经验中的学习、数学思想方法的累积，这是实践型、创新型人才培养的途径，但这一条正是我国数学教育的软肋，进一步的改革却要在这方面苦意极思、痛下工夫。第四，反省和反馈，作为掌握知识技能、激励信心和创造精神的有力保障，已成为反思文化的重要组成部分。

五

一种文化有了深厚的根，才能吸收外来文化。无根而移用，屡试屡挫。今天，世界的数学教育不能不包括中国的数学教育，并作为其发展的重要的组成部分；我们也应把我国数学教育的基础研究与发展置于全球数学教育的视野之中。在策划并撰写本套丛书的时候，大家都清醒地意识到这一点。这件事要真正做到家，恐怕需要几代人的努力。我们这一代人，不过是铺路的石子，中青年学者来日方长，分步走是个办法。首先尽量翔实地收集国际、国内数学教育研究的有关资料、基础性观点和重要样例；然后是在枚举基础上的分类与梳理，逐步做到明源头、辨流派，适当附以评论；完成了这两步之后，才是力图形成一定的体系，抒发著者的独立见解。整个丛书的编撰过程，本身就是个完整的研究过程。现在付梓的几本，也许仅是属于开头一两步的初成之作。在此，我代表著者诸君，诚恳地希望读者阅读后多提意见，以备日后进入后两步时采纳。在这里，我想所谓好的研究者，应该是这样的人，他用自己的脚走别人没有走过的路，而平庸的研究者不仅走现成的路，而且永远拄着别人的拐杖。

最后，本丛书的编撰，各位中青年学者、教授在繁忙的工作之余付出了艰辛的劳动，他们常常夜以继日地写作，每年还要挤出时间认真参加丛书碰头会，为此，对他们表示深深的谢意。还要感谢上海市教育科学研究院的杨玉东博士在联络各位著作者中所做的出色工作，感谢上海教育出版社王耀东、刘懿和赵海燕三位对出版本丛书的支持和指导，使本丛书得以呈现在广大读者面前。

顾冷沅
2009 年新春

走进课堂

——关于数学学习理论研究的几点思考

三十年前,教育工作者们很少关注认知科学家的工作,在认知科学研究的初期,研究者们的工作是远离课堂的.今天,认知研究者们更多的是与教师合作,在真实的课堂情景中检验和改进他们的理论,因为在教室里,他们才能看到不同的课堂情境和不同的课堂交往是如何影响他们的理论在课堂中的应用的.

引自《人是如何学习的》(布兰思福特等著,2002)

1976年,在德国卡尔斯鲁厄市举行的第三届国际数学教育大会(International Congress on Mathematical Education,简称 ICME 3)上成立了国际数学教育心理学组织(International Group for the Psychology of Mathematics Education,简称 PME).这虽然不能标志着一个学科的新生,但至少从那以后,数学教育心理学就成为数学教育研究领域最活跃的部分之一.

在2002年出版的一本纪念英国数学教育心理学家斯根普(Richard R. Skemp)的文集(Tall & Thomas, 2002)中,著名数学教育心理学家斯法德(Anna Sfard)对斯根普的评价是:

他走进的是一片荒地,而他留下的却是一座宏伟的建筑.

这预示着,在这短短的三十年间,数学教育心理学已经有了巨大的变化.在写作这本书的初期,作者曾经试图去梳理学习理论的源与流,描绘数学学习心理研究的宏伟蓝图.虽然也为此整理了大量的资料,但最终还是放弃了这个念头.这不仅是因为受到作者能力的限制,还因为学习理论的流派众多、纵横交错,许多理论一旦渗入到学科领域(如数学)的深处,往往就变得界线模糊.取而代之的是把自己在梳理过程中一些思考,用“代序”的形式与读者交流.

通过跟踪三十年的 PME 研究,我们可以感觉到数学学习理论的一种发展趋势.简单地说,就是越来越关注数学课堂,关注教与学中的实际问题.这也就成了我们写作这本书的一个基本的指导思想.因此,在这本书中,我们不太关心学术流派上的纷争和名词术语上的差异,而侧重于探讨,如何通过研究去解决数学学习过程中的一些基本问题.

