21世纪高等学校规划教材

复变函数与积分变换

FU BIAN HAN SHU YU
JI FEN BIAN HUAN

《复变函数与积分变换》编写组

FU BIAN HAN SHU YU JI FEN BIAN HUAN

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

复变函数与积分变换

《复变函数与积分变换》编写组

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本书介绍复变函数与积分变换的基本概念、理论和方法.内容包括:复数及复平面、解析函数、复积分、解析函数的级数理论、留数理论、共形映射理论、傅里叶变换、拉普拉斯变换和快速傅里叶变换.每一章给出本章的小结,并配有一定数量的习题,附录中给出习题的答案,便于读者复习和总结.

本书可作为高等学校理工科专业“复变函数与积分变换”课程的教材,也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/《复变函数与积分变换》编写组编.—北京:北京邮电大学出版社,2009

ISBN 978-7-5635-1657-5

Ⅰ.复… Ⅱ.复… Ⅲ.复变函数;积分变换 Ⅳ.O174.5;O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 029868 号

书　　名	复变函数与积分变换
主　　编	《复变函数与积分变换》编写组
责任编辑	付小霞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-62282185(发行部)　010-62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京忠信诚胶印厂
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	12.75
字　　数	257 千字
版　　次	2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1657-5　　**定价:20.00 元**

前　言

复变函数与积分变换的理论和方法已被广泛地应用于自然科学的众多领域，如电子工程、控制工程、理论物理、流体力学、热力学. 随着计算机科学的飞速发展，数字化已成为现代科学发展的一个重要的方向，数字信号处理应用的领域会越来越广，对数字信号处理的理论和技术也就有更多的需求. 因此，复变函数与积分变换的基本理论和方法是高等院校理工科类学生必须具备的数学基础知识之一.

本书要求的预备知识是微积分的全部内容. 本书主要介绍复变函数与积分变换的基本的概念、理论和方法. 在引入复变函数的极限概念时，我们采用了严格的定义. 当阅读关于极限的一些定理证明感到比较困难时，可以先不要看这些证明，有关这些定理的结论，可以通过比较一元或多元微积分中对应的定理来理解. 柯西-古萨定理的证明比较复杂，本书没有涉及. 一些比较深的内容，例如关于共形映射的黎曼定理等，也没有写入本书，如读者有兴趣，可以从参考书中找到. 关于单位脉冲函数，我们尽可能让问题变得容易理解，因此从数学定义和物理背景上都作了解释. 积分变换的应用主要是线性时不变系统中的应用，但是基于本书的篇幅，没有涉及太多，读者也可以从所列的参考书中找到. 我们第一次将离散傅里叶变换和快速傅里叶变换写入书中，因为它们是数字信号处理的基础，考虑课时的限制，写得比较简略. 对这些内容的学习，要考虑把计算机的实现作为一个主要目标. 书中带星号的为比较难的内容，可以不放在课堂上讲，带星号的练习题不要求做. 本书中定理的证明，若学时紧张，可以不讲.

本书由马柏林、李丹衡、晏华辉主编，参加编写的人员有：邓浏睿、孟伟、张同全. 廖茂新、刘修生对本书的部分内容进行了审查和修改.

本教材的编写是很多教师多年教学实践的结晶，他们付出了大量的辛勤劳动；并有许多同行给本书提出了很好的建议，在此一并表示真诚的感谢.

教材中不妥之处在所难免，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵的意见.

