

Mathematical
Modeling

数学建模

□郭大伟 主编



时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

0141.4/53

2009

数学建模

主 编 郭大伟

副主编 姚云飞 苏本跃 甘犬财 许 峰

编 者 (以姓氏笔画为序)

王 静	叶 飞	甘犬财	许 峰
李孝诚	杨 刘	张 琼	苏本跃
姚云飞	倪敬能	唐小峰	郭大伟
蒋剑军			

 安徽教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学建模 / 郭大伟主编. —合肥: 安徽教育出版社,
2009. 1

ISBN 978 - 7 - 5336 - 5265 - 4

I. 数… II. 郭… III. 数学模型 IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 002326 号

责任编辑: 文 乾

装帧设计: 许海波

出版发行: 安徽教育出版社

地 址: 合肥市繁华大道西路 398 号

邮 编: 230601

网 址: <http://www.ahep.com.cn>

经 销: 新华书店

排 版: 安徽创艺彩色制版有限责任公司

印 刷: 安徽天歌印刷厂

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 16

字 数: 400 000

版 次: 2009 年 2 月第 1 版 2009 年 2 月第 1 次印刷

定 价: 28.00 元

发现印装质量问题, 影响阅读, 请与我社出版科联系调换

电 话: (0551) 3683078

前 言

随着一年一度全国大学生数学建模竞赛的普遍开展以及全社会对培养大学生创新能力与科研素质的日益关注,我们感觉到亟需一本适合本、专科院校师生广泛使用的数学建模实用教材.正因如此,本书的编撰宗旨就是以深入浅出的方式介绍数学建模课程必须掌握的基本原理和基础内容,通过大量实例详尽展示建模的过程.全书各章均甄选了适量的习题以供学生对照练习,同时,本书亦十分适用于数学建模竞赛的培训辅导.

本书编著者均系高校中多年从事数学建模课程教学并成功带队指导数学建模竞赛的一线专家,其内容是编著者从事相关工作的积累和总结,具体分工如下:第一章,杨刘(合肥师范学院);第二章,李孝诚(淮北煤炭师范学院);第三章,张琼、郭大伟(安徽师范大学);第四章,苏本跃(安庆师范学院);第五章,倪敬能(合肥学院);第六章,王静(安徽医科大学)、叶飞(铜陵学院);第七章,甘大财(解放军电子工程学院);第八章,姚云飞(阜阳师范学院);第九章,唐小峰(阜阳师范学院);第十章,蒋剑军(铜陵学院);第十一章,许峰(安徽理工大学).全书由安徽师范大学郭大伟教授统稿.

由于成书时间略显仓促加之应用型学科建设不断提升,我们恳切地希望广大师生以及对数学建模感兴趣的各界人士在本书使用过程中能及时地将意见反馈给我们.

《数学建模》编写组

2009年1月

目 录

前 言	1
第一章 Matlab 软件使用简介	1
§ 1.1 Matlab 的运行环境与帮助系统	1
§ 1.2 Matlab 的矩阵运算	3
§ 1.3 微积分运算的 Matlab 实现	7
§ 1.4 Matlab 作图	10
§ 1.5 程序设计	13
§ 1.6 M 文件	15
练习与综合练习题	16
第二章 数学建模初步	18
§ 2.1 数学模型与数学建模	18
§ 2.2 数学建模的基本步骤和方法	20
§ 2.3 数学建模实例分析	22
§ 2.4 数学模型的特点和分类	31
§ 2.5 数学建模的学习方法与数学建模竞赛简介	33
练习与综合练习题	35
第三章 微分方程及非线性方程建模	38
§ 3.1 微分方程建模	38
§ 3.2 微分方程的欧拉方法和龙格-库塔法及相关实例	45
§ 3.3 求解非线性方程的二分法和迭代法及相关建模实例	54
练习与综合练习题	62
第四章 层次分析模型	65
§ 4.1 层次分析法的基本原理和步骤	65
§ 4.2 特殊层次结构的问题	70
§ 4.3 层次分析法应用举例	72
练习与综合练习题	76
第五章 对策论模型	78
§ 5.1 矩阵对策模型——一个经典游戏中的数学	78