1 数学学习理论研究的基本问题

就一般学习理论而言,有许多相关的名称,如教育心理学、教学心理学、教与学的心理学、学与教的心理学,以及目前流行的学习理论.顾名思义,这些说法虽然在研究重点和范围上有些差异,如有的侧重于一般的心理特征,有的与学科内容的联系比较密切;有的更为关注教的层面,有的则聚焦于学的过程;等.但它们都要回答:什么是学习理论研究的基本问题?

对于上述问题的回答,一般有纵横两条线索.从横的方向看,涉及以下几个方面:

- 学习的实质,有机体是如何获得个体经验的?
- 学习的结果,学习要使学生头脑中形成什么?
- 学习的过程,学生头脑中进行怎样的加工活动才能实现学习的结果?
- 学习的规律与条件,要顺利完成学习需要哪些条件?

从纵的方向看,则包括以下几个环节:

- 知识,包括知识的类型,如安德森(Anderson, 1994)分为陈述性知识与程序性知识;
- 知识的获得,不同类型的知识有不同的获得途径;
- 迁移与问题解决,即如何将获得的知识运用于新的情境;
- 元认知,即如何对自己的认知活动进行监控与调节;
- 情感与态度,包括兴趣、信念、喜好等。

近年来,随着“走进课堂”的呼声,学习理论更为关注学校环境下,针对某个特定学科的学生的学习过程。如杜纳凡等人(Donovan, et al., 1999)认为,现代学习理论的研究应该聚焦于以下几个问题:(1) 学生在进入课堂之前,已经拥有了哪些自然概念,这些概念会对学生的学习产生哪些影响?(2) 要发展某个学科领域的能力,学生必须具备哪些学科知识,如何帮助学生形成学科的理论框架?(3) 如何帮助学生掌握解决学科问题的基本策略,以及对问题解决过程的自我监控与调节策略?

在数学学习理论的研究中,一般也都遵循上述两条思路,但由于数学的学科特征,在说法上有一些差异。如基尔派特里克等人(Kilpatrick, et al., 2001)认为,数学学习的主要研究对象是:(1) 概念理解,包括对数学概念、运算和关系的理解;(2) 技能习得,包括技能灵活性、准确性、有效性和适切性;(3) 问题解决,包括形成问题、表征问题和解决问题的能力;(4) 数学推理,包括逻辑思维、反思、阐释与决策;(5) 信念与态度,包括对数学和数学学习的态度,及对自身效率的信念等。

基尔派特里克等人的上述理论框架,可以说代表了目前数学教育界的主流看法。不论是TIMSS、PISA等国际性的研究项目,还是美国NAEP、NCTM和加州的数学课程标准,其研究的框架都大同小异。其中,特别是美国加州的数学课程标准,把概念理解、技能习得与问题解决作为数学学习的核心内容,提出“要保持概念理解、技能习得与问题解决三者之间的平衡”。

在写作本书时,我们基本上采用了基尔派特里克等人的观点,由此也就形成了数学学习理论的研究框架,见图1。

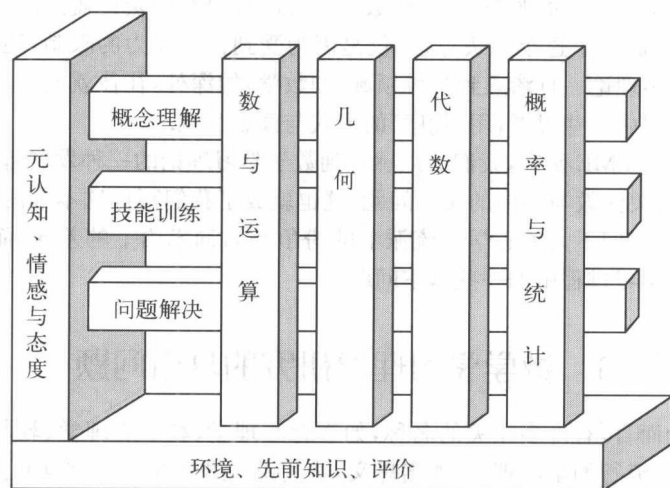


图1 数学学习理论的研究框架

在上述研究框架中,处于核心位置的是中间的三横四纵,它们形成了中小学数学学习的基本问

题.而对这些基本问题的研究,自然也离不开元认知、情感与态度以及环境、评价等因素的支撑.需要说明的是,构建上述的框架主要是为了研究的方便,在实际的教学中,各种因素往往是相互交融,共同产生影响的.

