暑期概率论基础讨论班交流资料之一

概率论基础

〔一〕

中国科学院数学研究所概率统计室

1977.7

目　录

前 言

这份材料，暂且称为"概率论基础"，是我们组向"暑期概率论基础讨论班"提供的交流资料。我们希望通过与兄弟单位的合作，经过几年暑期讨论班以后，能够共同整理出一套比较系统地介绍概率论主要分支近期发展情况的资料，使从事这方面研究工作的专业人员和业余爱好者能通过这份资料接近现代文献。

今年提供的"概率论基础（I）"包括了我们在学习过程中所遇到的过去不熟悉的分析基础和概率基础，主要是点集拓扑和容度理论，我们把它编入序论，暂且称为"概率论导引"；还包括了六十年代后期至七十年代初期发展起来的一个新的概率论分支"随机过程通论"的一部分，算做第一篇。"随机过程通论"的另一部分，即"投影理论"与鞅论关系密切，我们打算把它连同鞅论归入"概率论基础（II）"。在明年的暑期讨论班上整理出来跟大家交流。

我们打算整理出来向暑期讨论班提供的交流资料还将包括"随机测度论"和"随机场及其积分"等反映我们自己研究工作的内容。

数学所概率统计室概率组

1977年6月

序论　概率论导引

§0　记号约定、超限归纳法

$\mathbb{N}$表示自然数集，$\mathbb{R}$表示实数集。

定义在集E上的函数f限于E的子集A上来考虑时记作$f|_A$。

集族对有限併运算封闭简记成对运算（$\cup f$）封闭，类似地"对运算（$\cap c$）封闭"表示对可列交运算封闭，"对运算（$\cap f$，$\cup a$）封闭"表示对有限交和任意併两种运算封闭，"对运算（$\cup mc$，$\cap mc$）封闭"表示对单调增集列的可列併和单调降集列的可列交两种运算封闭。

函数族对有限、可列、任意、单调序列极限等的上、下端运算的封闭性采用相似的记号，例如函数族对运算（$\wedge f$）封闭表明如果$\{g_i\}_{1\leq i\leq n}$是函数族中的函数，则$\bigwedge\limits_{1\leq i\leq n} g_i=\min\limits_{1\leq i\leq n} g_i(x)$也是函数族中的函数；对运算（$\vee c$）封闭则表明如果$\{g_n\}_{n\geq 1}$是函数族中的函数，则$\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} g_n=\sup\limits_{n\geq 1} g_n(x)$也是函数族中的函数。

上、下端运算$\vee$、$\wedge$这一对"格论"中的记号也用来表示集类运算，例如由σ-域族$\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$所生成的σ-域记做$\bigvee\limits_{i\in I}\mathscr{F}_i$等々。

记号$s\nearrow t$表示$s\to t$，且$s\leq t$，称为"s从下趋于t"；$s\uparrow\uparrow t$表示$s\to t$，且$s<t$，称为"s严格从下趋于t"。在序列的情形；$s_n\nearrow t$表示$\{s_n\}_{n\geq 1}$单调非降地趋于t，$s_n\uparrow\uparrow t$表示$\{s_n\}_{n\geq 1}$严格上升地趋于t。

注意"$\longrightarrow$"趋于，"$\Longrightarrow$"蕴含，和"$\longmapsto$"把…映成… 这三者中间的区别，不要混淆，例如"$f: x \longmapsto f(x)$"表明f是把x映成$f(x)$的映射。

我们将不只一次地利用序数的概念和超限归纳法，为了更直接利用"超限归纳法"所能达到的结论，我们在这里证明下面的引理：其中I表示全体"可列"序数所成的集，即

$$I=\{\alpha: \alpha<\aleph_1\},$$

$\aleph_1$表示最小的不可列序数。注意I本身是不可列集。

引理1： a). 对任一序数$\alpha \in I \setminus \{0\}$，存在一个从区间$[0, \alpha]$到$R$中的严格上升映射$f$，使得$f(0)=0$，$f(\alpha)=1$。

b). 进一步对任何一个从整个I到R或$\overline{R}=[-\infty, \infty]=R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$的非降映射$f$，存在一个序数$\gamma \in I$，使得$f(\beta)=f(\gamma)$对一切$\beta \geq \gamma$成立。

c) 对任意极限序数$\alpha \in I$，存在一个严格上升的序数序列$\alpha_n<\alpha$，使得$\alpha=\sup\limits_{n \geq 1} \alpha_n$.

