

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材



振动测试技术

ZHENDONG CESHI JISHU

张维衡 熊志民 杜润生

华中理工大学出版社

内容简介

本书讲述振动测量方法、测试仪器的工作原理以及测量数据的分析方法。主要内容有:单自由度系统的基本理论、实模态和复模态理论、相关分析和谱分析、机械阻抗和模态参数的识别,振动测试仪器等。本书可作为结构类专业硕士研究生、高年级大学生的教材,可供需要学习振动理论的各类专业的研究生及本科生作教学参考书,也可供从事振动测量和分析的工程技术人员参考。

振动测试技术

张维衡 熊志民 杜润生

责任编辑 叶见欣

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:12.25 字数:288 000

1993年4月第1版 1993年4月第1次印刷

印数:1-1 000

ISBN 7-5609-0753-9/TH·65

定价:3.25元

(鄂)新登字第10号

前 言

振动测试技术及对测量数据的分析处理方法,近年来都有了很大的发展,成为研究结构振动的重要手段。近年来,我们在为硕士研究生开结构动力学课程的同时,也为他们开振动测试与数据分析,以期他们能对结构动态性能的研究方法有较全面的了解。本书即是在此课程的讲稿基础上写成的。

本书旨在较全面地讲述现代的振动测试和分析技术。本书的头两章介绍振动的基本理论,这是理解本书以后各章所必须的。这两章在写法上与一般讲述振动理论的书不同,它着重于讲述与振动测试有密切关系的内容,并较深入地讲述了多自由度系统的实模态理论和复模态理论,从而为理解模态参数的识别打下基础。第三、四两章讲处理振动测量数据的数值方法,包括相关分析和谱分析以及模态参数的识别。最后三章介绍振动测试用的传感器及仪器,着重从使用者的角度介绍了它们的工作原理,性能指标,标定方法等,其目的在于使读者能根据自己的具体测量要求,灵活地选择合适的仪器组合。

本书第1、2章由熊志民编写,第3、4章由张维衡编写,第5、6、7章由杜润生编写。全书由张维衡统一规划并定稿。编者欢迎读者及同行提出宝贵意见,以利今后改进。

编 者

1992. 9.

目 录

第一章 单自由度系统的振动	(1)
§ 1.1 单自由度系统确定性振动	(1)
§ 1.1.1 无阻尼自由振动	(1)
§ 1.1.2 有阻尼自由振动	(3)
§ 1.1.3 有阻尼强迫振动	(5)
§ 1.1.4 线性时不变系统与线性叠加原理	(12)
§ 1.1.5 周期振动	(13)
§ 1.1.6 冲击与瞬变现象	(17)
§ 1.1.7 阶跃响应	(23)
§ 1.2 随机振动	(24)
§ 1.2.1 随机振动的定义和几个基本概念	(24)
§ 1.2.2 各态历经随机振动的数学描述	(25)
§ 1.2.3 随机振动的输入输出关系·相干函数	(30)
§ 1.3 扭转振动	(32)
§ 1.4 阻尼	(33)
§ 1.5 非线性系统的振动特性	(35)
§ 1.5.1 非线性系统	(36)
§ 1.5.2 自由振动	(37)
§ 1.5.3 强迫振动	(39)
第二章 多自由度系统的振动	(41)
§ 2.1 多自由度系统	(41)
§ 2.2 多自由度系统无阻尼自由振动	(41)
§ 2.2.1 无阻尼自由振动的固有频率	(41)
§ 2.2.2 无阻尼自由振动的固有振形	(42)
§ 2.2.3 无阻尼自由振动的正则振形	(44)
§ 2.3 多自由度系统的实模态理论	(45)
§ 2.3.1 阻抗矩阵和导纳矩阵	(45)
§ 2.3.2 导纳函数实模态展开式	(46)
§ 2.3.3 多自由度系统的响应	(48)
§ 2.4 多自由度系统的复模态理论	(49)
§ 2.4.1 拉普拉斯变换	(49)
§ 2.4.2 线性时不变系统的传递函数	(50)
§ 2.4.3 复模态理论	(52)
§ 2.4.4 结构阻尼系统的复模态理论	(59)
第三章 振动信号的数字化处理	(61)
§ 3.1 数据的离散化	(61)