2 数学学习理论的研究风格

数学学习理论属于数学、心理学和教育学的交叉研究领域,但这三者在研究风格上有较大的差异.数学强调的是严格的、形式化的逻辑论证,一个新的结果,不论它是如何被发现的,只有通过数学论证才能得到别人的认可;心理学看重的是实验的规范性和科学性,实验的程序、工具及观察的方法都将影响到实验结果的精确程度;而在教育学中,既不能像数学那样进行严谨的逻辑推理,也不能像心理实验那样可以复制科学实验,因此,教育的研究结果容易受到人们的质疑与否定.

斯法德(Sfard, 1998)曾经对以色列的一位著名数学家阿米苏(Shimshon Abraham Amitsur)教授进行过一次访谈.自20世纪50年代的后期,阿米苏教授就开始活跃于数学教育领域.我们这里感兴趣的是下面几段对话(其中,S代表斯法德,A代表阿米苏教授):

S: 您是否在数学教育的研究里发现任何东西可称为结论? 数学教育的研究者是否有些东西让您觉得眼界打开,学到一些新的东西?

A: 我认为几乎没有.我说“几乎”是因为可能发生过一两次.我现在不记得了,我猜我确实从那文章中获得一些概念,否则我不会注意到此.那些概念冲击到我平常的思维.但问题是,大部分研究无法让我学到任何东西,这是我不能忍受的.

在我眼中,研究数学教育的主要原因——在此观点之下,数学教育非常不同于科学教育——是因为数学思维是唯一的、独特的,且与其他的思维方式不同.虽然大部分的人都认为它与科学思维相同,但它在本质上与科学思维是不同的.数学思维是唯一完全抽象、非实验的.当你在作数学教育研究的时候,你不会知道你会得到什么.探讨这样特殊的思维方式当然是一件值得努力以赴的事.

S: 我们都知道,在大学里“数学教育研究”未被视为学术上的学问,被认为离真实科学尚有段距离.在许多数学家的眼中也是如此.这种看法是否被验证过呢? 有任何事能证明它吗?

A: 要强化数学教育研究的地位,必须证明它是有用的,这个证明的责任必须由研究者担负.它们必须显示他们用数学思维的理论能使人信服地说明所观察到的现象.只有在它们能证明这样的理论时,数学教育才会被认为是学术上的学问,不会提早一天.

S: 虽然很困难,我希望您能说明当您要求“有用”,在您心中所想的是什么? 总而言之,数学家与数学教育研究者当他们声称证明了某事,在他们心中所想的是十分不同的事情.我可以想象当一个数学教育研究者对您说:“我想我证明了这个、那个,这是证据.”而您会说,他所谓的证据不能说服您.

A: 如果遗失了某些重要的部分,我不会接受它(这经常发生).如果只是证明某个现象的存在,对我而言,这是不够的.我想知道能够做什么改变这一现象.仅仅说:“这是事实,学生不了解此课题.”不是我要的.我不希望被研究者告知某个课题是不可学习的.

阿米苏教授的上述说法虽然让我们这些从事数学教育研究的人感到难堪,但这也是我们不得不面对的事实.在教育领域,什么样的研究才是有用的? 什么样的研究成果才是有价值的? 什么样的论据才是可靠的? 什么样的研究方法才是有效的? 等等.这些关系到生死存亡的问题,近年来已经引起了数学教育界的极大关注.这也正是近几届的 ICME 大会把数学教育研究方法作为核心主题的原因.

虽然到目前为止,我们还无法给数学教育研究建立一套标准,但有一点已成共识,那就是:数学教育研究必须走进课堂,解决教与学中的实际问题. 研究人员只有走出象牙塔,走出实验室,走进课堂,才能了解现实与理想的差距,才能了解教师和学生需求;而只有扎根于课堂中的学习理论,才能真正解决实际问题.