证明：a) 设A是所有那种序数$\beta \in I \setminus \{0\}$所成的集：它使得不存在一个从$[0, \beta]$到$R$的映射满足引理中a)的条件。如果$A$是非空的，它必定有一个最小元$\alpha$，显然$\alpha$不能有"前承"元素，故必是一个极限序数，对任何$\beta<\alpha$，用$f_\beta$表示从$[0, \beta]$到$R$的一个严格上升映射，满足$f_\beta(0)=0$，$f_\beta(\beta)=1$。并设$g_\beta$是从$[0, \alpha]$到$R$上的映射，它在$[0, \beta]$上等于$f_\beta$，在$(\beta, \alpha]$上等于1。所有的$\beta$：$\beta<\alpha$，是一个可列集，存在严格正的实数列$\varepsilon_\beta$使得$\sum\limits_{\beta<\alpha} \varepsilon_\beta=1$，那么函

数 $\sum_{\beta<\alpha}\varepsilon_\beta g_\beta$ 满足区间 $[0,\alpha)$ 上命题的条件，这与 α 的定义矛盾，故 A 必须是空集， a) 得证。

b) 设 $A=\sup_{\beta\in I} f(\beta)$，对每一个 n，有 α_n 使得

$$f(\alpha_n)>\begin{cases} A-\frac{1}{n} & A<\infty \\ n & A=\infty \end{cases},$$

令 $\gamma=\sup_{n\geq 1}\alpha_n$，那么 $f(\beta)=f(\gamma)=A$ 对一切 $\beta\geq\gamma$ 成立。

c) 最后设 α 是极限序数，f 是 $[0,\alpha]$ 到 R 的一个有界区间内的严格上升映射，设 $C=\sup_{\beta<\alpha} f(\beta)$，只需取满足 $f(\beta)>C-\frac{1}{n}$ 且属于 $(\alpha_{n-1},\alpha]$ 的最小序数 β 作为 α_n 即可。

简单地说，超限归纳法这一原理可以叙述如下：

让 J 是任一良序集，把它的元素视为序数，$P(\alpha)$ 是关于序数 α 的一个性质，换句话说，是 J 的一个子集 A，为要 $P(\alpha)$ 这个性质成立，当且仅当 $\alpha\in A$。如果

1) P 对 α 成立，则 P 对 $\alpha+$ 也成立；

2) 设 β 是一个极限序数，且 P 对一切满足 $\alpha<\beta$ 的序数 α 都成立，则 P 对 β 也成立；

3) P 对 0 成立

那么，P 对一切 $\alpha\in J$ 都成立。

事实上，那些使得 $P(\alpha)$ 不成立的 α 所成的集，如果非空，必有最小元，但这个最小元依 1). 不能有“前承”元素，依 2). 不能是极限序数，依 3). 不能是 0，而这是不可能的。

最后；我们还将要用到"连续统假设"，即 $I=\{\alpha: \alpha<\aleph_1\}$ 具有连续统的势。

第一章 拓扑空间概要

这一章我们试图用尽可能少的篇幅把点集拓学的最常用的概念讲清楚，以便能够证明近期概率论研究中经常引用的一些点集拓扑方面的著名结果，使没有专门学过点集拓扑的概率论工作者在阅读近期概率论文献时不必查阅许多与概率论无关的点集拓扑方面的经典著作。因此我们不追求"系统""全面"，例如一致性结构、拓扑群、拓扑格、拓扑向量空间等我们一概不涉及。这样，当然不能指望通过本章的阅读就能掌握点集拓扑学的基础知识，再重复一遍，本章的目的是帮助读者在阅读近期概率论文献时所遇到的缺乏点集拓扑知识的部分困难。前三节是基本概念，最后一节是这份资料的其他部分将要用到的一些经典结果，但也不全，不过有了基本概念以后，在需要用到时临时给出证明也就不会有太大的困难了。

