新创意丛书

根据新课程标准编写

适用各种版本教材

高中数学 好题巧解

③ 选修1-1 选修2-1 选修2-2 选修4-5

主编 胡均宇

贯彻新课程标准 步入成材阶梯

江西高校出版社

新创意丛书 内容求新 知识求序 方法求活 练习求精

好题巧解

高中数学 3

主编： 胡均宇

江西高校出版社

图书在版编目（CIP）数据

好题巧解. 高中数学. 3/胡均宇主编. —南昌：江西高校出版社，2008.7

（新创意丛书）

ISBN 978 - 7 - 81132 - 334 - 4

Ⅰ. 好… Ⅱ. 胡… Ⅲ. 数学课-高中-解题 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 100448 号

责任编辑:胡李钦

封面设计:李法明

版式设计: Creative Times 创意时代

好题巧解 · **高中数学③**

江西高校出版社出版发行

（江西省南昌市洪都北大道 96 号）

邮编:330046 电话:(0791)8529392,8504319

北京市业和印务有限公司印刷

各地新华书店经销

*

2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

787mm × 1092mm 1/16 36 印张 517 千字

印数:1—5000

ISBN 978 - 7 - 81132 - 334 - 4

定价:45.00 元(全三册)

（江西高校版图书如有印刷、装订错误，请随时向承印厂调换）

前言

亲爱的读者，展现在您面前的这本《好题巧解·高中数学③》是《新创意丛书》系列中的一种。本丛书是由具有丰富教研、教学经验的特级教师和优秀教师合作编写。本丛书主要以高考要求和新课程标准为依据来编写。

本书通过5个专题，对解题方法和技巧进行了探讨，并对各种类型的数学习题进行了详细点拨，介绍了一些特殊方法与技巧。这些方法与技巧，不仅新颖、巧妙，而且容易掌握和便于记忆。为了保证本书在编写上的完整性，对于高考降低了要求或不考内容，仍然保留了一些，这些内容在目录里没做任何标注，供读者参考。为了便于区分选修部分，我们在目录里作了详细标注。

《新创意丛书》在编写体例上遵循学习规律，本丛书每个专题有以下几大特点：

1. 图表导航：将每章节的知识，以互相关联的内容为中心，精心设计图表以便于解读，使读者对知识的系统性、深入性有一个完整的把握，便于读者学习以及有所侧重地查阅。

2. 知识一览：概括总结了各节的定义、公式、定理，便于读者解题查阅。

3. 典例精析：设置"自主探究、真题回放及模拟精析"三部分，丛书不仅对每一道好题进行了"巧解"，而且更能引导读者"解题"，注重方法、思路的点拨，使读者学有所思、学有所得，不仅能举一反三，更能提高解题能力，大幅度提高学习效率，达到事半功倍之效。

4. 高考预测大本营：设置"自主探究、深度拓展及走近奥赛"三部分，本丛书采用由浅入深的方法来编排，在自主探究、深度拓展过关训练的基础上，选编一道走近奥赛题，让学生在解题的思路上有一个质的飞跃，达到触类旁通的效