§ 3.2	离散富氏变换	(64)
§ 3.3	采样定理与叠混	(65)
§ 3.4	有限窗宽与频谱泄漏	(67)
§ 3.5	细化	(70)
§ 3.6	幅值域中的统计量	(71)
§ 3.7	功率谱密度的估计	(73)
§ 3.7.1	求功率谱密度的方法	(73)
§ 3.7.2	功率谱密度估计的误差	(75)
§ 3.7.3	功率谱密度估计的置信区间	(76)
§ 3.7.4	计算功率谱密度的步骤	(78)
§ 3.8	自回归谱估计	(79)
§ 3.9	相关函数的估计	(81)
§ 3.9.1	相关函数的直接计算	(81)
§ 3.9.2	误差分析	(82)
§ 3.9.3	用富氏变换计算相关函数	(83)
§ 3.10	频率响应函数的测试和分析	(84)
§ 3.10.1	正弦激励测试法	(84)
§ 3.10.2	瞬态激励测试法	(86)
§ 3.10.3	随机激励测试法	(88)
§ 3.10.4	频率响应函数的平滑处理	(89)
§ 3.10.5	测试技术的若干问题	(90)
§ 3.11	用多次平均消除信号中的噪声	(91)
第四章	模态参数的识别	(93)
§ 4.1	频率响应函数的初步检查	(93)
§ 4.2	单自由度识别·幅频图	(95)
§ 4.3	单自由度识别·实频图和虚频图	(97)
§ 4.4	单自由度识别·圆拟合法	(98)
§ 4.4.1	单自由度系统的矢端图	(98)
§ 4.4.2	模态圆的拟合	(100)
§ 4.4.3	复模态振形的确定	(101)
§ 4.4.4	利用 $H_2(\omega)$ 提高识别精度	(101)
§ 4.5	频率响应函数的重建及截尾模态的影响	(103)
§ 4.6	用迭代提高圆拟合法的识别精度	(105)
§ 4.7	Klosterman 方法	(106)
§ 4.8	Levy 方法	(107)
§ 4.9	微阻尼系统	(109)
§ 4.10	Ibrahim 时域识别法	(110)
§ 4.10.1	ITD 法的原理	(111)
§ 4.10.2	虚拟模态及模态置信因子	(113)
§ 4.11	ITD 法的一个稀疏矩阵算法	(113)
§ 4.12	用随机减量法获取自由振动时间历程	(116)

第五章 振动测量传感器	(117)
§ 5.1 对测振传感器的技术要求	(117)
§ 5.2 振动测量的常用传感器	(119)
§ 5.2.1 磁电式速度传感器	(120)
§ 5.2.2 压电式加速度传感器	(121)
§ 5.2.3 涡流式电感传感器	(126)
§ 5.2.4 其它类型传感器	(127)
§ 5.2.5 力传感器	(129)
§ 5.2.6 阻抗头	(130)
§ 5.3 振动传感器的校准	(131)
§ 5.3.1 校准内容与要求	(131)
§ 5.3.2 压电式加速度传感器的校准方法	(133)
第六章 振动测量的常用仪器设备	(137)
§ 6.1 振动测量系统的构成	(137)
§ 6.2 放大器	(138)
§ 6.2.1 加速度传感器前置放大器	(138)
§ 6.2.2 测量放大器	(141)
§ 6.3 振动的激励设备	(142)
§ 6.3.1 激振信号与信号源	(143)
§ 6.3.2 振动台和激振器	(145)
§ 6.3.3 激振控制	(148)
§ 6.4 振动信号处理仪器	(150)
§ 6.4.1 幅值测量仪器	(151)
§ 6.4.2 相位测量仪器	(154)
§ 6.4.3 滤波器	(156)
§ 6.4.4 信号分析设备	(160)
§ 6.5 显示及记录仪器	(166)
§ 6.5.1 笔式记录仪	(166)
§ 6.5.2 磁带记录仪	(168)
第七章 振动测量技术	(172)
§ 7.1 振动测量技术引论	(172)
§ 7.1.1 振动测量的目的	(172)
§ 7.1.2 测量内容和测量前的准备工作	(172)
§ 7.1.3 测量系统的标定	(173)
§ 7.2 实船航行的振动测量	(174)
§ 7.2.1 测试条件及测点布置	(174)
§ 7.2.2 某舰尾部振动的测试	(175)
§ 7.3 旋转机械的振动测量	(177)
§ 7.3.1 传感器的选用	(177)
§ 7.3.2 转速测量	(178)
§ 7.3.3 旋转机械振动的测量与分析	(180)
§ 7.4 扭转振动的测量	(182)

§ 7.4.1 扭转振动测试原理	(182)
§ 7.4.2 扭振测量仪器	(183)
参考文献	(185)

第一章 单自由度系统的振动

§ 1.1 单自由度系统确定性振动

在对实际工程结构进行振动的研究时,通常都要将结构作某些简化,即把一个实际工程结构简化为某种理想化了的力学模型(或系统),然后再进行分析研究。

若在任何瞬间,振动系统在空间的位置可以由一个坐标来确定,则这样的系统称为具有一个自由度的系统。它是最简单的振动系统,如图 1.1 所示。图中, m 为质量块的质量; k 为弹簧刚度; c 为粘性阻尼系数; $f(t)$ 为干扰力或外力,有时也称激励或输入; $x(t)$ 为响应或输出,它表示质量块 m 从静平衡位置算起的位移。本节假定 m , k 和 c 都是常数。

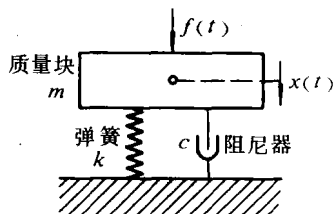


图 1.1 单自由度系统

研究单自由度系统振动的意义在于:

- (1) 一些实际的工程结构可以简化为一个单自由度系统。
- (2) 它是研究多自由度系统的基础。多自由度系统的问题往往可化为多个单自由度系统问题来求解。
- (3) 用它便于说明测量振动的传感器的原理。