编　者

目　录

第一章　复数和复平面 …… 1

§1.1　复　数 …… 1

§1.2　复平面点集 …… 7

§1.3　扩充复平面及其球面表示 …… 9

小　结 …… 10

习题一 …… 10

第二章　解析函数 …… 13

§2.1　复变函数的概念、极限与连续性 …… 13

§2.2　解析函数的概念 …… 20

§2.3　函数可导与解析的充要条件 …… 24

§2.4　初等函数 …… 26

小　结 …… 35

习题二 …… 36

第三章　复变函数的积分 …… 39

§3.1　复变函数积分的概念 …… 39

§3.2　柯西-古萨定理及其推广 …… 44

§3.3　柯西积分公式及其推论 …… 50

§3.4　解析函数与调和函数的关系 …… 55

小　结 …… 58

习题三 …… 60

第四章　解析函数的级数表示法 …… 62

§4.1　复数项级数 …… 62

§4.2　幂级数 …… 66

§4.3　解析函数的泰勒展开 …… 71

§4.4　解析函数的洛朗展式 …… 76

§4.5　孤立奇点 …… 80

小　结 …… 84

习题四 …… 87

第五章　留数理论及其应用 …… 90

§5.1　留　数 …… 90

§5.2 留数在积分计算上的应用 …… 96
小　结 …… 103
习题五 …… 105
第六章　共形映射 …… 106
§6.1 分式线性变换 …… 106
§6.2 确定分式线性变换的条件 …… 109
§6.3 共形映射 …… 112
§6.4 几个初等函数所构成的映射 …… 116
小　结 …… 119
习题六 …… 120
第七章　傅里叶变换 …… 122
§7.1 傅里叶变换 …… 122
§7.2 单位脉冲函数及其傅里叶变换 …… 129
§7.3 傅里叶变换的性质 …… 134
§7.4 卷　积 …… 138
小　结 …… 140
习题七 …… 141
第八章　拉普拉斯变换 …… 143
§8.1 拉普拉斯变换定义 …… 143
§8.2 拉普拉斯变换的性质 …… 149
§8.3 拉普拉斯逆变换 …… 157
* §8.4 拉普拉斯变换的应用 …… 161
小　结 …… 164
习题八 …… 165
*** 第九章　快速傅里叶变换** …… 167
§9.1 离散时间傅里叶变换 …… 167
§9.2 *Z* 变换简介 …… 170
§9.3 离散傅里叶变换 …… 171
§9.4 快速傅里叶变换 …… 174
小　结 …… 178
习题九 …… 180
附录一　傅里叶变换简表 …… 181
附录二　拉普拉斯变换主要公式表 …… 184
附录三　拉普拉斯变换简表 …… 185
附录四　习题参考答案 …… 191
参考文献 …… 198

第一章　复数和复平面

本章介绍复数的定义、运算，复平面点集和扩充复平面，为后面的复变函数的研究作准备.

§1.1　复　数

1. 复数的概念

形如

$$z = a + ib \text{ 或 } z = a + bi$$

的数称为**复数**，其中 a 和 b 为实数，i 称为**虚单位**，即是满足 $i^2 = -1$. 全体复数的集合称为复数集，用 **C** 表示.

在复数 $z = a + ib$ 中，a 与 b 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作

$$a = \mathrm{Re}\, z, \quad b = \mathrm{Im}\, z.$$

当且仅当虚部 $b = 0$ 时，$z = a$ 是实数；当且仅当 $a = b = 0$ 时，z 是实数 0；当虚部 $b \neq 0$ 时，z 称为**虚数**；当实部 $a = 0$ 且虚部 $b \neq 0$ 时，$z = ib$ 称为**纯虚数**.

显然，实数集 **R** 是复数集 **C** 的真子集.

如果两个复数的实部和虚部分别相等，我们称这两个复数相等. 这样，一个复数等于零，当且仅当它的实部和虚部同时等于零. 一般情况下，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小.

2. 复数的向量表示和复平面

根据复数相等的定义，我们知道，任何一个复数 $z = a + ib$，都可以由一个有序实数对 (a, b) 唯一确定；我们还知道，有序实数对 (a, b) 与平面直角坐标系中的点是一一对应的. 由此，可以建立复数集与平面直角坐标系中的点集之间的一一对应.

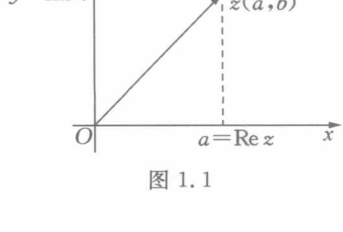

图 1.1

如图 1.1 所示，点 z 的横坐标是 a，纵坐标是 b，复数 $z =$

$a+\mathrm{i}b$ 可用点$z(a,b)$表示，这个建立了用直角坐标系表示的复数的平面称为复平面，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴. 显然，实轴上的点表示实数；除了原点外，虚轴上的点表示纯虚数. 今后，我们说点 $z(a,b)$，与复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 表示同一意义.