果，从而真正掌握解题的方法和规律。

本书内容丰富、技巧性强、知识面覆盖广，是高中学生学习数学的好帮手，衷心希望本书能成为每一位学生的良师益友，在高考时助大家一臂之力。

由于时间仓促，书中难免有错误、疏漏之处，敬请批评指正，以便再版时修订。

只要信心多一点，能力强一点，你的脚步将迈得更加轻松、自在！

编者

2008年8月

图表导航

知识网络 典型示例

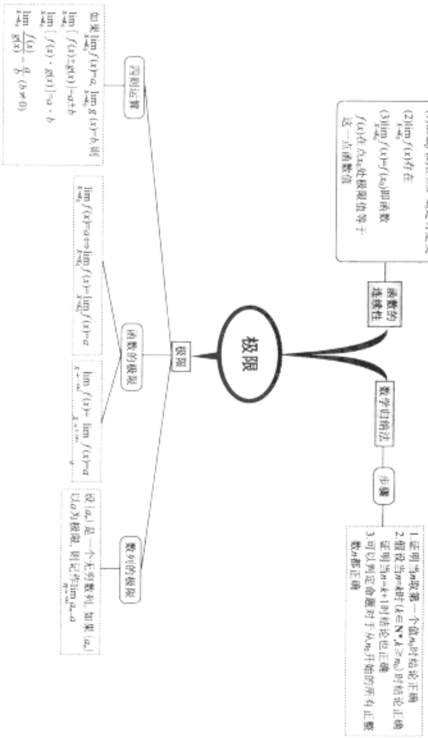
一个让你对所有知识点一目了然的图表

目录
Contents

知识一览	典例精析	高考预测大本营
定 义	自主探究	自主探究
定 理	真题回放	深度拓展
公 式	模拟精析	走近奥赛

专题1　极限

图表导航


极限
极限
四则运算
如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$，则
$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$
$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}\ (b\neq 0)$
函数的极限
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=a$
数列的极限
设 $\{a_n\}$ 是一个无穷数列，如果 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，则记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$
函数的连续性
(1)函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义
(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在
(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限值等于这一点函数值
数学归纳法
步骤
1.证明当 n 取第一个值 n_0 时结论正确
2.假设当 $n=k$ 时（$k\in N^*$，$k\geq n_0$）时结论正确，证明当 $n=k+1$ 时结论也正确
3.可以判定命题对于从 n_0 开始的所有正整数 n 都正确

1.1 数学归纳法(选修2-2)

知识一览

定义	数学归纳法　设$\{p_n\}$是一个与自然数相关的命题集合,如果(1)证明起始命题p_1(或p_0)成立;(2)在假设p_k成立的前提下,推出p_{k+1}也成立,那么可以断定,$\{p_n\}$对一切正整数(或自然数)成立.

典例精析

自主探究

例1　已知实数$c \geqslant 0$,曲线$C: y=\sqrt{x}$与直线$l: y=x-c$的交点为P(异于原点O),在曲线C上取一点$P_1(x_1,y_1)$,过点P_1作P_1Q_1平行于x轴,交直线l于点Q_1,过点Q_1作Q_1P_2平行于y轴,交曲线C于点$P_2(x_2,y_2)$,接着过点P_2作P_2Q_2平行于x轴,交直线l于点Q_2,过点Q_2作直线Q_2P_3平行于y轴,交曲线C于点$P_3(x_3,y_3)$,如此下去,可以得到点$P_4(x_4,y_4)$,$P_5(x_5,y_5)$,$\cdots$,$P_n(x_n,y_n)$,$\cdots$.设点P的坐标为$(a,\sqrt{a})$,$x_1=b$,$0<b<a$.

(1)试用c表示a,并证明$a \geqslant 1$;

(2)试证明$x_2>x_1$,且$x_n<a(n \in \mathbf{N}^*)$;

(3)当$c=0$,$b \geqslant \frac{1}{2}$时,求证:$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(x_{k+1}-x_k)}{x_{k+2}}<\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(k、n \in \mathbf{N}^*)$.

点拨

(1)首先要得到a、c的关系列由直线l与曲线C相交于P,可得方程组$\begin{cases} y=x-c \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$,便可得到,再由$c \geqslant 0$,即得$a \geqslant 1$;

(2)要证$x_2>x_1$,可证$x_2-x_1>0$,将点P_1,Q_1,P_2的坐标依次求出,代入即证.而$x_n<a$,由于这是正整数有关的不等式问题,则不难想到用数学归纳法证明;

(3)利用放缩思想是解答本题最有效的方法.

证明　(1)点P的坐标$(a,\sqrt{a})$;满足方程组$\begin{cases} y=x-c \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$,所以$\sqrt{a}=a-c$,解$a-\sqrt{a}-c=0$,得$\sqrt{a}=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$,所以$a=\frac{1}{2}(1+2c+\sqrt{1+4c})$,

因为 $c\geqslant 0$，所以 $1+2c+\sqrt{1+4c}\geqslant 2$，所以 $a\geqslant 1$.

(2) 由已知 $P_1(b,\sqrt{b})$，$Q_1(\sqrt{b}+c,\sqrt{b})$，$P_2(\sqrt{b}+c,\sqrt{\sqrt{b}+c})$，

即 $x_1=b$，$x_2=\sqrt{b}+c$，

$x_2-x_1=\sqrt{b}+c-b$，由(1)得 $c=a-\sqrt{a}$，

所以 $x_2-x_1=\sqrt{b}+a-\sqrt{a}-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)$，因为 $0<b<a$，$a\geqslant 1$，所以 $x_2>x_1$.