§1 集族确定的拓扑结构

定义1、设E是任意集，由E的某些子集所组成的族 $\mathcal{G}$ 称为拓扑，如果它对运算（$\cup a$，$\cap f$）封闭。这时（E，$\mathcal{G}$）称为拓扑空间，$\mathcal{G}$ 中的元称为开集。

约定对以 $\emptyset$ 为指标集求并为空集 $\emptyset$，以 $\emptyset$ 为指标集求交为"全空间"E，即

$$\bigcup_{i\in\emptyset} G_i=\emptyset \ , \quad \bigcap_{i\in\emptyset} G_i=E \ ,$$

这样∅和E总是开集。注意，以∅为指标集求交依赖于所讨论的对象，在可能引起误解时需要明确指出以什么为"全空间"对指标集∅求交。

同一个集E，可赋予不同的拓扑构成不同的拓扑空间。同一个集构成的不同拓扑空间之间有些是可比较的，有些是不可比较的。设$\mathscr{G}_1$，$\mathscr{G}_2$是E的两个拓扑，如果$\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2$，称$\mathscr{G}_1$粗于$\mathscr{G}_2$，或$\mathscr{G}_2$精于$\mathscr{G}_1$，只由$\{\emptyset, E\}$构成的拓扑称为平拓扑，它是能够赋予E的"最粗拓扑结构"。由E的所有子集构成的拓扑$\mathscr{P}$（E）称为散拓扑，是能够赋予E的"最精拓扑结构。"

定义2. 设（E，$\mathscr{G}$）是拓扑空间，$F\subset E$称为闭集，如果$E\setminus F\in\mathscr{G}$.

全体闭集所成的族对运算（∪f，∩a）封闭。反之给了一个对运算（∪f，∩a）封闭的E的子集族$\mathscr{F}$，则存在E上的拓扑$\mathscr{G}=\{G: E\setminus G\in\mathscr{F}\}$，使得为要F是闭集，当且仅当$F\in\mathscr{F}$。

定义3. 设（E，$\mathscr{G}$）是拓扑空间A是E的任一子集，x称为A的内点，如果存在$G\in\mathscr{G}$，使得$x\in G\subset A$. $A^\circ=\{x:\ x$是A的内点$\}$称为A的内核。

内核必是开集，而且是含于A的最大开集。为要A是开集，当且仅当$A^\circ=A$。

把求内核视为从$\mathscr{P}$（E）到$\mathscr{P}$（E）里的运算，具有下列性质：

(i)° $E^\circ = E$

(ii)° $A^\circ \subset A$ 对一切 $A \in \mathfrak{B}(E)$

(iii)° $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ 对一切 $A \in \mathfrak{B}(E)$

(iv)° $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ 对一切 A、$B \in \mathfrak{B}(E)$

反之，给了从 $\mathfrak{B}(E)$ 到 $\mathfrak{B}(E)$ 里的，满足 (i)°—(iv)° 的运算，我们把那些满足 $A^\circ = A$ 的 A 称为开集，那么所有开集组成的族 $\mathcal{G}$ 对有限交运算显然是封闭的；再注意到若 $A \subset B$，则 $A^\circ = (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \subset B^\circ$，从而若

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是开集的任意族，则

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^\circ \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^\circ \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^\circ,$$

即 $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^\circ = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$，$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{G}$，$\mathcal{G}$ 对任意併也封闭，$\mathcal{G}$ 是一个拓扑。如果用"⊙"来表示关于拓扑 $\mathcal{G}$ 的内核运算，给定 A，为要 x 是内点，当且仅当存在开集 G 满足 $x \in G \subset A$，这样 $x \in G = G^\circ \subset A^\circ$，从而 $A^\odot \subset A^\circ$，反之，如果 $x \in A^\circ$，取 $G = A^\circ$，则 $x \in G = A^\circ \subset A$，故 x 是内点，$A^\circ \subset A^\odot$，我们证明了关于 $\mathcal{G}$ 的内核运算就是原来给定的运算 $A \longmapsto A^\circ$，这样拓扑结构被它的内核运算所唯一确定。