§ 1.1.1 无阻尼自由振动

一、无阻尼自由振动的运动微分方程及其解

图 1.1 中,若外力 $f(t)$ 和阻尼 c 都为零,则系统的振动称为无阻尼自由振动。从牛顿第二定律或达朗贝尔原理可知,质量块 m 的运动微分方程为:

$$m \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.1)$$

它的解,位移 $x(t)$,有两种表示形式:三角级数形式,

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \quad (1.2)$$

指数形式,

$$x(t) = A \exp[j(\omega_n t + \theta)] \quad (1.3)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} j &= \sqrt{-1} \\ \omega_n &= \sqrt{k/m} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

ω_n 为系统的固有圆频率,简称固有频率。它只与系统的弹簧刚度 k 和质量 m 有关,而与运动的初始条件无关,所以它是系统固有的特性。

(1.2) 式中的常数 A_1 、 A_2 由运动的初始条件确定,即由时间 $t=0$ 时的初始位移 $x(0)$ 和初始速度 $\dot{x}(0)$ 来确定。(1.2) 式还可表示为:

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \theta) \quad (1.5)$$

式中,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (1.6)$$

$$\theta = \arctg \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \quad (1.7)$$

用单项的正弦函数或余弦函数表示的振动称为简谐振动。(1.5)式表明,无阻尼自由振动是简谐振动。 A 称为振幅或幅值。 $\omega_n t + \theta$ 称为相角或相位。 θ 称为初始相角或初相位。

简谐振动的周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (1.8)$$

$$\text{频率} \quad f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (1.9)$$

利用指数函数与三角函数之间的关系,(1.3)式又可表示为:

$$x(t) = A \exp[j(\omega_n t + \theta)] = A \cos(\omega_n t + \theta) + jA \sin(\omega_n t + \theta) \quad (1.10)$$

这表明, $A \exp[j(\omega_n t + \theta)]$ 的实部和虚部都表示一个简谐振动。只要规定取其虚部(或实部)来表示简谐振动,则前面的讨论都完全适用于(1.10)式。在理论分析中,位移、速度、加速度和力用指数形式来表示将更为简便。简谐振动的位移、速度和加速度的表达式为:

位移	$x(t) = A \sin(\omega_n t + \theta)$	} (1.11)
	$x(t) = A \exp[j(\omega_n t + \theta)]$	
速度	$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A \omega_n \cos(\omega_n t + \theta)$	
	$\dot{x}(t) = jA \omega_n \exp[j(\omega_n t + \theta)]$	
加速度	$\ddot{x}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -A \omega_n^2 \sin(\omega_n t + \theta)$	
	$\ddot{x}(t) = -A \omega_n^2 \exp[j(\omega_n t + \theta)]$	

二、简谐振动的表示方法

1. 简谐振动的图形表示

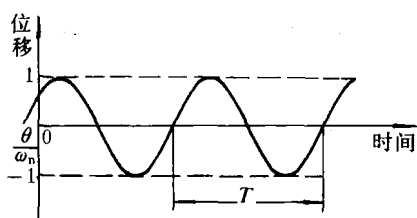


图 1.2 简谐振动的时间历程

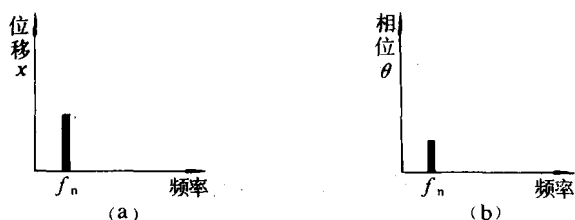


图 1.3 简谐振动的幅频图和相频图

在(1.5)式中,位移 $x(t)$ 随时间的变化如图 1.2 所示。有时也把图 1.2 所示的称为位移 x 的时间历程。

(1.10)式也可以用图 1.3 所示的表示。图 1.3 (a) 表示位移幅值与固有频率的关系。图 1.3(b)表示初相位与固有频率的关系。

2. 简谐振动的振幅表示

用振幅来描述简谐振动是十分方便的,因为它可以直接用于(1.5)式。在振动测量中,有时也用到 A_{p-p} 值,即峰峰值。它表示从波峰到波谷的高度。若 A 表示振幅,则 $A_{p-p} = 2A$ 。

在研究复杂的振动时,振幅有下面的几种表示方法。

(1) 平均值

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.12)$$

式中, T 为周期。对于简谐振动, $\bar{A} = 0$ 。

(2) 绝对平均值

$$|\bar{A}| = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (1.13)$$

对于简谐振动, $|\bar{A}| = 0.637A$ 。

(3) 均方值

$$\bar{A^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.14)$$

对于简谐振动, $\bar{A^2} = 0.5A^2$ 。

(4) 有效值 (均方根值, 即 rms 值)