*§ 5.2 二人零和无限对策模型——导弹延时发射问题·····	86
§ 5.3 合作对策模型——污水处理费用的分担问题·····	90
练习与综合练习题·····	94
第六章 数据的处理及统计分析·····	95
§ 6.1 几种插值方法与最小二乘拟合·····	95
§ 6.2 单变量资料的统计分析·····	103
§ 6.3 多变量资料的统计分析·····	108
练习与综合练习题·····	118
第七章 最优化问题数学模型·····	121
§ 7.1 最优化问题·····	121
§ 7.2 经典最优化方法·····	125
§ 7.3 线性规划·····	129
§ 7.4 最优化问题数值算法·····	135
§ 7.5 多目标优化问题·····	142
练习与综合练习题·····	153
第八章 差分方程模型·····	155
§ 8.1 差分方程的基本概念·····	155
§ 8.2 一阶常系数线性差分方程·····	158
§ 8.3 二阶常系数线性差分方程·····	164
§ 8.4 差分方程的数学模型·····	170
练习与综合练习题·····	173
第九章 图论模型·····	175
§ 9.1 图的基本概念·····	175
§ 9.2 图的矩阵表示·····	177
§ 9.3 最小生成树及其 Kruskal 算法·····	180
§ 9.4 最短路径与 Dijkstra 算法·····	182
练习与综合练习题·····	185
第十章 模糊数学方法·····	186
§ 10.1 模糊数学的基本概念·····	186
§ 10.2 模糊聚类分析·····	190
§ 10.3 模糊模式识别·····	195
§ 10.4 模糊综合评价·····	197
§ 10.5 距离分析法·····	201
§ 10.6 应用举例——关于我国城市发展水平的讨论·····	202

练习与综合练习题	207
第十一章 计算机仿真与模拟	210
§ 11.1 计算机仿真概述	210
§ 11.2 时间步长法	212
§ 11.3 事件步长法	217
§ 11.4 城市公共交通线路的仿真	220
§ 11.5 排序问题的仿真	225
§ 11.6 随机模拟与 Monte Carlo 方法	230
练习与综合练习题	235
附录	237
参考文献	248

第一章 Matlab 软件使用简介

Matlab 是矩阵实验室 matrix laboratory 的简写, 是美国 Mathworks 公司开发的用于数值计算和数据可视化的数学软件, 它集符号运算、矩阵运算、数值分析、信号处理和图形显示于一体, 构成了一个便捷的数学平台. 经过多年发展, 现已成为最优化理论、数理统计、神经网络、非线性控制理论、数字信号处理、计算机模拟仿真等现代科学的基本教学软件.

以下主要介绍 Matlab 软件的基本使用方法, 这些将是后面模型在分析计算时使用 Matlab 的基础.

§ 1.1 Matlab 的运行环境与帮助系统

1.1.1 Matlab 的运行环境

Matlab 是一门高级编程语言, 它提供了良好的编程环境. 以下对 Matlab 的工作环境和界面作简单的介绍.

命令窗口(Command Window)是 Matlab 的重要组成部分, 启动 Matlab 后就会出现该窗口, 见图 1-1, 其中符号“>>”表示等待用户输入, 在此提示符后输入运算式并按 Enter 键后, 软件将给出计算结果并再次进入准备状态.

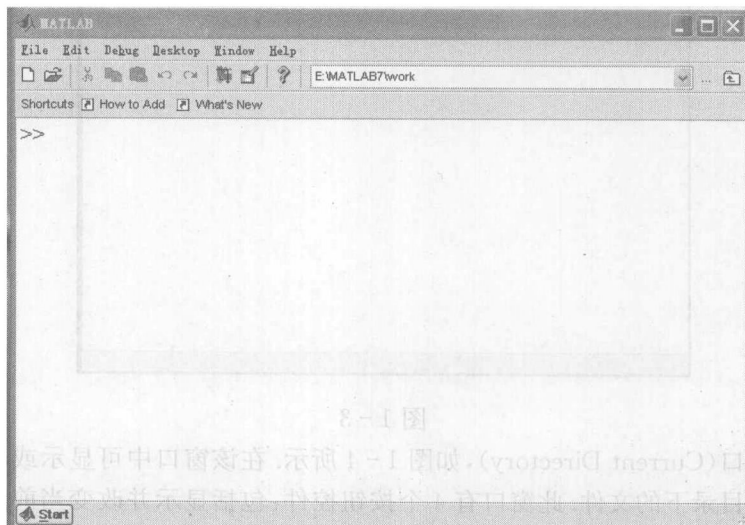


图 1-1

历史窗口(Command History)如图 1-2 所示. 在默认的设置下, 该窗口会保留所有命令的记录并表明使用时间, 这有助于使用者及时查阅历史记录; 在双击一行命令时, 软件会在命令窗口执行该命令.