下面用数学归纳法证明 $x_n<a(n\in\mathbf{N}^*)$.

当 $n=1$ 时，$x_1=b<a$；

假设当 $n=k(k\geqslant 1)$ 时，$x_k<a$，由已知，$x_{k+1}=y_k+c$，$x_k>0$，所以 $x_{k+1}=\sqrt{x_k}+c=\sqrt{x_k}+a-\sqrt{a}<a$. 综上 $x_n<a(n\in\mathbf{N}^*)$.

(3) 当 $c=0$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant b<a=1$，$x_{n+1}=y_n=\sqrt{x_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $x_n=x_{n-1}^{\frac{1}{2}}=x_{n-2}^{(\frac{1}{2})^2}=\cdots=x_1^{(\frac{1}{2})^{n-1}}=b^{(\frac{1}{2})^{n-1}}$，

因为 $b\geqslant\frac{1}{2}$，所以当 $k\geqslant 1$ 时，$x_{k+2}\geqslant x_3\geqslant(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}$，所以 $\frac{1}{x_{k+2}}\leqslant\sqrt[4]{2}$，

又 $x_{k+1}-x_k=b^{(\frac{1}{2})^k}-b^{(\frac{1}{2})^{k-1}}>0$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant b=x_1<x_n<a=1$，$x_n-x_1<1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(x_{k+1}-x_k)}{x_{k+2}}\leqslant\sqrt[4]{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=\sqrt[4]{2}(x_{n+1}-x_1)<\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$.

例2　已知正项数列 $\{a_n\}$ 中，对于一切的 $n\in\mathbf{N}^*$ 均有 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$ 成立.

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 中的任何一项都小于1；

(2) 探究 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 的大小，并证明你的结论.

点拨

(1) 要证数列 $\{a_n\}$ 中的任何一项都小于1，即证 $a_n<1$. 而条件给出的是 a_n 与 a_{n+1} 关系，所以将其变形为 $a_{n+1}\leqslant a_n-a_n^2$，最后利用此数列为正项数列，即得 $0<a_n<1$；

(2) 本题渗透的是从特殊到一般的思想，先考查 $n=1,2$，再大胆猜想，最后用数学归纳法严谨论证.

证明　(1) 由 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$ 得 $a_{n+1}\leqslant a_n-a_n^2$.

$\because$ 在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_n>0$，$\therefore a_{n+1}>0$，$\therefore a_n-a_n^2>0$，$\therefore 0<a_n<1$，

故数列 $\{a_n\}$ 中的任何一项都小于1.

(2) 由(1)知 $0<a_n<1=\frac{1}{1}$，那么 $a_2\leqslant a_1-a_1^2=-(a_1-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$，

由此猜想：$a_n<\frac{1}{n}$.

下面用数学归纳法证明，当 $n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}$ 时猜想正确.

①当 $n=2$ 时，显然成立；

②当 $n=k(k\geqslant 2,k\in\mathbf{N})$ 时，假设猜想正确，即 $a_k<\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{2}$.

那么 $a_{k+1}\leqslant a_k-a_k^2=-(a_k-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}<-(\frac{1}{k}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}=\frac{k-1}{k^2}<\frac{k-1}{k^2-1}=\frac{1}{k+1}$,

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，猜想也正确.

综上所述，对于一切 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n<\frac{1}{n}$.

自主探究 | 真题回放 | 模拟精析

例 1 （辽宁）已知函数 $f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于 $\frac{1}{6}$，又当 $x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{8}$.

(1) 求 a 的值；

(2) 设 $0<a_1<\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明 $a_n<\frac{1}{n+1}$.