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1.15)$$

对于简谐振动, $A_{rms} = 0.707A$ 。

在这些数值中有效值比较重要, 因为它与振动的能量有直接关系。图 1.4 所示的是简谐振动的各种幅值。

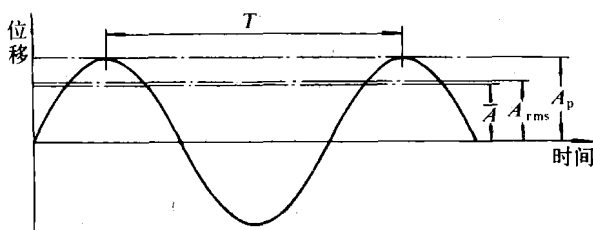


图 1.4 简谐振动的各种幅值

测振仪表指示振幅值通常有下列两种形式: (1) 线性指示; (2) 对数指示, 即以分贝 (dB) 表示。

用线性指示比较常见。但是, 当被测振幅的量级变化很大时, 用对数指示则比较方便。用对数指示有两个优点, 一是, 对于小振幅, 指示值比较精确, 而对于大振幅, 精确度较差, 但指示的动态范围很大; 二是, 当振动特性按指数规律变化时, 指示值是线性变化的。

国际标准 ISO 规定, 振动的位移速度和加速度的分贝数用下式表示:

$$L = 20 \lg \left(\frac{u}{u_0} \right) \quad (1.16)$$

式中, u 为被测的振动位移速度或加速度的幅值; u_0 为一给定的作为基准的位移速度或加速度的幅值。

§ 1.1.2 有阻尼自由振动

一、有阻尼自由振动的运动微分方程及其解

在图 1.1 所示的系统中, 若外力 $f(t) = 0$, 则该系统的振动称为有阻尼的自由振动。质量块 m 的运动微分方程可写成:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.17)$$

设上式的解为:

$$x(t) = A \exp(s t) \quad (1.18)$$

式中, s 为复数; A 为积分常数。

将(1.18)式代入方程(1.17)式, 得特征方程式:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (1.19)$$

通常,

$$c_c = 2 \sqrt{km} \quad (1.20)$$

称为系统的临界阻尼。它只与系统的物理性质 k 、 m 有关, 所以也是系统固有的特性。若 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 是系统的固有频率, 并令 $n = \frac{c}{2m}$, 则当阻尼比 $\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{n}{\omega_n} < 1$ 时, 称该系统为欠阻尼(本书只研究欠阻尼的情况)系统。此时特征方程的一对共轭复根 s_1, s_2 或 s_1, s_1^* 可写成:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -n + j\omega_d \\ s_2 &= s_1^* = -n - j\omega_d \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

式中,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.22)$$

称为有阻尼自由振动的频率; $j = \sqrt{-1}$ 。

将(1.21)式代入(1.18)式, 得到方程(1.17)式的解:

$$x(t) = e^{-nt} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] \quad (1.23)$$

式中, A_1, A_2 是积分常数, 由初始条件确定。

设初始条件为:

$$x(0) = x_0$$

则(1.23)式可写成:

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$x(t) = e^{-nt} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad (1.24)$$

$$\text{或} \quad x(t) = A e^{-nt} \cos(\omega_d t - \theta) \quad (1.25)$$

$$\text{式中,} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad (1.26)$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\omega_d x_0} \right) \quad (1.27)$$

特征方程的共轭复根 s_1, s_1^* 就是用复数表示的固有频率, 也称复固有频率。从图1.5中可以看出它们的物理意义。其虚部, 即 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 是系统的振荡频率。其实部, 即 $-n = -\omega_n \zeta$, 称为衰减率。 $A \exp(-\omega_n \zeta t)$ 曲线是振荡曲线的外包络线。复固有频率的实部表示该包络线的衰减速率。 A 是外包络线与纵坐标轴的交点, 或是外包络线在纵坐标轴上的截距。

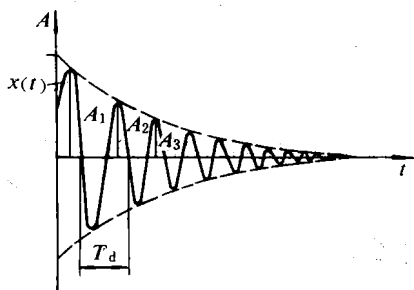


图 1.5 阻尼自由振动时间历程

二、有阻尼自由振动的对数衰减率

有阻尼自由振动的振动过程是一个衰减的振荡过程, 严格地说, 它不是周期运动, 也没有运动周期。通常对有阻尼自由振动仍然定义了运动周期 T_d 。它的物理意义是: 系统相邻两次振动从同一方向通过其平衡位置的时间间隔, 即

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (1.28)$$

除用衰减率 $-n$ 外,还经常用对数衰减率 δ 来描述有阻尼自由振动的衰减过程。它定义为相邻两个正的振幅值 A_i 和 A_{i+1} 之比的对数,即

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} \quad (1.29)$$

将(1.25)式和(1.28)式代入上式,得

$$\delta = nT_d = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (1.30)$$

若阻尼比 ξ 是一个很小的值,则上式可近似地表示为:

$$\delta \approx 2\pi\xi \quad (1.31)$$

当采用自由衰减振动的方法来测定结构的阻尼时,为了提高精度,常采用下面的公式计算 δ :

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{A_i}{A_{i+N}} \quad (1.32)$$

可以证明,(1.32)式与(1.29)式是完全等价的。

§ 1.1.3 有阻尼强迫振动

一、简谐外力作用下的强迫振动

1. 运动微分方程及其解

图1.1所示的系统,在外力 $f(t) = f \exp(j\omega t)$ 作用下的振动称为有阻尼强迫振动。质量块 m 的运动微分方程为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f \exp(j\omega t) \quad (1.33)$$