纵观这三十年的数学教育心理研究,我们可以感觉到,数学学习理论的研究风格在以下几个方面的变化:

(1) 从“自上而下”转向“自下而上”.

所谓“自上而下”的研究指的是:把一般的学习理论运用于数学学科的学习,或者把一般的数学学习理论运用于具体的课堂教学实践. 这实际上是一种演绎的思路. 应该说,在前提为真的情况下,演绎推理是一种精确的论证形式,但问题是,作为演绎前提的许多学习理论并不能让人信服. 因此,这样的演绎常常失去实际的价值. 此外,在这种“自上而下”的思路下,作为实践者的教师在研究的环节中处于被动的地位,往往只是成为研究者进行理论“验证”的“工具”.

而“自下而上”的研究指的是:从具体的课堂实践出发,发现教与学中的实际问题;通过解决问题,形成初步的假设;然后再回到实践,进行检验与修正. 这样经过多次的循环,最终形成理论. 这样的理论称为“扎根理论”. 在这种研究思路中,其出发点是具体的课堂. 而最熟悉课堂的莫过于教师,因此,教师就成为研究的主角,教师处理实际问题的经验往往就成为理论的雏形. 因此,这样形成的理论更能够使教师产生共鸣,也往往能够解决实际问题. 此外,在这种“自下而上”的研究模式中,专业研究者与一线教师的合作至关重要.

(2) 从“定量研究”转向“定性研究”.

在 20 世纪 60 年代,随着数学方法在其他学科的广泛运用,定量研究方法逐渐成为教育研究的主要方法,并于 70—80 年代达到了高峰. 但到了 90 年代,教育研究,特别是学习理论的研究又重新回到了属于自然主义研究范畴的定性研究. 莱斯特等人(Lester & Lambdin, 1998)对 80—90 年代在美国数学教育学术期刊《数学教育研究》(Journal for Research in Mathematics Education, 简称 JRME)上发表的文章进行了统计,发现在 1983 年,不涉及统计方法的文章只有 $\frac{1}{3}$,而到了 1993 年,这一比例就增加到了 $\frac{5}{8}$. 为了解释这种转变,我们首先来看胡德尔森(1998)对定性与定量方法的适用场合所做的对比,见表 1.

表 1 适用定性和定量方法的场合

定 性 研 究	定 量 研 究
● 研究对象的情况不清楚 ● 进行探索性研究时,相关的概念和变量不清楚,或定义不清楚 ● 进行深度探索性研究时,试图把行为的某些特定方面与更广的背景联系起来 ● 所考察的是问题的意义,而不是次数或频率 ● 研究需要灵活性,以便随时发现预料之外的深层问题 ● 需要对所选择的问题、个案和事件进行深层的、详细的考察	● 研究对象的情况非常清楚 ● 测量方面存在的问题不大,或者问题已经解决 ● 不需要把研究发现与更广泛的社会文化背景相联系,或对这一背景已经有了清楚的了解 ● 需要对代表性样本进行详细的数学描述 ● 测量的可重复性非常重要 ● 需要把结果加以推广,或需要把不同的人群加以比较

比照上面的表格可以看到,教育领域的绝大多数研究对象都适合定性研究. 在运用定性研究方法时,一个必须要面对的问题就是研究的可靠性与有效性. 解决这个问题有

两条常用的途径:其一是增加研究的客观性,如构建研究的理论框架或指标体系,对研究的对象进行特征编码,保留原始记录等;其二是采用三角论证,即在研究某种行为时使用不同来源的资料或用多种方法收集资料,尔后比较不同来源的信息,以确定他们是否相互证实(维尔斯曼,1997, p. 316-318; Cohen & Manion, 1995, p. 233-251)。

当然,提倡定性研究的方法,并不等于排斥定量研究。事实上,目前数学学习领域的许多研究都采取了定性研究与定量研究相结合的手段。例如,首先通过一定规模的定量调查,发现研究对象的基本特征,然后再针对这些特征进行深层次的定性研究;或者首先对定量研究的概念模型或理论框架进行定性的分析,在确保研究工具的内容信度的前提下再进行一定规模的定量调查。