当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为**共轭复数**. 复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示，即：如果 $z=a+\mathrm{i}b$，则$\bar{z}=a-\mathrm{i}b$. 当复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的虚部 $b=0$ 时，有 $z=\bar{z}$，即任一实数的共轭复数仍是它本身.

在复平面上，复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 还可以用由原点引向点 z 的向量$\overrightarrow{Oz}$来表示，这种表示方式建立了复数集 **C** 与平面向量所成的集合的一一对应(实数 0 与零向量对应). 向量$\overrightarrow{Oz}$的长度称为复数 z 的**模**，记为$|z|$或 r，因此有

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0. \tag{1.1}$$

显然，$|\operatorname{Re} z|\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$，$|\operatorname{Im} z|\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$.

3. 复数的运算

设复数 $z_1=a+\mathrm{i}b$，$z_2=c+\mathrm{i}d$，则加法由下式定义：

$$z_1+z_2=(a+c)+\mathrm{i}(b+d). \tag{1.2}$$

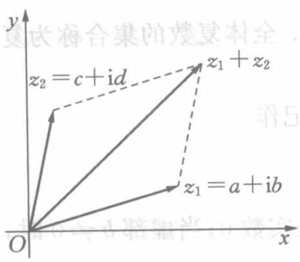

图 1.2

容易看出，这样定义后，复数的加法就可以按照向量的平行四边形法则来进行，如图 1.2 所示. 规定复数的减法是加法的逆运算，即是把满足

$$(c+\mathrm{i}d)+(x+\mathrm{i}y)=a+\mathrm{i}b$$

的复数 $x+\mathrm{i}y$，称为复数 $a+\mathrm{i}b$ 减去复数 $c+\mathrm{i}d$ 的差，记作$(a+\mathrm{i}b)-(c+\mathrm{i}d)$. 容易得到

$$x+\mathrm{i}y=(a-c)+\mathrm{i}(b-d). \tag{1.3}$$

复数的乘法定义如下：

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=ac+\mathrm{i}bc+\mathrm{i}ad+\mathrm{i}^2bd\\ &=(ac-bd)+\mathrm{i}(bc+ad). \end{aligned} \tag{1.4}$$

由乘法的定义，容易得到 $|z|^2=z\cdot\bar{z}$. 于是，当 $z_2\neq 0$ 时，除法作为乘法的逆运算，可以定义为

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2}&=\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}\\ &=\frac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{(c+\mathrm{i}d)(c-\mathrm{i}d)}\\ &=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\mathrm{i}\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

容易验证,加法和乘法满足结合律、交换律及乘法对加法的分配律.所以,全体复数在定义上述运算后称为复数域.在复数域内,我们熟悉的一切代数恒等式仍然成立,例如

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

等等.

复数的模和共轭复数有下面的性质,其证明留给读者.

(1) $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$;

(2) $\overline{(z+w)} = \bar{z}+\bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$ $(w \neq 0)$;

(3) $|zw| = |z||w|$;

(4) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$;

(5) $|\bar{z}| = |z|$.

4. 复数的三角表示和复数的方根

考虑复平面 $\mathbf{C}$ 的不为零的点 $z = x+\mathrm{i}y$. 如图 1.3 所示,这个点有极坐标 (r,θ): $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. 显然 $r = |z|$, θ 是正实轴与从原点 O 到 z 的射线的夹角,称为复数 z 的**辐角**,记为

$$\theta = \operatorname{Arg} z.$$

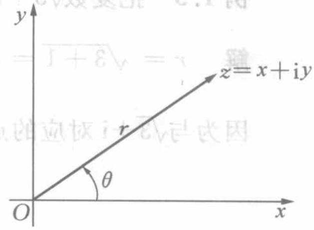

图 1.3

显然有 $\tan\theta = \dfrac{y}{x}\left(\theta \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right)$.