当只考虑系统的稳态强迫振动时,设上式的解为:

$$x(t) = x \exp(j\omega t) \quad (1.34)$$

式中, x 、 f 都是复数

将(1.34)式代入方程(1.33)式,得

$$(k - m\omega^2 + j\omega c)x \exp(j\omega t) = f \exp(j\omega t)$$

$$\frac{x \exp(j\omega t)}{f \exp(j\omega t)} = \frac{x}{f} = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\omega c} = H(\omega) \quad (1.35)$$

则解

$$x(t) = H(\omega) f \exp(j\omega t) \quad (1.36)$$

式中, $H(\omega)$ 为系统的频率响应函数,简称频响函数,又称为位移导纳 M^D 。(1.35)式表明, $H(\omega)$ 是复函数, $H(\omega)$ 的模是振动位移与激振力的幅值之比, $H(\omega)$ 的相位是振动位移与激振力的相位之差。

由(1.36)式可知,稳态响应 $x(t)$ 的振动频率与外力的频率相同。这称为频率的保守性。

2. 频率响应函数的其它表达式

(1.35)式表示的频响函数是复数形式。它还可以改写成其它的形式。

(1) 用实部和虚部表示

$$H(\omega) = \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2} + j \frac{-m\omega c}{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2} \quad (1.37)$$

(2)用幅值和相位表示

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (\omega c)^2}} = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}} \quad (1.38)$$

$$\theta = \arctg \frac{-\omega c}{k-m\omega^2} = -\arctg \frac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2} \quad (1.39)$$

式中,

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\zeta = \frac{n}{\omega_n}$$

此时,

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta} \quad (1.40)$$

3. $H(\omega)$ 的物理意义及图形

(1.35)式表明, $H(\omega)$ 只与系统的物理参数 m, k 和 c 有关,而与外界的干扰力无关,所以它是系统固有的特性。由(1.35)式,可以将 $H(\omega)$ 理解为: $H(\omega)$ 是在外力 $f(t) = fe^{j\omega t}$ 时,在 f 是实数,且 $f=1$ 时的系统稳态响应;或者 $H(\omega)$ 是在幅值为 1 的正弦力作用下的系统稳态响应;从(1.35)式, $H(\omega)$ 还可理解为响应的复数值与激励复数值之比。

$H(\omega)$ 的幅值与频率的关系,相位与频率的关系分别如图 1.6(a)和图 1.6(b)所示。

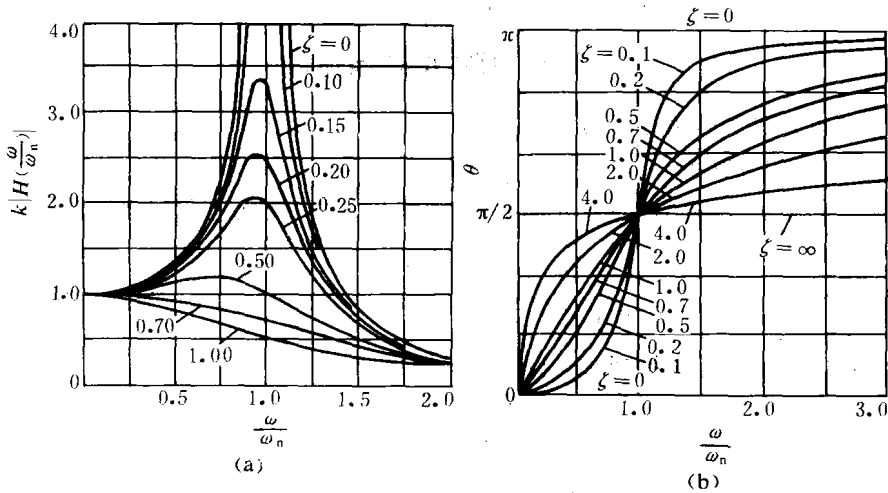


图 1.6 单自由度系统的幅频、相频曲线

从图 1.6(a)中可以看出:

(1) $\zeta=0$ 的曲线是无阻尼强迫振动的频率响应曲线。当 $\omega=\omega_n$, 即干扰力的频率与系统的固有频率相等时, 产生共振, 系统的响应为无限大。

(2) 若阻尼比 $0 < \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则当 $\omega = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 时, 系统的 $H(\omega)$ 有最大值, 此时的振动称为位移共振, 对应的频率称为位移共振频率。有阻尼系统共振响应的 $H(\omega)$ 值为有限值, 无阻尼系统共振响应的 $H(\omega)$ 值为无限值, 这是两者的本质差别。随着阻尼比 ζ 增大, 系统的响应就变小, 阻尼有抑制响应的作用。