定义 4．设 $(E, \mathcal{G})$ 是拓扑空间，E 的子集 U 称为 x 的邻域，如果 $x \in U^\circ$，$\mathcal{U}(x) = \{U: \ x \in U^\circ\}$ 称为 x 的邻域系。E 的子集 U 称为闭集 F 的邻域，如果 $F \subset U^\circ$.

x 的邻域系 $\mathcal{U}(x)$ 具有下列性质

(i)^n $U\in\mathcal{U}(x)\Longrightarrow x\in U$；

(ii)^n $U\in\mathcal{U}(x)$，$U\subset V\Rightarrow V\in\mathcal{U}(x)$；

(iii)^n $\mathcal{U}(x)$对有限交运标封闭；

(iv)^n $U\in\mathcal{U}(x)\Longrightarrow$存在 $V\in\mathcal{U}(x)$，

$V\subset U$，且只要 $y\in V$，就有 $V\in\mathcal{U}(y)$。

反之，对每一个 $x\in E$，给了一族E的子集$\mathcal{U}(x)$，满足上述性质(i)^n—(iv)^n．如果我们对任一$A\subset E$，令$A^\circ=\{x:\ A\in\mathcal{U}(x)\}$，则$E=\bigcap_{i\in Q}G_i\in\mathcal{U}(x)$对一切$x\in E$成立，故$E^\circ=E$；由(i)^{n}知$A^\circ\subset A$对一切$A\in\mathcal{P}(E)$成立；$u\ x\in A^\circ\Longrightarrow$存在$V\subset A$，$V\in\mathcal{U}(x)$，而且任给$y\in V$，$V\in\mathcal{U}(y)$，这样$V^\circ=\{y:\ V\in\mathcal{U}(y)\}=V$，又从$V\subset A\Rightarrow V^\circ\subset A^\circ$，及$x\in V=V^\circ\Longrightarrow$
$V^\circ\in\mathcal{U}(x)$ 知$A^\circ\in\mathcal{U}(x)$，故
$(A^\circ)^\circ=\{x:A^\circ\in\mathcal{U}(x)\}=\{x:\ A\in\mathcal{U}(x)\}=A^\circ$；最后$(A\cap B)^\circ=\{x:\ A\cap B\ \mathcal{U}(x)\}=$
$\{x:\ A\in\mathcal{U}(x)\}\cap\{x:\ B\in\mathcal{U}(x)\}=A^\circ\cap B^\circ$，
我们得到了一个从$\mathcal{P}(E)$到$\mathcal{P}(E)$中满足(i)$^\circ$—(iv)$^\circ$的运标“$\circ$”，这个运标可以定义一个拓扑$\mathcal{G}$，使得它是关于这个拓扑$\mathcal{G}$的“内核运标”，而为要U关于拓扑$\mathcal{G}$是x的邻域，当且仅当$x\in U^\circ=\{y:\ U\in\mathcal{U}(y)\}$，即$U\in\mathcal{U}(x)$，即关于拓扑$\mathcal{G}$，$x$的邻域系就是原来的$\mathcal{U}(x)$．这样拓扑结构被它在每一点$x$处的邻域系$\mathcal{U}(x)$

所构成的族 $\{\mathcal{U}(x)\}_{x\in E}$ 所唯一确定。

定义5. 设 $(E,\mathcal{G})$ 是拓扑空间，称 $x\in E$ 是 $A\subset E$ 的接触点，如果对任何满足 $x\in G\in\mathcal{G}$ 的 G，总有 $A\cap G\neq\varnothing$；$\overline{A}=\{x:\ x$ 是接触点$\}$ 称为 A 的闭包。