任一非零复数 z 的辐角有无限多个值,这些值相差 2π 的整数倍.通常把满足条件

$$-\pi < \theta \leqslant \pi \tag{1.6}$$

的辐角 θ 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值,记为 $\theta = \arg z$. 于是有

$$\theta = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{1.7}$$

利用极坐标表示,复数 z 可以表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.8}$$

(1.8)式称为复数的**三角表示式**. 再应用欧拉(Euler)公式: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 又可以将复数 z 写成**指数表示式**

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.9}$$

例 1.1 求 $\mathrm{Arg}(-3-\mathrm{i}4)$.

解 由(1.7)式可知

$$\mathrm{Arg}(-3-\mathrm{i}4)=\arg(-3-\mathrm{i}4)+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

再由 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，点 $-3-\mathrm{i}4$ 位于第三象限知，

$$\arg(-3-\mathrm{i}4)=\arctan\frac{(-4)}{(-3)}-\pi=\arctan\frac{4}{3}-\pi,$$

所以有

$$\mathrm{Arg}(-3-\mathrm{i}4)=\arctan\frac{4}{3}+(2k-1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

例 1.2 计算 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

解 因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$，所以

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1.$$

例 1.3 把复数$\sqrt{3}+\mathrm{i}$表示成三角形式和指数形式.

解 $r=\sqrt{3+1}=2$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为与$\sqrt{3}+\mathrm{i}$对应的点在第一象限，所以 $\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{6}$. 于是

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

于是可得指数表示式为

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

下面利用复数的三角表示式，讨论复数乘法的几何意义. 设复数 z_1，z_2 分别写成三角形式

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2).$$

根据复数的乘法法则及正弦、余弦的三角公式，有

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_2+\theta_2)].\end{aligned}$$

上面我们得到的三角形式的公式，用指数形式表示出来，可得

$$z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1.10}$$

由此得

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \tag{1.12}$$

图 1.4 说明了复数相乘的几何意义，两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于这两个复数的辐角的和.

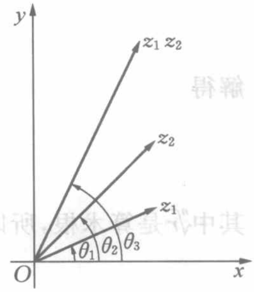

图 1.4

注　(1.12)式不能写成 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$，这是因为 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 两边表示的都是辐角的主值，而(1.12)式两边表示的都是无穷集合.

由(1.11)式、(1.12)式可得

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2|,\ \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} + \operatorname{Arg} z_2,$$

即是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{1.13}$$

由此可见，两个复数的商的模等于它们模的商，商的辐角等于被除数的辐角与除数的辐角的差.

现在我们来讨论复数的乘方和开方问题. 设复数 $z = re^{i\theta}$，它的 n 次幂可利用(1.10)式由归纳得

$$\begin{aligned} z^n &= (r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta))^n = r^n(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n \\ &= r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \\ &= r^n e^{\mathrm{i}n\theta}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

从而有

$$|z^n| = |z|^n,$$

其中 n 为正整数. 当 $r = 1$ 时，得棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1.15}$$

复数的 n 次方根是复数 n 次乘幂的逆运算. 下面我们介绍复数的 n 次方根的定义和求法.

设 $z = re^{i\theta}$ 是已知的复数，n 为正整数，则称满足方程

$$\omega^n = z$$

的所有的复数 ω 为 z 的 n 次方根，并且记为

$$\omega = \sqrt[n]{z}.$$

我们用复数的指数表示来讨论复数的 n 次方根. 步骤是:先假定有 n 次方根,再找出这些根.

设 $\omega = \rho e^{i\varphi}$,则根据复数 z 的 n 次方根的定义和(1.13)式,得

$$\omega^n = \rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta},$$

记 $\theta_0 = \arg z$,则有

$$\rho^n = r,\ n\varphi = \theta_0 + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

解得

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n},\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,$$

其中$\sqrt[n]{r}$是算术根,所以

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1. \tag{1.16}$$

若记 $\omega_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta_0}{n}}$,则 ω_k 可表示为

$$\omega_k = \omega_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1. \tag{1.17}$$

这就是说,复数的 n 次方根是 n 个复数,这些方根的模都等于这个复数的模的 n 次算术根,它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 倍的和的 n 分之一. 在复平面上,这 n 个根均匀分布在一个以原点为中心、$\sqrt[n]{r}$为半径的圆周上,它们是内接于该圆周的正 n 边形的 n 个顶点,见图 1.5.