(3) 图 1.7 所示的是在图 1.6(a)中 ζ 为小值时的一条曲线。在该曲线上 $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \cdot |H(\omega_n)|^2$ 的 A 点和 B 点称为半功率点。设 A、B 两点对应的频率分别为 ω_1 和 ω_2 , 则 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ 称为系统的半功率带宽。可以证明, 当 ζ 是小值时,

$$\frac{1}{2\zeta} \approx \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} \quad (1.41)$$

$$\text{或} \quad \zeta \approx \frac{\Delta\omega}{2\omega_n} \quad (1.42)$$

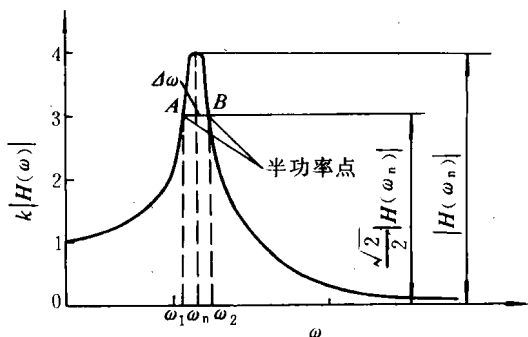


图 1.7 半功率点

从图 1.6(b)中可以看到:

(1) 对于 $\zeta=0$ 的无阻尼情况, 当 $\omega < \omega_n$, 即干扰力的频率低于固有频率时, 相位 $\theta=0^\circ$; 当 $\omega > \omega_n$ 时, 相位 $\theta=-180^\circ$ 。

(2) 当 $\omega=\omega_n$ 时, 不论 ζ 为何值, $\theta=-90^\circ$, 即位移滞后于干扰力 90° 。这称为相位共振。

4. 其它的频率响应函数

简谐振动的位移速度和加速度之间存在着如 (1.11) 式所示的简单关系。与 (1.32) 式

相似, 还可以定义:

$$\begin{aligned} M^D = H(\omega) &= \frac{\text{位移的复数式}}{\text{力的复数式}} \\ &= \frac{x \exp(j\omega t)}{f \exp(j\omega t)} \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} M^V = \dot{v}(\omega) &= \frac{\text{速度的复数式}}{\text{力的复数式}} \\ &= \frac{\dot{x} \exp(j\omega t)}{f \exp(j\omega t)} = j\omega \frac{x \exp(j\omega t)}{f \exp(j\omega t)} = j\omega H(\omega) \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} M^A = A(\omega) &= \frac{\text{加速度的复数式}}{\text{力的复数式}} \\ &= \frac{\ddot{x} \exp(j\omega t)}{f \exp(j\omega t)} = -\omega^2 \frac{x \exp(j\omega t)}{f \exp(j\omega t)} = -\omega^2 H(\omega) \end{aligned} \quad (1.45)$$

M^D 、 M^V 和 M^A 分别称为位移导纳, 速度导纳和加速度导纳。

导纳的倒数定义为机械阻抗。机械阻抗也可分为, 位移、速度和加速度的机械阻抗, 即位移阻抗

$$Z^D = \frac{\text{力的复数式}}{\text{位移的复数式}} \quad (1.46)$$

速度阻抗

$$Z^V = \frac{\text{力的复数式}}{\text{速度的复数式}} \quad (1.47)$$

加速度阻抗

$$Z^A = \frac{\text{力的复数式}}{\text{加速度的复数式}} \quad (1.48)$$

5. 导纳的常用表示形式

在实际测量频响函数时, 几乎都是用导纳来表示的, 因为对于多自由度系统各种阻抗的测量几乎是不可能的。导纳有如下三种常用的表示形式。

(1) 实频图和虚频图

实频图是导纳的实部随频率变化而变化的图形。虚频图是导纳的虚部随频率变化而变化的图形。小粘性阻尼单自由度系统的位移导纳、速度导纳和加速度导纳的实频图和虚频图分别如图 1.8(a)、(b)、(c) 所示。

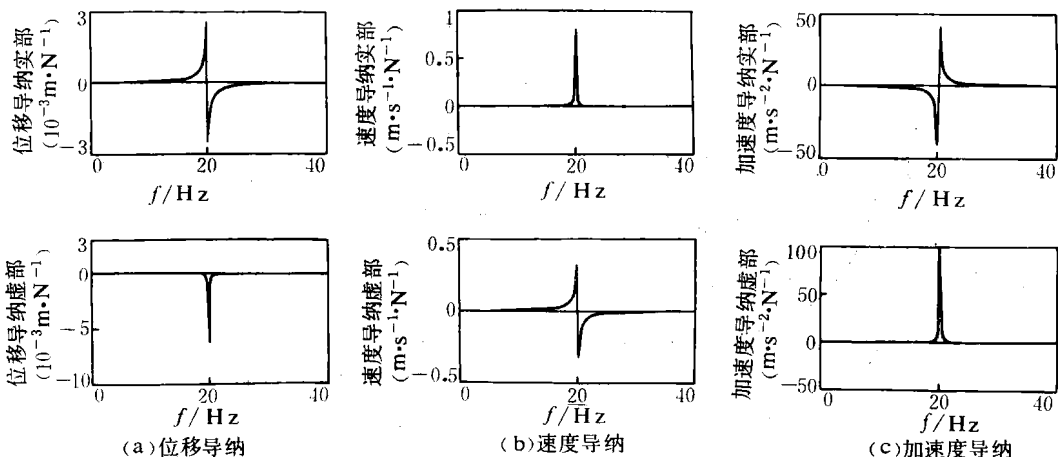


图 1.8 导纳的实部和虚部

从图中可以看到,在共振点, $f=20\text{Hz}$ 的附近,若一个图形的实部(或虚部)的符号改变,则对应的虚部(或实部)将处于极大值或极小值。

(2) 幅频图和相频图

幅频图是导纳的幅值与频率的关系图,即幅频特性图。相频图是导纳的相位与频率的关系图,即相频特性图。单自由度系统的幅频图和相频图如图 1.9 所示。当实测的数据变化范围较宽时,幅频和相频特性都可采用双对数坐标来表示,这样的图形称为 Bode 图,如图 1.10 所示。