点拨

(1) 要想求 a 的值，需要得到一个关于 a 的不等式，可以利用函数 $f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2$ 的最大值为 $f(\frac{a}{3})$，由题意可得一个关于 a 的不等式，而当 $x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{8}$，表示当 x 在 $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 内的每一取值对应的函数值均不小于 $\frac{1}{8}$，$\therefore f(\frac{1}{2})\geqslant\frac{1}{8}$ 且 $f(\frac{1}{4})\geqslant\frac{1}{8}$，从而可以确定出 a 值；

(2) 由 (1) 知 a 值后，即可得 $y=f(x)$ 的对称轴，从而可知 $f(x)$ 的单调区间，而由 $a_{n+1}=f(a_n)$，故可想到运用 $f(x)$ 的单调性并结合数学归纳法加以证明.

解析 (1) 由于 $f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于 $\frac{1}{6}$，

所以 $f(\frac{a}{3})=\frac{a^2}{6}\leqslant\frac{1}{6}$，　即 $a^2\leqslant 1$ ①

又 $x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 时 $f(x)\geqslant\frac{1}{8}$，$\therefore\begin{cases}f(\frac{1}{2})\geqslant\frac{1}{8}\\ f(\frac{1}{4})\geqslant\frac{1}{8}\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{3}{8}\geqslant\frac{1}{8}\\ \frac{a}{4}-\frac{3}{32}\geqslant\frac{1}{8}\end{cases}$，解得 $a\geqslant 1$ ②

由①②，得 $a=1$.

(2)（ⅰ）当 $n=1$ 时，$0<a_1<\frac{1}{2}$，不等式 $0<a_n<\frac{1}{n+1}$ 成立.

因$f(x)>0,x\in(0,\frac{2}{3})$,所以$0<a_2=f(a_1)\leqslant\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$,故$n=2$时不等式也成立.

(ⅱ)假设$n=k(k\geqslant2)$时,不等式$0<a_k<\frac{1}{k+1}$成立,因为$f(x)=x-\frac{3}{2}x^2$的对称轴$x=\frac{1}{3}$,知$f(x)$在$[0,\frac{1}{3}]$为增函数,所以由$0<a_k<\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{3}$得$0<f(a_k)<f(\frac{1}{k+1})$.

于是有$0<a_{k+1}<\frac{1}{k+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+2}$

$=\frac{1}{k+2}-\frac{k+4}{2(k+1)^2(k+2)}<\frac{1}{k+2}$,

所以当$n=k+1$时,不等式也成立.

根据(ⅰ)(ⅱ)可知,对任何$n\in\mathbf{N}^*$,不等式$a_n<\frac{1}{n+1}$成立.

注意　该题考查的内容是函数和不等式的概念以及数学归纳法,其主要目的是灵活运用数学方法分析和解决问题的能力.另外本题在应用数学归纳法时还要特别注意,为了能利用$f(x)$的单调性,对$n=1,2$均分别进行了证明,这样$n=k$时,k将取不小于2的一切自然数,这样使证明过程更加严谨.

例2　(福建)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a,a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$,我们知道当$a$取不同的值时,得到不同的数列.如当$a=1$时,得到无穷数列:$1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\cdots$;当$a=-\frac{1}{2}$时,得到有穷数列:$-\frac{1}{2},-1,0$.

(1)求当a为何值时,$a_4=0$;

(2)设数列$\{b_n\}$满足$b_1=-1,b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,求证:$a$取数列$\{b_n\}$中的任一个数,都可以得到一个有穷数列$\{a_n\}$;

(3)若$\frac{3}{2}<a_n<2(n\geqslant4)$,求$a$的取值范围.

点拨

本题可由递推公式出发求得a_4,再通过归纳推得$a_n=-1,a_{n+1}=0$或通过归纳结论运用数学归纳法证明,再利用a_n的范围,导出a_{n-1}的范围,则a_4同样符合a_n的条件.

解析　(1)$\because a_1=a,a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$,

$\therefore a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a},a_3=1+\frac{1}{a_2}=\frac{2a+1}{a+1},a_4=1+\frac{1}{a_3}=\frac{3a+2}{2a+1}$.

故当$a=-\frac{2}{3}$时,$a_4=0$.

(2)$\because b_1=-1,b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1},\therefore b_n=\frac{1}{b_{n+1}}+1$.

当 $a=b_1$ 时，$a_2=1+\frac{1}{b_1}=0$.

当 $a=b_2$ 时，$a_2=1+\frac{1}{b_2}=b_1$，$\therefore a_3=0$.