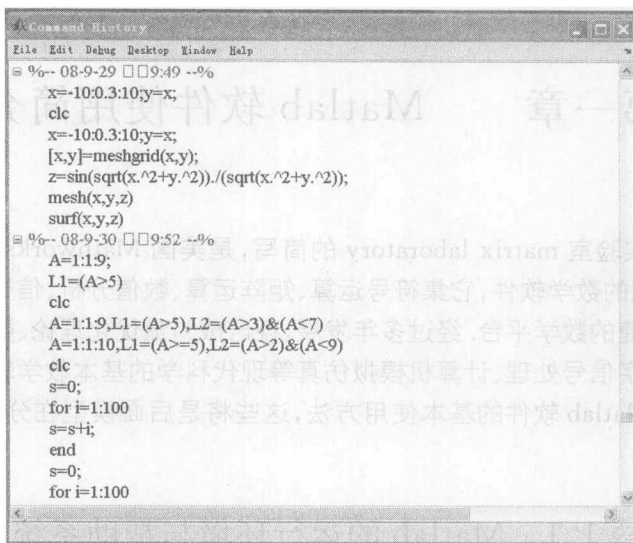


图 1-2

工作间管理窗口 (Workspace), 如图 1-3 所示. 在该窗口中将显示所有目前内存中的 Matlab 变量的变量名、数学结构及其类型.

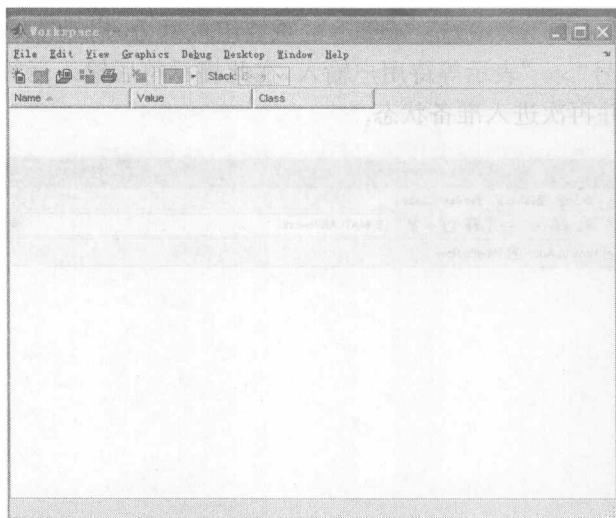


图 1-3

当前目录窗口 (Current Directory), 如图 1-4 所示. 在该窗口中可显示或改变当前目录, 还可以显示当前目录下的文件. 此窗口有 4 个按钮控件: 包括显示并改变当前目录、进入所显示的目录的上一级目录、在当前目录中创建一个新的子目录、在当前目录的文件中查找.

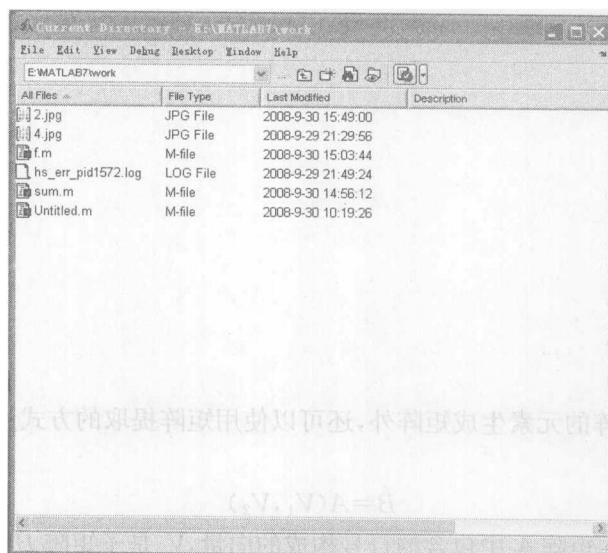


图 1-4

1.1.2 Matlab 的帮助系统

Matlab 拥有非常完善的帮助系统,可以帮助用户掌握和熟练使用软件. Matlab 常用的帮助系统分为:联机帮助系统、命令窗口查询帮助.