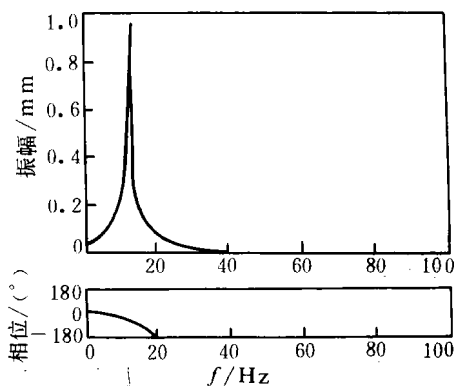


图 1.9 幅频和相频图(线性坐标)

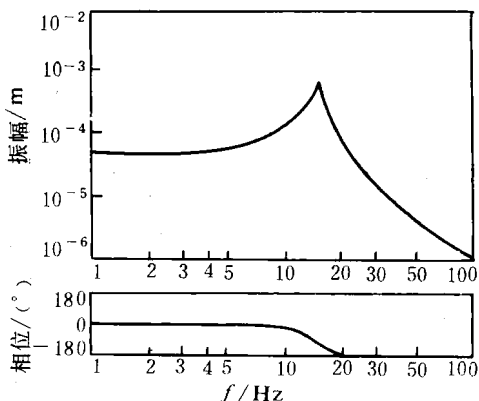


图 1.10 幅频和相频图(对数坐标)

(3) 矢端图(或 Nyquist 图)

以导纳的实部为横坐标,虚部为纵坐标,将导纳的实部和虚部画在同一张图上,这样的图称为矢端图。小粘性阻尼单自由度系统的位移导纳、速度导纳和加速度导纳分别如图 1.11 (a)、(b)、(c)所示。图中的每一点都要标明对应的频率。矢端图在识别系统的共振频率和阻尼时特别有用。

可以证明,图 1.11 中速度导纳的轨迹是一个圆。

将(1.35)式代入(1.44)式,得

$$M^v = j\omega M^b = \frac{j\omega}{k - \omega^2 m + j\omega c} = \frac{\omega^2 c + j\omega(k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} \quad (1.49)$$

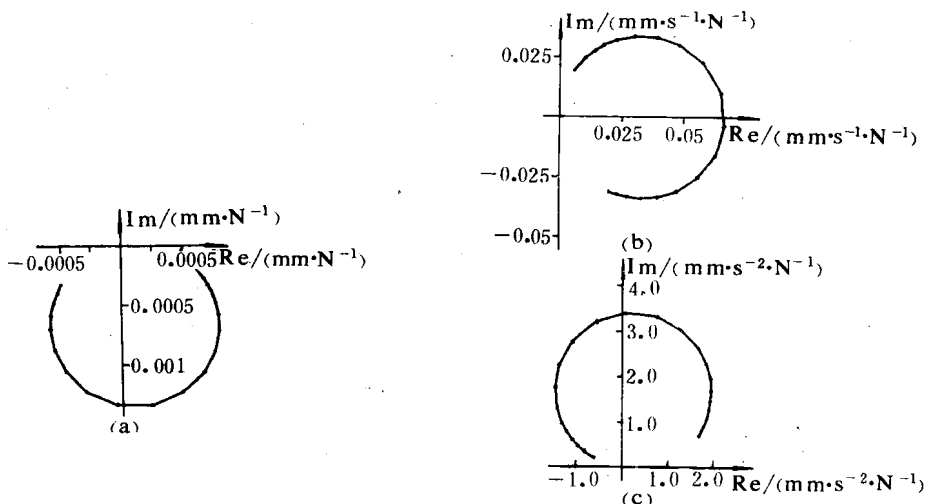


图 1.11 导纳的矢端图

M^v 的实部 $\text{Re}M^v$ 和虚部 $\text{Im}M^v$ 分别为:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}M^v &= \frac{\omega^2 c}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} \\ \text{Im}M^v &= \frac{\omega (k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

因此,
$$\left[\text{Re}M^v - \frac{1}{2c} \right]^2 + [\text{Im}M^v]^2 = \frac{[(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2]^2}{4c^2 [(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2]^2} = \left(\frac{1}{2c} \right)^2 \quad (1.51)$$

由(1.51)式可知, M^v 的矢端图轨迹是一个圆, 圆的半径为 $\frac{1}{2c}$, 圆心的坐标为 $\left(\frac{1}{2c}, 0 \right)$ 。