当 $a=b_3$ 时，$a_2=1+\frac{1}{b_3}=b_2$，$\therefore a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{b_2}=b_1$，

$\therefore a_4=0$.

…

一般地，当 $a=b_n$ 时，$a_{n+1}=0$，可得一个含有 $n+1$ 项的有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$.

下面用数学归纳法证明：

①当 $n=1$ 时，$a=b_1$，显然 $a_2=0$. 得到一个含有 2 项的有穷数列 a_1,a_2.

②假设当 $n=k$ 时，$a=b_k$，得到一个含有 $k+1$ 项的有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{k+1}$，其中 $a_{k+1}=0$.

则 $n=k+1$ 时，$a=b_{k+1}$，$\therefore a_2=1+\frac{1}{b_{k+1}}=b_k$.

由假设可知，可得到一个含有 $k+1$ 项的有穷数列 $a_2,a_3,\cdots,a_{k+2}$，其中 $a_{k+2}=0$.

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，可得到一个含有 $k+2$ 项的有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{k+2}$，其中 $a_{k+2}=0$.

由①②知，对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 命题都成立.

(3) 要使 $\frac{3}{2}<a_n<2$，即 $\frac{3}{2}<1+\frac{1}{a_{n-1}}<2$，

$\therefore 1<a_{n-1}<2$.

$\therefore$ 要使 $\frac{3}{2}<a_n<2$，当且仅当它的前一项 a_{n-1} 满足 $1<a_{n-1}<2$.

$\because (\frac{3}{2},2)\subsetneqq(1,2)$，

$\therefore$ 只须当 $a_4\in(\frac{3}{2},2)$ 时，都有 $a_n\in(\frac{3}{2},2)$ $(n\geqslant 5)$.

由 $a_4=\frac{3a+2}{2a+1}$，得 $\frac{3}{2}<\frac{3a+2}{2a+1}<2$.

解不等式组 $\begin{cases}\frac{3}{2}<\frac{3a+2}{2a+1}\\ \frac{3a+2}{2a+1}<2\end{cases}$，得 $\begin{cases}a>-\frac{1}{2}\\ a>0\text{ 或 }a<-\frac{1}{2}\end{cases}$，

故 $a>0$.

注意 本题考查的主要内容是数列，不等式等基础知识，其主要目的是培养学生逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力.

例 3 （湖南）自然状态下的鱼类是一种可再生的资源，为持续利用这一资源，需从宏观上考察其再生能力及其捕捞强度对鱼群总量的影响. 用 x_n 表示某鱼群在第 n 年年初的总量，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $x_1>0$，不考虑其他因素，设在第 n 年内鱼群的繁殖量及被捕捞量都与 x_n 成正比，死亡量与 x_n^2 成正比，这些比例系数依次为正数 a、b、c.

(1) 求 x_{n+1} 与 x_n 的关系式.

(2)猜测:当且仅当 x_1,a,b,c 满足什么条件时,每年年初鱼群的总量保持不变?(不要求证明).

(3)设 $a=2,c=1$,为保证对任意 $x_1\in(0,2)$,都有 $x_n>0,n\in\mathbf{N}^*$,则捕捞强度 b 的最大允许值是多少?证明你的结论.

点拨

解决问题的关键是推断出 x_n 恒等于 x 即得 $x_1=\frac{a-b}{c}$,利用归纳猜想、证明,得出 b 的最大允许值是1.

解析 (1)从第 n 年初到第 $n+1$ 年初,鱼群的繁殖量为 ax_n,被捕捞量为 bx_n,死亡量为 cx_n^2,因此 $x_{n+1}-x_n=ax_n-bx_n-cx_n^2,n\in\mathbf{N}^*$.(*)

即 $x_{n+1}=x_n(a-b+1-cx_n),n\in\mathbf{N}^*$.

(2)若每年年初鱼群总量保持不变,则 x_n 恒等于 $x_1,n\in\mathbf{N}^*$,从而由(*)式得 $x_n(a-b-cx_n)$ 恒等于0,$n\in\mathbf{N}^*$,所以 $a-b-cx_1=0$. 即 $x_1=\frac{a-b}{c}$.

因为 $x_1>0$,所以 $a>b$.