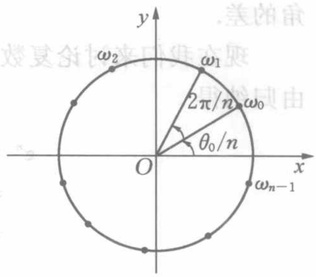

图 1.5

例 1.4　求 $1-i$ 的立方根.

解　因为 $1 - i = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$,所以 $1-i$ 的立方根是

$$\sqrt[6]{2} e^{i\frac{7\pi/4 + 2k\pi}{3}} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{7\pi + 8k\pi}{12}},\ k = 0,\ 1,\ 2.$$

即 $1-i$ 的立方根是

$$\sqrt[6]{2} e^{\frac{7}{12}\pi i},\ \sqrt[6]{2} e^{\frac{5}{4}\pi i},\ \sqrt[6]{2} e^{\frac{23}{12}\pi i}.$$

例 1.5　计算 n 次单位根.

解　$1 = e^{i0}$,(1.16)式给出如下这些根:

$$1,\ e^{i\frac{2\pi}{n}},\ e^{i\frac{4\pi}{n}},\ \cdots,\ e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

特别地,立方单位根是

$$1,\ \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

§1.2 复平面点集

我们研究的许多对象——解析函数、共形变换等问题，首先遇到的是定义域和值域的问题，这些都是复平面上的一种点集. 在此，我们先介绍复平面上的点集.

1. 平面点集的几个概念

(1) **邻域** 集合

$$D(z_0, \delta) = \{z: |z - z_0| < \delta\} \tag{1.18}$$

称为 z_0 的 δ 邻域，其中 $\delta > 0$.

$$D(z_0, \delta) \backslash \{z_0\} = \{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

称为 z_0 的去心邻域.

(2) **内点、开集** 若点集 E 的点 z_0，有一个 z_0 的邻域 $D(z_0, \delta) \subset E$，则称 z_0 为 E 的一个内点. 如果点集 E 中的点全为内点，则称 E 为开集.

(3) **边界点、边界** 如果点 z_0 的任意邻域内，既有属于 E 中的点，又有不属于 E 中的点，则称 z_0 为 E 的边界点. 集合 E 的所有边界点所组成的集合称为 E 的边界，记作 ∂E.

(4) **区域** 如果点集 E 内的任何两点可以用包含在 E 内的一条折线连接起来，则称集 E 为连通集. 连通的开集称为区域.

区域 D 和它的边界 ∂D 的并集称为**闭区域**，记为 $\overline{D}$.

(5) **有界区域** 如果存在正数 M，使得对一切 $z \in E$，有

$$|z| \leqslant M,$$

则称 E 为**有界集**. 若区域 D 有界，则称为有界区域.

(6) **简单曲线、光滑曲线** 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是实变量 t 的两个实函数，它们在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续，则由方程组

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

或由复值函数

$$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$$

定义的集合 Γ 称为复平面上的一条曲线，上述方程称为曲线 Γ 的参数方程. 点 $A = z(\alpha)$ 和 $B = z(\beta)$ 分别称为曲线 Γ 的起点和终点. 如果当 $t_1 \in (\alpha, \beta)$，$t_2 \in [\alpha, \beta]$，$t_1 \neq t_2$ 时，有 $z(t_1) \neq z(t_2)$，称曲线 Γ 为简单曲线，也称为约当(Jordan)曲线. 如果 Γ 的两端点 $z(\alpha)$，$z(\beta)$ 重合，亦即 $z(\alpha) = z(\beta)$，那么简单曲线 Γ 称为简单闭曲线. 例如圆周

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$$

就是简单闭曲线.如图 1.6 所示,用复数表示为

$$|z| = r.$$

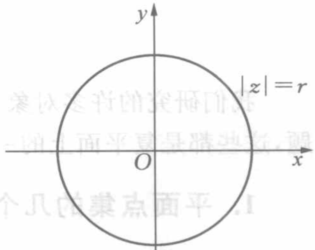

图 1.6

我们容易证明圆 $|z| = r$ 将平面分为两个不相交的区域,由不等式 $|z| < r$ 和 $|z| > r$ 所规定,这两个区域以圆周为边界.这个结果是以下约当定理的特例.