二、由基础运动所引起的强迫振动及惯性传感器的基本理论

1. 由基础运动所引起的强迫振动

对于图 1.12 所示的系统, 当支座运动时, 系统也会产生振动。设基础的绝对位移为 $z_1(t)$, 质量块 m 的绝对位移为 $z_0(t)$, 质量块 m 对基础的相对位移为 $z_{01}(t)$, 则

$$z_0(t) = z_1(t) + z_{01}(t) \quad (1.52)$$

质量块 m 的运动微分方程为:

$$m \frac{d^2 z_0(t)}{dt^2} + c \frac{dz_{01}(t)}{dt} + k z_{01}(t) = 0 \quad (1.53)$$

将(1.52)式代入(1.53)式, 得

$$m \frac{d^2 z_0(t)}{dt^2} + c \frac{dz_{01}(t)}{dt} + k z_{01}(t) = c \frac{dz_1(t)}{dt} + k z_1(t) \quad (1.54)$$

或

$$m \frac{d^2 z_{01}(t)}{dt^2} + c \frac{dz_{01}(t)}{dt} + k z_{01}(t) = -m \frac{d^2 z_1(t)}{dt^2} \quad (1.55)$$

图 1.12 基础激励的单自由度系统

2. 惯性式传感器的基本理论

由质量弹簧和粘性阻尼器组成的用于振动测量的系统称为惯性式测振系统。若一个传感器可以简化为如图 1.13 所示的力学模型, 则这种传感器称为惯性式传感器。

在振动测量时, 传感器的壳体紧固在被测物体上, 并一起振动。由于被测物体的振动, 惯性系统也产生受迫振动。质量块 m 的运动微分方程如方程(1.54)式或(1.55)式。

考察下面三种情况:

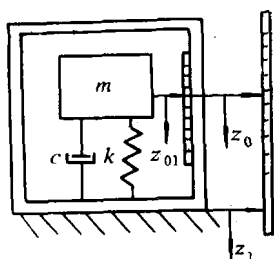


图 1.13 惯性式传感器的力学模型

(1) 将壳体的位移 $z_1(t)$ 作为系统的输入, 相对位移 z_{01} 作为输出, 这相当于位移传感器。

(2) 将壳体的绝对速度 $\frac{dz_1(t)}{dt}$ 作为系统的输入, 质量块对基础的相对速度 $\frac{dz_{01}(t)}{dt}$ 作为输出, 这相当于速度传感器。

(3) 将壳体的加速度 $\frac{d^2 z_1(t)}{dt^2}$ 作为系统的输入, 质量块的相对位移 $z_{01}(t)$ 作为输出, 这相当于加速度传感器。

从理论上讲, 总是希望传感器具有下列良好的特性:

(1) 在尽可能宽的测量频率范围内, 传感器的频响函数保持为常数, 测得的振幅能反映真实的振幅。

(2) 在相位方面, 对于具有多频率成分的波形, 要求准确地反映各频率成分之间的相位关系, 测量结果不产生波形失真。

对于简谐振动, 传感器输出信号的相位比输入信号的相位滞后的角度称为相位差。若在振动测量的频率范围内, 传感器的相位差为零, 或者为 180° , 或者相位差随频率成线性变化, 则可以保证测量的相位不产生失真。例如, 若传感器的输入信号为:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \cos(\omega t) + \cos(2\omega t) \quad (1.56)$$

则传感器的输出信号为:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \cos(\omega t + \theta_1) + \cos(2\omega t + \theta_2) \quad (1.57)$$

假定传感器的相位差与振动频率成线性关系, 即 $\theta_1 = a\omega, \theta_2 = a2\omega$, 其中 a 为常数, 那么

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\omega t + a\omega) + \cos(2\omega t + a2\omega) \\ &= \cos[\omega(t+a)] + \cos[2\omega(t+a)] \end{aligned} \quad (1.58)$$

比较(1.56)式和(1.58)式可知, 输出信号与输入信号只是在时间轴上向后移动了一个数量 a (若 $a=0$, 即为无相位差的情况), 而图形完全不变。

下面考察位移传感器、速度传感器和加速度传感器的频响函数、幅频特性和相频特性。

设被测物体的振动为 $z_1(t) = z_1 \exp(j\omega t)$, 相对运动为 $z_{01}(t) = z_{01} \exp(j\omega t)$, 则由(1.55)式和(1.43)式, 得位移传感器的频响函数为:

$$H(\omega) = \frac{z_{01}(t)}{z_1(t)} = \frac{z_{01}}{z_1} = \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2 + j2\zeta\gamma} \quad (1.59)$$

速度传感器的频响函数为:

$$\frac{dz_{01}(t)/dt}{dz_1(t)/dt} = \frac{j\omega z_{01} \exp(j\omega t)}{j\omega z_1 \exp(j\omega t)} = \frac{z_{01}}{z_1} = H(\omega)$$

由此可见, 位移传感器和速度传感器的频响函数是相同的。它的幅频特性 $|H(\omega)|$ [图 1.14(a)] 和相频特性 [图 1.14(b)] 为:

$$|H(\omega)| = \frac{\gamma^2}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}} \quad (1.60)$$

$$\theta(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\gamma}{1 - \gamma^2} \quad (1.61)$$

式中, $\gamma = \frac{\omega}{\omega_n}$ 为频率比; ω 为基础振动频率; $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 为传感器的固有频率; $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ 为阻尼比。