猜测:当且仅当 $a>b$,且 $x_1=\frac{a-b}{c}$ 时,每年年初鱼群的总量保持不变.

(3)若 b 的值使得 $x_n>0,n\in\mathbf{N}^*$,

由 $x_{n+1}=x_n(3-b-x_n),n\in\mathbf{N}^*$,知

$0<x_n<3-b,n\in\mathbf{N}^*$,特别地,有 $0<x_1<3-b$. 即 $0<b<3-x_1$.

而 $x_1\in(0,2)$,所以 $b\in(0,1]$,

由此猜测 b 的最大允许值是1.

下证当 $x_1\in(0,2),b=1$ 时,都有 $x_n\in(0,2),n\in\mathbf{N}^*$

①当 $n=1$ 时,结论显然成立.

②假设当 $n=k$ 时结论成立,即 $x_k\in(0,2)$,

则当 $n=k+1$ 时,$x_{k+1}=x_k(2-x_k)>0$.

又因为 $x_{k+1}=x_k(2-x_k)=-(x_k-1)^2+1\leqslant1<2$,

所以 $x_{k+1}\in(0,2)$,故当 $n=k+1$ 时结论也成立.

由①、②可知,对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $x_n\in(0,2)$. 综上所述,为保证对任意 $x_1\in(0,2)$,都有 $x_n>0,n\in\mathbf{N}^*$,则捕捞强度 b 的最大允许值是1.

注意 数学应用问题不但要求学生要正确建立数学模型,更要大胆猜想,严谨论证,才可以顺利求解,这些良好的学习品质在今后的学习中要多加培养.

自主探究 | 真题回放 | **模拟精析**

例1 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}(n=1,2,\cdots)$.

(1)证明 $a_n>\sqrt{2n+1}$ 对一切正数 n 成立;

(2)令 $b_n=\frac{a_n}{\sqrt{n}}(n=1,2,\cdots)$，判定 b_n 与 b_{n+1} 的大小，并说明理由.

点拨

(1)数学归纳法解决的是与自然数有关的不等式问题.

(2)由 $b_n>0$ 及(1)问结论，用作商的方法比较大小更好一些.

解析 (1)当 $n=1$ 时，$a_1=2>\sqrt{2\times1+1}$，不等式成立.

假设 $n=k$ 时，$a_k>\sqrt{2k+1}$ 成立.

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}^2=a_k^2+\frac{1}{a_k^2}+2>2k+3+\frac{1}{a_k^2}>2(k+1)+1$.

$\therefore n=k+1$ 时，$a_{k+1}>\sqrt{2(k+1)+1}$ 也成立.

综上所述，我们由数学归纳法可知，$a_n>\sqrt{2n+1}$ 对一切正整数 n 均成立.

(2)$\because b_n>0$，$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}\sqrt{n}}{a_n\sqrt{n+1}}=\left(1+\frac{1}{a_n^2}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}<\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

$$=\frac{2(n+1)\sqrt{n}}{(2n+1)\sqrt{n+1}}=\frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}=\frac{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}{n+\frac{1}{2}}<1.$$ 故 $b_{n+1}<b_n$.

注意 第(1)问中，先证明 $a_n^2>2n+1$ 因为求证的形式较烦琐，而直接证明有些费力. (2)问虽计算量较大，但却是通常的解法，并且使用了(1)问的结论.

例2 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且方程 $x^2-a_nx-a_n=0$

有一根为 S_n-1，$n=1,2,3,\cdots$.

(1)求 a_1,a_2；(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

点拨

此题通常用递推关系得到 $a_1,a_2,S_1,S_2,S_3,\cdots$ 通过归纳、猜想、证明得到 S_n 的表达式，然后利用

$$a_n=\begin{cases}S_1 & n=1\\ S_n-S_{n-1} & n\geqslant2\end{cases}$$ 即可得出结果.

解析 (1)当 $n=1$ 时，$x^2-a_1x-a_1=0$ 有一根为 $S_1-1=a_1-1$，于是 $(a_1-1)^2-a_1(a_1-1)-a_1=0$，

解得 $a_1=\frac{1}{2}$.