(3) 从“纯理论研究”到“实证研究”再到“行动研究”。

很久以来,教育领域的理论与实践都是相隔离的,研究者大多比较关心理论的建构。形成这种现象的原因至少有两点:一是研究者不了解实际的课堂教学实践;二是没有深入到学科领域。为了使这些理论变得“有用”,许多研究者希望在实践中找到一些证据,于是各种实证研究开始流行起来。

随着学习理论“走进课堂”,“教师成为研究者”的呼声也越来越高。对于作为研究者的教师来说,其研究的目的除了理论建构以外,更主要的是希望通过研究改进自己的教学行为。而作为实践者的教师来说,其研究的过程又是与实践过程交织在一起的。由此就形成了一种新的研究模式,这就是行动研究。

行动研究是在教育情境中进行的、与特定问题相联系的一种方法,它旨在对现实世界进行功能性的干预,并检验这种干预的效果,它的研究思路是从行动出发、通过行动进行,并着眼于改进行动的研究。行动研究主要具有以下特点(Cohen & Manion, 1995, p. 186-203): (1) 情境性:它旨在通过现场研究来诊断和解决具体情境下的问题,逐步采取各种改革措施,又不断地通过问卷、访谈、个案研究等手段来监视这种调整的效果,以便基于这些反馈来对教学作出进一步的调整,逐步达到改革的目标,而不只是留待以后在某种场合下再付诸实施。(2) 合作性:研究者和实际工作者常常共同协作来完成一个课题,当然,它也可以由教师独立进行,但教师与研究者的合作更为普遍。研究者要通过各种方式与教师充分沟通,反复磨合,包括共同讨论、评课、写教案、相互听课、写教学日记等,从而在教学改革的目标上达成一致,在对教学和学习理解上逐步达到一致,在具体实施方案上逐步达到一致,这种沟通和反思对于提高教师的教学能力、转变他们的教学观念来说也有重大意义。(3) 参与性:各个成员都直接或间接地参与到研究的实施中,而不只是“被试”。(4) 自我评价:随着实际活动情境的发展而不断地、自然而然地对各种干预措施进行评价和反思。

由于行动研究旨在改进研究者的行为和解决实际的问题,因此近年来行动研究已成为教师专业发展、课程发展和教育改革的重要手段之一(Elliott, 1991)。

3 数学学习的理论建构

在教育领域,理论与实践的脱节,使得理论在实践者心中的名声不佳。这迫使许多理论研究者重新考虑:什么样的理论才是“有用”的理论?围绕这个问题的一些研究(如 Hiebert, 1998; Dubinsky, 1994;等)表明,一个“好”的理论至少应该具有以下几个方面的功能:

- 支持预测。好的学习理论可以帮助教师预见到学生学习中可能遇到的困难、学生可能使用的各种策略以及可能的学习结果,从而进行针对性的教学。

- 为研究过程提供概念模型或理论框架。概念模型和理论框架在确定研究的方向及保证研究的信度和效度上都非常重要。学习理论中常用的概念模型可以是分层模型(如范希尔的几何思维层次)、分类模型(如斯根普对理解的分类),也可以是(因素)结构模型(如克鲁切茨基的数学能力结构)。而这些模型或框架的基础正是相关的理论。

● 具有解释的能力. 在数学学习中,我们都遇到过这样的情形:在掌握某个理论之前,我们很难说清楚某个数学问题或者对象,而一旦掌握了相应的理论,解释起来就轻而易举.一个好的学习理论应该也有这样的功效,它有助于澄清教师在教学中产生的困惑,也有助于帮助教师解释学生在学习过程中产生的困惑.

● 能够应用于广泛的情境.理论与经验的一个重要区别就在于适用的范围.经验带有情境性与个人化的特征,往往只适用于某些特定的场合.而理论由于在经验的基础上进行了提升,因此往往可以适用于更广泛的情境.

● 有助于组织对复杂的相关现象的思考.教育研究对象的一个显著特点是复杂性,即使是某个很小的事件,如学生解一道特定的数学题,往往也会涉及多种因素,如他(她)以前是否遇到过类似的问题,是否具备足够的知识基础,是否受到了问题背景的影响,是否有信心去解决这个问题,等等.在这种情况下,好的理论往往可以成为分析的工具.