若 x 不是 A 的接触点，则存在 $G\in\mathcal{G}$，使得 $x\in G$，$A\cap G=\varnothing$．这样 G 中的一切点都不是 A 的接触点，可见 x 是 $\overline{A}^c$ 的内点，　$\overline{A}^c=\{x:\ x$ 不是 A 的接触点$\}$．
从而 $(\overline{A}^c)^\circ=\overline{A}^c$ 是开集，当然 $\overline{A}$ 就是一个闭集，而且显然是包含 A 的最小闭集。为要 A 是闭集，当且仅当 $\overline{A}=A$．

把求闭包视为从 $\mathcal{P}(E)$ 到 $\mathcal{P}(E)$ 里的运算具有下列性质：

($\overline{\text{i}}$)　$\overline{\varnothing}=\varnothing$；

($\overline{\text{ii}}$)　$A\subset\overline{A}$；

($\overline{\text{iii}}$)　$\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$；

($\overline{\text{iv}}$)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

反之，给了从 $\mathcal{P}(E)$ 到 $\mathcal{P}(E)$ 里的满足 ($\overline{\text{i}}$)——($\overline{\text{iv}}$) 的运算，把那些满足 $\overline{A}=A$ 的集称为闭集，则所有闭集的族对运算 $(\cup f,\ \cap a)$ 封闭，从而可以定义拓扑 $\mathcal{G}=\{G:\ \overline{G^c}=G^c\}$，关于 $\mathcal{G}$ 的闭包运算就是原来给定的运算。由于闭包运算和内核运算是"对偶"的，我们把上述论断的证明留给读者作为练习去完成。

定义6　拓扑空间 $(E,\mathcal{G})$ 称为

(1)　T_0 型的，如果任给 $x,\ y\in E$，至少存在其中一点

的一个邻域，它不包含另一点。

(2) T_1 型的，如果任给 $x, y \in E$，存在 x 和 y 各自的一个邻域 $U(x)$ 和 $U(y)$，使得 $x \bar{\in} U(y)$，$y \bar{\in} U(x)$.

(3) T_2 型的，如果任给 $x, y \in E$，存在 x 和 y 各自的邻域 $U(x)$ 和 $U(y)$，使得 $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

(4) T_3 型的，如果它是 T_1 型的，而且任给点 $x \in E$ 及不含 x 的闭集 F，存在 x 的邻域 $U(x)$ 和 F 的邻域 $U(F)$，使得 $U(x) \cap U(F) = \emptyset$.

(5) T_4 型的，如果它是 T_1 型的，而且任给不交闭集 F_1，F_2，存在它们的不交邻域 $U(F_1)$，$U(F_2)$。

T_0 型空间又称 Колмогоров 型的空间。T_1 型空间又称 Riesz-Fréchet 型空间：在 T_1 型空间中，单点集必是闭集：$\{x\} = \bigcap_{y \neq x} E \setminus [U(y)]^{\circ}$ 其中 $U(y)$ 表示不含 x 的 y 的一个邻域。T_2 型空间又称 Hausdorff 空间，其特征性质称为"任意两点可邻域隔离"。具有性质"点与不含它的闭集可邻域隔离"的空间称为正则空间，T_3 型空间是正则的 T_1 型空间。具有性质"不交闭集可邻域隔离"的空间称为正规空间，T_4 型空间是正规的 T_1 型空间。

从 T_1 型空间中的单点集是闭集知 T_4 型空间必是 T_3 型的，T_3 型空间必是 T_2 型的。此外 T_2 型空间必是 T_1 型的，以及 T_1 型空间必是 T_0 型的，均可从定义直接推出。

定义 7. 设 $(E, \mathcal{G})$ 是拓扑空间，$\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ 称为"基"，如果任给 $G \in \mathcal{G}$，存在一族 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{U}$，使得 $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$，其中 I 是任意指标集。如果存在一个至多包含

可列个开集的基 $\mathcal{U}$，则称（E，$\mathscr{G}$）为具有可数基的拓扑空间。

显然 $\mathscr{G}$ 被它的任何一组基 $\mathcal{U}$ 所唯一确定。

定义 8. 设（E，$\mathscr{G}$）是拓扑空间，$D\subset E$ 称为稠密集，如果任给非空的 $G\in\mathscr{G}$，$G\cap D\neq\emptyset$.