定理 1.1　一条简单闭曲线将平面分成两个不相交的区域,以曲线为公共边界.

这两个区域,一个是有界的,称为曲线的内部;一个是无界的,称为曲线的外部.

如果曲线 Γ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 存在、连续,而且不同时为零,则称曲线 Γ 为光滑曲线.由有限条光滑曲线连接而成的连续曲线,称为分段光滑的曲线.

(7) **单连通区域**　设 D 为复平面上的区域,如果在 D 内的任意简单闭曲线的内部均属于 D,则称 D 为单连通区域;否则就称为多连通区域.

2. 直线和半平面

设 L 表示 $\mathbf{C}$ 中的直线,从初等解析几何知道,L 是由 L 上的一个点和一个方向向量决定的.如果 a 是 L 上的任一点,b 是它的方向向量,那么

$$L = \{z = a + tb: -\infty < t < \infty\}.$$

由于 $b \neq 0$,因此,对于 L 上的 z,有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0.$$

事实上,如果 z 满足等式

$$0 = \mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right),$$

那么

$$t = \frac{z-a}{b}$$

蕴含着 $z = a + tb$, $-\infty < t < \infty$.因此

$$L = \left\{z: \mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0\right\}. \tag{1.19}$$

集合

$$\left\{z: \mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0\right\} \tag{1.20}$$

和

$$\left\{z:\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)<0\right\} \tag{1.21}$$

的轨迹是什么呢？我们首先考虑简单的情形. 注意到 b 是一个方向，我们可以假定 $|b|=1$，先考虑 $a=0$ 的情形. 记

$$H_0=\left\{z:\operatorname{Im}\left(\frac{z}{b}\right)>0\right\},$$

$b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$. 如果 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $z/b=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\beta)}$. 于是 $z\in H_0$，当且仅当 $\sin(\theta-\beta)>0$，即 $\beta<\theta<\pi+\beta$. 所以，如果我们"按照 b 的方向沿着 L 前进"，H_0 是位于 L 的左边的半平面. 如果我们令

$$H_a=\left\{z:\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0\right\},$$

那么容易看出，$H_a=a+H_0=\{a+w:w\in H_0\}$，即 H_a 是由半平面 H_0 平移 a 而得到的，因此，H_a 是位于 L 的左边的半平面. 类似地，

$$K_a=\left\{z:\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)<0\right\}$$

是位于 L 的右边的半平面.

§1.3 扩充复平面及其球面表示

在复函数中，常常遇到这样一些函数，当自变量趋于一个给定点时，函数值趋向无穷. 为了研究这样的情形，有必要将复数系统加以扩充，引入一个数∞. 在微积分中，∞不是一个定值，它代表的是变量无限增大的符号；而在我们这里，把它作为一个定值. 它的运算规定如下.

设 a 是异于∞的一个复数，我们规定：

(1) $a\neq\infty$，则 $a+\infty=\infty+a=\infty$；

(2) $a\neq 0$，则 $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty$；

(3) $a\neq\infty$，则$\dfrac{a}{\infty}=0$，$\dfrac{\infty}{a}=\infty$；

(4) $a\neq 0$，则$\dfrac{a}{0}=\infty$；

(5) $|\infty|=+\infty$，∞的实部、虚部、辐角都无意义；

(6) 为了避免和算术定律相矛盾，对

$$\infty \pm \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},$$

不规定其意义.

在复平面上没有一点和∞对应,但是我们可以设想平面上有一个理想点和它对应.这个理想点称为无穷远点.复平面加上∞,称为扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. 为使$|\infty| = +\infty$ 的规定合理,我们规定扩充复平面上只有一个无穷远点.为使无穷远点的存在得到直观的解释,我们建立扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty$ 的球面表示法.