● 作为数据分析的工具.在教育研究中,不论是定量数据还是定性数据,分析的方法不同,结果可能也会有差异.而要保证研究的一致性,离不开理论的指导.

● 提供一种深层次的、交流观点的语言.教育研究有一定的主观性,也有一定的共性.许多研究成果由于镶嵌于特定的情境或者带有太多的经验成分,如果不身临其境或者经历其中,往往就难以被别人理解或分享.只有上升到理论的层面,其共性的一面才能凸显出来.

那么,如何去建构这样的理论呢?按照基尔派特里克(Kilpatrick, 1999)的说法,有两门学科对数学教育研究有过根本性的影响:一是数学,二是心理学.但这两门学科的结合并不是一个简单的1+1的过程.从以往的经验看,数学学习理论的构建似乎有以下两条途径:

第一条途径是“一般学习理论+数学例子”,也就是将一般的学习原理应用于具体的数学学习情境,然后根据数学学习的特点修正原来的理论,或者提出新的假设去寻找更合适的理论依据.这种“拿来主义”的做法在学习理论本身就有很好的基础,事实上,“从教育心理学的初期起,数学就是用来研究学习的一种流行的载体,这也许是由于看到了它在中小学课程中的重要地位;它的不受学派影响的相对独立性;它作为学校科目所具有的集中的而又有层次性的结构;它的抽象性和随意性;以及它在学习任务中所能提供的复杂性、与困难性的范围;等等”(Kilpatrick, 1999).数学教育界虽然常常对心理学的这类研究嗤之以鼻,但这并不妨碍数学教育的研究人员随意地搬弄心理学的理论与方法.

如果说上述途径的出发点是一般的学习理论,那么另外一条途径则源自数学学习中的问题与

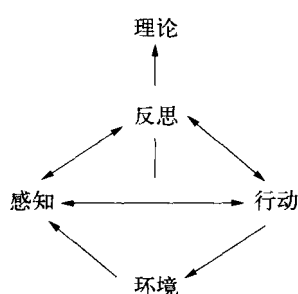


图2 理论的建构(Tall, et al., 2001)

经验,通过建立模型去解释数学学习的心理过程.这类研究采用的是“自下而上”的模式,其立足之处不是一般的学习理论,而是数学的认知特征.按照韬尔(David Tall, 2001)的观点,数学理论是在“感知”和“行动”的基础上反思抽象的结果,而“感知”和“行动”的对象则是环境,见图2.

如果说前一类研究群体往往带有更多的心理学背景的话,那么这一类研究人员通常是数学专业出身,对数学有较为深入的理解,其研究的重点主要在于大学生和中学生的数学学习.在这类研究中,影响较大的,如范希尔的几何思维层次理论、韬尔的高等数学思维研究、杜宾斯基(Ed Dubinsky)的APOS理论等,但总体来说,这样的研究还不够普遍.

我们这里无意去比较上述两条途径的优劣,而是希望有更多的渠道去讨论数学学习过程中的实际问题.罗姆伯格(T. Romberg, 1996)曾经说过,之所以存在许多的学习理论,正是因为其中的每一种都可用来解释目前数学学习的某个方面.

4 教师成为研究者

前面,我们多次提到,一个好的理论应该能够解决实际的问题.但要构建理论与实践之间的桥梁,除了理论本身的因素外,还需要通过一定的媒介,见图3.