为要 D 是稠密集，当且仅当 $\overline{D}=E$。

定义 9. 拓扑空间（E，$\mathscr{G}$）称为可分的，如果存在可列的稠密子集 D。

具有可数基的拓扑空间必是可分的，因为从可数基中的每一个开集中任意选一点所得到的可列集就是稠密集。但可分拓扑空间未必具有可数基：例如考虑 $E=[0,1]$，所有有限子集的补再加上空集所构成的拓扑 $\mathscr{G}$，任一可列集都是稠密的，从而（E，$\mathscr{G}$）是可分的，但不存在可数基。

对距离空间（E，d），以

$$\mathcal{U}=\{S(x,r)\quad x\in E,\quad r\in(0,\infty)\}$$

为基的拓扑 $\mathscr{G}$ 称为由距离 d 引出的拓扑，其中 $S(x,r)=\{y:\ d(x,y)<r\}$ 是以 x 为心 r 为半径的开球。如果拓扑空间（E，$\mathscr{G}$）的拓扑 $\mathscr{G}$ 是 E 上的距离 d 引出的拓扑，则“具有可数基”与“可分”这两个概念等价。事实上若（E，$\mathscr{G}$）可分，$D=\{x_n\}_{n\geq1}$ 是可列稠集，$\{S(x_n,\frac{1}{m})\}_{n,m\in N}$ 便是 $\mathscr{G}$ 的可数基。

定义 10. 设 $\{(E_\alpha,\mathscr{G}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ 是一族拓扑空间，其中 I 是任意势的指标集，令 $E=\prod\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$，

$$\mathcal{U}=\left\{\prod_{j\in J} G_j \times \prod_{\alpha\in I\setminus J} E_\alpha:\ G_j\in\mathcal{G}_j \text{ 对一切 } j\in J;\ J\text{是}I\text{的任一有限子集}\right\}$$

$$\mathcal{G}=\left\{G=\bigcup_{l\in L} G^{(l)}:\ G^{(l)}\in\mathcal{U} \text{ 对一切 } l\in L,\ L\text{ 是任意指标集}\right\}$$

则（E，$\mathcal{G}$）是拓扑空间，称为$\{(E_\alpha,\mathcal{G}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$的乘积拓扑空间。这样定义的$\mathcal{G}$常用$\prod_{\alpha\in I}\mathcal{G}_\alpha$表示之，$\mathcal{U}$是$\mathcal{G}$的基。

引理2．可列个具有可数的拓扑空间$\{(E_n,\mathcal{G}_n)\}_{n\geq 1}$的乘积拓扑空间还是具有可数基的拓扑空间。

证明：对每一个$\mathcal{G}_n$定一组可数基$\mathcal{U}_n$，令

$$\mathcal{U}^*=\left\{\prod_{j\in J} G_j \times \prod_{n\in N\setminus J} E_n:\ J\text{是}I\text{的任意有限子集，}\ G_j\in\mathcal{U}_j \text{ 对一切 } j\in J\right\}$$

便构成$\mathcal{G}$的可数基。

定义11．设（E，$\mathcal{G}$）是拓扑空间，E的子集族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$称为集$F\subset E$的覆盖，如果$F\subset\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$。集$K\subset E$称为紧集，如果$K$的任意开覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$——每一个$G_\alpha$都是开集的覆盖——存在有限的子覆盖，即存在$I$的有限子集$J$，使得$K\subset\bigcup_{j\in J}G_j$。