一、联机帮助系统,可以解决很多用户在使用中遇到的问题,进入联机帮助系统的方式有三种:

- (1)直接按下主窗口中的? 按钮.
- (2)选中主窗口中的 help 下拉菜单选中.
- (3)在命令窗口中运行 helpwin 命令.

二、命令窗口查询帮助,可以直接在命令窗口中借助命令进行查询帮助,常见的命令有 Help、help+函数名、look for 等.

§ 1.2 Matlab 的矩阵运算

1.2.1 矩阵与向量的输入

Matlab 的主要运算对象是矩阵,数和数组在 Matlab 中都被视为矩阵,矩阵运算是这个数学软件最基本的功能.

遵照以下三个原则,可在 Matlab 中的命令窗口可以直接输入矩阵的元素:

- (1)各元素之间用空格或逗号相隔.
- (2)用中括号“[]”把所有的元素括起来,
- (3)用分号“;”或回车键表示一行结束.

例如:

```
>> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
A=
```

```

1    2    3
4    5    6
7    8    9

```

```
A=[1 2 3
```

```
4 5 6
```

```
7 8 9]
```

```
A=
```

```

1    2    3
4    5    6
7    8    9

```

除了直接输入矩阵的元素生成矩阵外,还可以使用矩阵提取的方式产生矩阵,提取子矩阵的具体方法是

$$B=A(V_1,V_2)$$

其中, V_1 是子矩阵 B 在矩阵 A 中包含的行号构成的向量, V_2 是子矩阵 B 在矩阵 A 中包含的列号构成的向量,这样就从矩阵 A 中提取 V_1 这些行, V_2 这些列构成矩阵 B .

例如

```
>> B1=A([1,2],[1,3])
```

```
B1=
```

```

1    3
4    6

```

注意在提取子矩阵时,如果 $V_1(V_2)$ 使用冒号,则表示提取矩阵 A 全部的行(列),如果使用 end,则表示最后一行(列),如

```
>> B2=A(:,1:2:end)
```

```
B2=
```

```

1    3
4    6
7    9

```

```
>> B3=A(:,end:-1:1)
```

```
B3=
```

```

3    2    1
6    5    4
9    8    7

```

1.2.2 矩阵的运算

一、单个矩阵的运算:对矩阵 A ,可以调用 Matlab 中的函数进行各种运算,例如

矩阵的秩—— $\text{rank}(A)$,

方阵的行列式—— $\text{det}(A)$,

矩阵的逆—— $\text{inv}(A)$,

矩阵的特征值和特征向量—— $\text{eig}(A)$,

矩阵的转置—— A' .

例 1-1 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A 的转置矩阵、 A 的秩、行列式、逆矩阵、特征值及特征向量.

解 在 Matlab 中输入计算命令

$A = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 0], A', \text{rank}(A), \det(A), \text{inv}(A), [v, d] = \text{eig}(A)$

$A =$

```
1    2    3
4    5    6
7    8    0
```

$\text{ans} =$

```
1    4    7
2    5    8
3    6    0
```

$\text{ans} =$

```
3
```

$\text{ans} =$

```
27
```

$\text{ans} =$

```
-1.7778    0.8889   -0.1111
 1.5556   -0.7778    0.2222
-0.1111    0.2222   -0.1111
```

$v =$

```
-0.2998   -0.7471   -0.2763
-0.7075    0.6582   -0.3884
-0.6400   -0.0931    0.8791
```

$d =$

```
12.1229         0         0
         0   -0.3884         0
         0         0   -5.7345
```

二、矩阵的四则运算:行列数相同的矩阵的和(差)等于对应元素的和(差),用“+”(“-”)表示. 矩阵的乘法用符号“*”表示,其结果遵循通常意义上的矩阵乘法. 方阵 A 的乘方用符号“^”表示,其意义为:

当 p 是正整数时, A^p 是 A 的 p 次幂;当 $p=0$ 时, A^p 是单位阵;当 p 是负数时,只有当 A 为非退化的矩阵时才有意义,它表示正整数幂 A^{-p} 的逆.

例 1-2 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $A+B, A-B, A*B, B*A, A^3$.