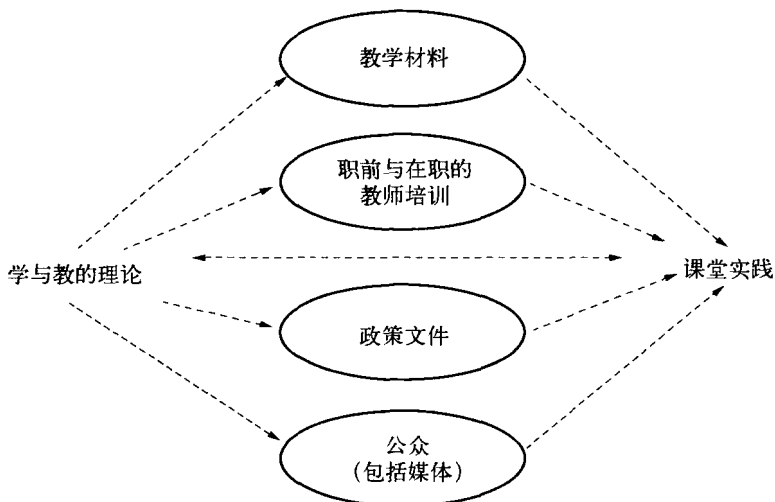


图3 理论影响实践的途径(Donovan, et al., 1999)

在上面这些途径中,最重要的当然是教师培训.通过培训,使教师不仅掌握一定的理论,而且成为一个研究者.教师只有成为一个“实质的研究者”,才能真正将理论运用于实践,并且改变自己的教学行为(Henson, 1996).

“教师成为研究者”的口号目前在教师教育领域已经得到了普遍的认可.其原因除了教师职业发展的需要外,也与当前各国正在进行的课程改革有关.就我国的情况看,数学新课程的实施,带来了许多新的东西,如:新的教学理念、新的教学方法、新的教学内容,以及传统教学内容的新的处理.随之而来的则是一些新的问题和老师们的种种困惑:如何看待我国的双基教学?传统的教学经验是不是不适用啦?什么是数学探究?如何评价教学的有效性?等等.为了解除困惑,老师们常常把目光转向专家和理论,而他们常常又会发现,专家们的观点似乎并不一致,理论也似乎没有定论.于是,又形成了新的困惑.要改变这种现象,“教师成为研究者”至关重要.因为面对新的情境,老的经验往往并不适用.只有采取研究的态度,才能透过表面的现象看清本质的东西,从而提高教师的洞察力和鉴别力,而不至于像墙头草那样,风吹两面倒.

正是出于“教师成为研究者”的需求,我们在写这本书的时候,一个贯穿始终的指导思想就是帮助职前和职后的教师们学会研究.因此,在这本书中,我们不只是告诉人们一些普遍的原则或者理论,也不只是呈现一些研究结果,而是侧重于分析:在数学学习领域有哪些值得研究的课题,如何去发现教与学中实际存在的问题,如何形成研究的框架、构建研究的方法和工具,以及如何把研究的结果与实际的教学相联系.当然,由于我们的能力和篇幅都有限制,因此只能通过这本书,打开一些研究的门道,能否真正成为一个“实质的研究者”,还取决于教师自己.

本书的具体分工是:第1、2、4、5、6、7、8章由鲍建生执笔;第3、9、10、11、12章由周超执笔.整个写作过程历时5年,其间开过多次的研讨会,顾泠沅老师及丛书的研制小组为本书提供了许多建设性的意见,借此机会表示特别的感谢.此外,还要感谢上海教育出版社数学编辑室的几位编辑,这本