引理3．设（E，$\mathcal{G}$）是T_2型空间，则紧集必是闭集。

证明：设K是紧集，$x\in K$，对任何$y\in K$，存在

$U^{(y)}(x)$ 和 $U(y)$ 分别是 x 和 y 的邻域，且使得

$U^{(y)}(x)\cap U(y)=\emptyset$，$\{[U(y)]^\circ\}_{y\in K}$ 是 K 的开覆盖，

取有限子覆盖 $\{[U(y_i)]^\circ\}_{1\leq i\leq n}$ 那么

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n} U(y_i)\right]\cap\left[\bigcap_{i=1}^{n} U^{(y_i)}(x)\right]=\emptyset,$$

可见 x 有邻域 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U^{(y_i)}(x)\subset E\setminus K$，从而 $E\setminus K$ 是开集，

即 K 是闭集。

定义 12. 设 $(E,\mathscr{F})$ 是拓扑空间，如果 E 是紧集，称 $(E,\mathscr{F})$ 为紧空间；如果 E 的每一个点 x 存在一个 x 的邻域 $U(x)$ 是紧集，则称 E 是局部紧空间；如果 E 可表示成可列个紧集之并，称 E 为 σ—紧空间。

紧集的闭子集还是紧集，特别紧空间上紧集和闭集的概念是一致的。T_2 型空间中全体紧集组成的族对运算（$\cup f$，$\cap a$）封闭。

定义 13. 设 $(E,\mathscr{F})$ 是拓扑空间，E 的子集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 称为“具有有限交性质”，如果对任何 I 的有限子集 J，$\bigcap\limits_{j\in J}F_j\neq\emptyset$。

如果 K 是紧集，$\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 K 的闭子集族，具有有限交性质，那么 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha\neq\emptyset$. 事实上，如果 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha=\emptyset$，则 $\{F_\alpha^c\}_{\alpha\in I}$ 构成 K 的开覆盖，取有限子覆盖 $\{F_j^c\}_{j\in J}$，则

$\bigcap\limits_{j\in J}F_j=\left(\bigcup\limits_{j\in J}F_j^c\right)^c\subset K^c\cap K=\emptyset$ 与具有有限交性

须矛盾。

另一方面，设K是E的任一闭子集，具有下列性质：对任何K的"具有有限交性质"的闭子集族$\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$均有$\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha \neq \emptyset$，则K是紧集。事实上，设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$是K的任一开覆盖，考虑K的闭子集族$\{F_\alpha = K\setminus G_\alpha\}_{\alpha\in I}$，由于$\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=\emptyset$，不能具有有限交性质，故存在I的有限子集J，使得$\bigcap_{j\in J}F_j=\emptyset$，从而$\bigcup_{j\in J}G_j\supset\bigcup_{j\in J}K\setminus F_j = K\setminus\bigcap_{j\in J}F_j$ $=K$，我们找到了K的有限子覆盖，故K是紧集。

特别，为要（E，$\mathcal{T}$）是紧空间，当且仅当E的任一具有有限交性质的闭子集族$\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$均使得$\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=\emptyset$。

引理4. 设（E，$\mathcal{T}$）是紧T_2型空间，则它是T_4型的。

证明：只需证明它是正规空间。先证明它是正则空间。设$x\in E$，F是不含x的闭集，那么F又是紧集；对任何$y\in F$，取隔离x，y的开邻域$U(y)$，$V(y)$，则$\{V(y)\}_{y\in F}$是紧集F的开覆盖，取有限子覆盖$\{V(y_i)\}_{i=1,2,\cdots,n}$，则$U=\bigcap_{i=1}^{n}U(y_i)$和$V=\bigcup_{i=1}^{n}V(y_i)$是隔离x和F的开集。

下面证明正规性，设F_1，F_2是不交闭集。从而是不交紧集，依正则性，对每一个$x\in F_1$，存在隔离x，F_2的开集$U(x)$，$V(x)$，在开覆盖$\{U(x)\}_{x\in F_1}$中取有限子覆盖$\{U(x_j)\}_{1\le j\le m}$，则$\bigcup_{j=1}^{m}U(x_j)$和$\bigcap_{j=1}^{m}V(x_j)$是隔离F_1