解 用 Matlab 计算如下

$$A=[4,-2,2;-3,0,5;1,5,3]; B=[1,3,4;-2,0,3;2,-1,1];$$

$$C1=A+B, C2=A-B, C3=A*B, C4=B*A, C5=A^3$$

C1=

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -5 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

C2=

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

C3=

$$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 12 \\ 7 & -14 & -7 \\ -3 & 0 & 22 \end{bmatrix}$$

C4=

$$\begin{bmatrix} -1 & 18 & 29 \\ -5 & 19 & 5 \\ 12 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

C5=

$$\begin{bmatrix} 94 & -28 & 70 \\ -112 & 59 & 168 \\ -35 & 196 & 157 \end{bmatrix}$$

此外,在 Matlab 中还定义了矩阵的除法,定义为:

左除“\”:用 $x=A \setminus B$ 表示线性方程组 $Ax=B$ 的解;

右除“/”:用 $x=B/A$ 表示线性方程组 $xA=B$ 的解.

例 1-3 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解 方程组等价于 $Ax=b$, 其中

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

在 Matlab 中计算如下

>> A=[2,1,-5,1;1,-3,0,-6;0,2,-1,2;1,4,-7,6],b=[8,9,-5,0]

A=

```

2      1      -5      1
1      -3      0      -6
0      2      -1      2
1      4      -7      6
b=
8      9      -5      0
>> x=(A\b')'
x=
3.0000  -4.0000  -1.0000  1.0000

```

§ 1.3 微积分运算的 Matlab 实现

1.3.1 极限运算

函数极限

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

其中 x_0 可以是一个数,也可以是无穷大.借助 Matlab 符号运算工具箱中的函数 `limit()` 可以求出函数的极限,此时需用 `syms` 定义符号,其调用格式为

$$L = \text{limit}(fun, x, x_0).$$

如要求自变量从单侧趋近 x_0 时的单侧极限,调用函数的格式为

$$L = \text{limit}(fun, x, x_0, 'left') \text{ 或 } L = \text{limit}(fun, x, x_0, 'right'),$$

可以分别计算函数的左、右极限.

例 1-4 计算极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$$

解 (1)调用 `limit()` 函数计算如下:

```

>> syms x y;
>> y=sin(x)/x; limit(y,x,0)
ans=
1

```

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(2)调用 `limit()` 函数计算如下:

```

>> syms a b c
>> y=((a^x+b^x+c^x)/3)^(1/x); limit(y,x,0)
ans=
a^(1/3) * b^(1/3) * c^(1/3)

```

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{abc}.$$

对于多元函数极限,同样首先将重极限转化累次极限,再反复调用函数 `limit()` 直接求解.

如对二元函数极限

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

调用 `limit()` 命令计算的格式为

$$L = \text{limit}(\text{limit}(fun, x, a), y, b) \text{ 或 } L = \text{limit}(\text{limit}(fun, y, b), x, a).$$

例 1-5 计算极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

解 调用 `limit()` 函数计算如下:

```
>> syms x y z; z = x * y / (sqrt(x * y + 1) - 1); limit(limit(z, x, 0), y, 0)
ans =
2
```

即 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = 2.$

1.3.2 导数运算

在 Matlab 中可以调用 `diff()` 函数计算函数的导数,调用的格式为 `diff(fun, x, n)`,其中 n 表示导数的阶数,当 $n=1$ 时也可以省去.下面,我们分别讨论几种求导的情形.

一、一元函数求导:一元函数的导数可直接通过调用 `diff()` 函数计算.

例 1-6 计算函数 $y = x \sin x$ 的导数和二阶导数.

解 调用 `diff()` 命令计算如下:

```
>> syms x y; y = x * sin(x); diff(y, x), diff(y, x, 2)
ans =
sin(x) + x * cos(x)
ans =
2 * cos(x) - x * sin(x)
```

二、多元函数的偏导数:多元函数的偏导数也可以通过调用 `diff()` 命令计算,对混合偏导数,可以借助多次调用 `diff()` 命令来实现.

例 1-7 设 $f(x, y, z) = \sin(x^2 y z)$, 求 $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}$.