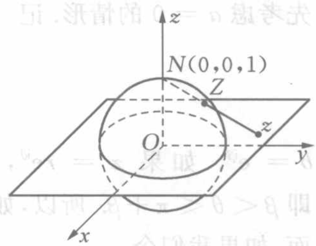

图 1.7

如图 1.7 所示,记 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球面为

$$S = \{(x_1,\ x_2,\ x_3): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

设 $N = (0,\ 0,\ 1)$ 为 S 上的北极点,把 $\mathbf{C}$ 等同于 $\mathbf{R}^3$ 中的点集 $\{(x_1,\ x_2,\ 0): x_1,\ x_2 \in \mathbf{R}\}$,于是 $\mathbf{C}$ 沿赤道切割 S. 对于复平面 $\mathbf{C}$ 内任意一点 z,用直线将 z 与北极点 N 相连接,此直线与球面 S 恰好交于一点 $Z \neq N$. 若 $|z| > 1$,那么 Z 位于北半球面上;若 $|z| < 1$, Z 点位于南半球面上;若 $|z| = 1$,那么 $Z = z$. 当$|z| \to +\infty$时,Z 怎样变化呢?很显然,$Z \to N$. 因此,我们就把 N 与扩充复平面中的∞等同起来,这样,扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty$ 就与球面 S 之间建立了一一对应的关系.这样的球面成为复球面,它是扩充复平面的几何模型.

小　结

本章的主要内容是复数的有关概念,复数的代数表示与向量表示,复数的代数形式的运算,复数的三角形式的运算,复指数和开方,复平面点集,扩充复平面.大多数内容是高中阶段学习过的,我们主要复习一下其中的主要性质.对于复指数和开方运算,特别是开方运算,要重点掌握,因为与后面的幂函数和多值性直接相关.

复平面点集是多元微积分中的平面点集的复数表示,可以与平面点集的内容相对照.扩充复平面是一个新的概念,要求读者对其几何意义加深理解.

重要术语及主题

复数,实部,虚部,共轭复数,复数的模,复数的四则运算,三角表示,指数表示,辐角,方根,邻域,内点,边界点,边界,开集,闭集,区域,简单曲线,光滑曲线,约当定理,无穷远点,扩充复平面

习　题　一

1. 用复数的代数形式 $a + ib$ 表示下列复数.

$$e^{-i\pi/4};\ \frac{3+5i}{7i+1};\ (2+i)(4+3i);\ \frac{1}{i}+\frac{3}{1+i}.$$

2. 求下列各复数的实部和虚部 ($z=x+iy$).

$$\frac{z-a}{z+a}(a\in\mathbf{R});\ z^3;\ \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3;\ \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3;\ i^n.$$

3. 求下列复数的模和共轭复数.

$$-2+i;\ -3;\ (2+i)(3+2i);\ \frac{1+i}{2}.$$

4. 证明:当且仅当 $z=\bar{z}$ 时,z 才是实数.

5. 设 $z,\ w\in\mathbf{C}$,证明:$|z+w|\leqslant|z|+|w|$.

6. 设 $z,\ w\in\mathbf{C}$,证明下列等式:

$$|z+w|^2=|z|^2+2\mathrm{Re}\,z\bar{w}+|w|^2,$$
$$|z-w|^2=|z|^2-2\mathrm{Re}\,z\bar{w}+|w|^2,$$
$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2),$$

并给出最后一个等式的几何解释.

7. 将下列复数表示为指数形式或三角形式.

$$\frac{3+5i}{7i+1};\ i;\ -1;\ -8\pi(1+\sqrt{3}i);\ \left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^3.$$

8. 计算:

(1) i 的三次根;

(2) -1 的三次根;

(3) $\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ 的平方根.

9. 设 $z=e^{i\frac{2\pi}{n}}$,$n\geqslant 2$. 证明:

$$1+z+\cdots+z^{n-1}=0.$$

10. 证明:若复数 $z_1,\ z_2,\ z_3$ 满足等式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3},$$

则有

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|,$$

并作出几何解释.

11. 设 Γ 是圆周 $\{z:\ |z-c|=r\}$,$r>0$,$a=c+re^{i\alpha}$. 令