“巨”作的编辑和出版给他们添了不少的“麻烦”。希望这本书的出世,能不辜负所有关心这套丛书的人的希望。

参考文献

- Cohen, L. & Manion, L. (1995). *Research Methods in Education*, 4th Edn. London: Routledge.
- Donovan, M. S., Bransford, J. D. & Pellegrino, J. W. (Eds.) (1999). *How people learn: Bridging research and practice*. National Academy Press, Washington, DC. Donovan, M. S., Bransford, J. D. & Pellegrino, J. W. (Eds.) (1999). *How people learn: Bridging research and practice*. National Academy Press, Washington, DC.
- Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, 221 - 243. Hillsdale: Erlbaum.
- Elliott, J. (1991). *Action research for educational change*. Milton Keynes: Open University Press.
- Henson, K. T. (1996). Teachers as researcher. In J. Sikula (Ed.), *Handbook on research in teacher education*, 53 - 64. New York: MacMillan.
- Hiebert, J. (1998). Aiming research toward understanding: Lessons we can learn from children. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, 141 - 152. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Kilpatrick, Jeremy; Swafford, Jane; Findell, Bradford (Eds.); Mathematics Learning Study Committee, National Research Council (2001). Conclusions and recommendations. In *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, 407 - 432. Washington, DC.: The National Academies Press.
- Lester F. & Lambdin, D. (1998). The ship of Theseus and other metaphors for thinking about what we value in Mathematics Education Research. In J. Kilpatrick & A. Sierpiska (Eds.), *What is research in mathematics education and what are its results?* ICMI Study Publication, Kluwer.
- Romberg, T. (1996). 怎样才能学会知识: 数学学习的模式和理论. 引自唐瑞芬、李士钊等编译: *国际展望: 数学教育评价研究*. 上海教育出版社.
- Sfard, Anna (1998). A Mathematician's View of Research in Mathematics Education: An Interview with Shimshon A. Amitsur. In Sierpiska, Anna and Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity: An ICME Study Book II* (Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers), 445 - 458.
- Tall, D. et al. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 1, 80 - 104.
- Tall, D. & Thomas, M. (Eds.) (2002). *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics — A Tribute to Richard Skemp*. Flaxton, Australia: Post Pressed.
- Vergnaud, G. (1998). Towards a Cognitive Theory of Practice. In: *Mathematics Education as the Research Domain: A Search for Identity*. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *ICME Study. Book 2*, Kluwer Academic Publishers, Great Britain, 227 - 242.
- 胡德森著,陈会昌等译(1998). *卫生项目定性研究方法*. 北京师范大学发展心理研究所.
- 唐瑞芬、李士钊等编译(1996). *国际展望: 数学教育评价研究*. 上海教育出版社.
- 维尔斯曼(1997). *教育研究方法导论*. 教育科学出版社.

上篇 数学学习的理论探讨

第 1 章 范希尔的几何思维水平	003
§ 1.1 范希尔理论	/ 004
§ 1.2 范希尔理论的应用	/ 010
§ 1.3 研究展望	/ 016
参考文献	/ 022
第 2 章 中小学生学习数学能力发展心理学	025
§ 2.1 中小学生学习数学能力的基本结构	/ 026
§ 2.2 研究中小学生学习数学能力的实验题体系	/ 035
§ 2.3 数学天才儿童的案例研究	/ 039
§ 2.4 研究展望	/ 046
参考文献	/ 048
第 3 章 高等数学思维研究	051
§ 3.1 早期研究：斯根普的工作	/ 052
§ 3.2 韬尔等人的主要研究成果	/ 054
§ 3.3 研究展望	/ 072
参考文献	/ 076
第 4 章 ACT-R 理论	079
§ 4.1 ACT-R 理论概述	/ 080
§ 4.2 ACT-R 理论对数学教学的启示	/ 089
§ 4.3 研究展望	/ 092

参考文献	/ 093
------	-------

第 5 章 杜宾斯基的 APOS 理论	095
----------------------------	------------

§ 5.1 APOS 理论概述	/ 096
§ 5.2 APOS 理论的应用	/ 100
§ 5.3 研究展望	/ 102
参考文献	/ 102

下篇 数学学习的心理过程

第 6 章 数学概念的理解	107
----------------------	------------

§ 6.1 数学概念的基本特征	/ 109
§ 6.2 数学概念的学习	/ 116
§ 6.3 概念理解的评价	/ 129
§ 6.4 促进数学概念理解的教学途径	/ 137
§ 6.5 研究展望	/ 144
参考文献	/ 146

第 7 章 数学技能的习得	149
----------------------	------------

§ 7.1 数学技能的基本特征	/ 151
§ 7.2 中小学课程中的数学技能	/ 152
§ 7.3 数学技能的形成与教学	/ 159
§ 7.4 研究展望	/ 167
参考文献	/ 169

第 8 章 数学问题解决	171
---------------------	------------

§ 8.1 数学问题	/ 174
§ 8.2 数学问题解决的基本过程与特征	/ 178
§ 8.3 影响数学问题解决的主要因素	/ 187
§ 8.4 数学问题解决的评价	/ 199
§ 8.5 数学问题解决的教学	/ 212
§ 8.6 数学问题解决的研究方法	/ 222
§ 8.7 研究展望	/ 229