解 对 $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$, 计算及结果输入如下:

```
>> syms x y z f; f = sin((x^2) * y * z); diff(f, x, 4)
ans =
16 * sin(x^2 * y * z) * x^4 * y^4 * z^4 - 48 * cos(x^2 * y * z) * x^2 * y^3 * z^3 - 12 * sin(x^2 * y * z) * y^2 * z^2
```

对 $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}$, 计算及结果输入如下:

```
>> syms x y z f; f = sin((x^2) * y * z);
>> diff(diff(diff(f, x), y), z, 2)
ans =
2 * sin(x^2 * y * z) * x^7 * y^3 * z^2 - 10 * cos(x^2 * y * z) * x^5 * y^2 * z
- 8 * sin(x^2 * y * z) * x^3 * y
```

1.3.3 积分运算

在 Matlab 中可以使用 `int()` 函数求解积分问题,其调用的具体格式为

$$\text{int}(\text{fun}, x, a, b),$$

其中 x 为积分变量, a, b 分别是积分下限和积分上限. 当 a, b 取成 $-\infty$ 或 ∞ 时, 可以计算无穷限非正常积分.

例 1-8 计算下列定积分

$$(1) \int_0^1 x^2 dx \quad (2) \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx \quad (3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

解 (1) 使用 `int()` 函数计算如下:

```
>> syms x y; y=x^2; int(y, x, 0, 1)
ans=
1/3
```

(2) 使用 `int()` 函数计算如下:

```
>> syms x y; y=1/(1+x^2); int(y, x, -1, sqrt(3))
ans=
7/12 * pi
```

(3) 使用 `int()` 函数计算如下:

```
>> syms x y; y=1/(1+x^2); int(y, x, -inf, inf)
ans=
pi
```

对多元函数的重积分, 可先经过数学处理将重积分转化为多次积分, 每次积分针对积分变量调用 `int()` 函数进行处理.

例 1-9 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 围成的闭区域.

解 根据积分区域特点,

$$\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 dx \int_1^x xy dy$$

使用 `int()` 函数计算如下:

```
>> syms x y z; z=x*y; int(int(z, y, 1, x), x, 1, 2)
ans=
9/8
```

例 1-10 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

解 根据积分区域特点,

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} x dz$$

使用 `int()` 函数计算如下:

```
>> syms x y z f; f=x*y*z; int(int(int(f, z, 0, 1-x-2*y), y, 0, (1-x)/2), x, 0, 1)
ans=
```

1/2880

§ 1.4 Matlab 作图

图形功能是 Matlab 软件应用的一大特色,本节介绍 Matlab 中几种图形绘制方法. 首先介绍一下点乘运算.

对行列数相同的矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times m}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$, 定义

$$C = A .* B = (c_{ij})_{n \times m},$$

其中

$$c_{ij} = a_{ij} \times b_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

即矩阵的点乘运算是对应元素相乘.

1.4.1 二维图形绘制

Matlab 中作图使用描点法,即对于自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和应变变量 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 输入 Matlab 中构成二维平面的点列 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 再用折线将这些点连接起来, 如果点足够多, 就可以得到函数近似的曲线了. 在 Matlab 中绘制二维图形最基本的函数是 `plot()`, 其调用格式为

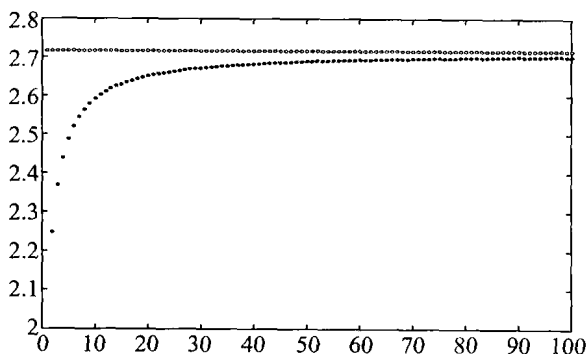
$$\text{plot}(x, y, s),$$

其中 x, y 为同维向量, 绘制以 x 为横坐标轴、 y 为纵坐标轴的曲线, s 是用来对曲线的形状、大小、颜色等特征进行修饰的选项(也可以省略).

例 1-11 在平面上绘制点列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}, n = 1, 2, \dots, 100$, 并比较它们与 $y = e$ 的位置.

解

```
>> n=1:1:100; y1=(1+1/n)^n; plot(n, y1, 'r', 'MarkerSize', 20);
hold on %将多个图形画在同一图中
plot(n, exp(1), 'k', 'MarkerSize', 20);
```



例 1-12 在坐标平面上绘制函数 $y = \sin x, y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像.

解

```
>> x=0:0.01:2 * pi; y1=sin(x); y2=cos(x);
plot(x, y1, 'r', 'LineWidth', 2);
```