当 $n=2$ 时，$x^2-a_2x-a_2=0$

有一根为 $S_2-1=a_2-\frac{1}{2}$，于是 $(a_2-\frac{1}{2})^2-a_2(a_2-\frac{1}{2})-a_2=0$，

解得　$a_2=\frac{1}{6}$.

(2)由题设 $(S_n-1)^2-a_n(S_n-1)-a_n=0$，

即　$S_n^2-2S_n+1-a_nS_n=0$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，代入上式得

$S_{n-1}S_n-2S_n+1=0$　①

由(1)知 $S_1=a_1=\frac{1}{2}$，$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

由①可得 $S_3=\frac{3}{4}$.

由此猜想 $S_n=\frac{n}{n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$

下面用数学归纳法证明这个结论.

(ⅰ) $n=1$ 时已知结论成立.

(ⅱ)假设 $n=k$ 时结论成立，即 $S_k=\frac{k}{k+1}$，

当 $n=k+1$ 时，由①得 $S_{k+1}=\frac{1}{2-S_k}$，

即　$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$，

故 $n=k+1$ 时结论也成立.

综上，由(ⅰ)(ⅱ)可知 $S_n=\frac{n}{n+1}$ 对所有正整数 n 都成立.

于是当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$，

又 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}$，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，$n=1,2,3,\cdots$.

例3　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1}4^{b_2-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，证明：$\{b_n\}$ 是等差数列；

(3)证明：$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

点拨

(1)原数列既不是等差数列,也不是等比数列,因此,我们要设法构造新数列,或为等差数列,或为等比数列,通常用待定系数法,得到 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,再用等比数列的有关知识来解决.

(2)如果要证明 $\{b_n\}$ 是等差数列,可先证 $b_{n+1}-b_n=d$(常数),由题目不难化简到 $(n-1)b_{n+1}-nb_n+2=0$,再利用数学归纳法即可得证.

(3)根据所要证明的不等式形式,进行恰当变形及放缩.

(1) 解析 $\because a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$, $\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$, $\therefore \{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项,2 为公比的等比数列, $\therefore a_n+1=2^n$,即 $a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 证明 $\because 4^{b_1-1}4^{b_2-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$.

$\therefore 4^{(b_1+b_2+\cdots+b_n)-n}=2^{nb_n}$, $\therefore 2[(b_1+b_2+\cdots+b_n)-n]=nb_n$, ①

$2[(b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1})-(n+1)]=(n+1)b_{n+1}$. ②

②-①,得 $2(b_{n+1}-1)=(n+1)b_{n+1}-nb_n$,

即 $(n-1)b_{n+1}-nb_n+2=0$. ③

令 $n=1$,得 $b_1=2$. 设 $b_2=2+d(d\in\mathbf{R})$.

下面用数学归纳法证明 $b_n=2+(n-1)d$.

(ⅰ)当 $n=1,2$ 时,等式成立.

(ⅱ)假设当 $n=k(k\geqslant2)$ 时, $b_k=2+(k-1)d$,那么

$b_{k+1}=\dfrac{k}{k-1}b_k-\dfrac{2}{k-1}=\dfrac{k}{k-1}[2+(k-1)d]-\dfrac{2}{k-1}=2+[(k+1)-1]d$.

这就是说,当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

根据(ⅰ)和(ⅱ),可知 $b_n=2+(n-1)d$ 对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

$\because b_{n+1}-b_n=d$, $\therefore \{b_n\}$ 是等差数列.

(3) 证明 $\because \dfrac{a_k}{a_{k+1}}=\dfrac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\dfrac{2^k-1}{2(2^k-\frac{1}{2})}<\dfrac{1}{2}(k=1,2,\cdots,n)$,

$\therefore \dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$.

$\because \dfrac{a_k}{a_{k+1}}=\dfrac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2^{k+1}-1)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3\cdot2^k+2^k-2}\geqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^k}(k=1,2,\cdots,n)$, $\therefore \dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{2^n})>\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}$, $\therefore \dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

注意 本题主要考查了数列、不等式等基本性质,主要体现了数学中化归的思想,考查学生综合解题能力.

高考预测大本营

自主探究　深度拓展　走近高考

1. 用数学归纳法证明:“$1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}(a\neq1)$”,在验证 $n=1$ 时,左端计算所得为　(　　)

A. 1　　B. $1+a$

C. $1+a+a^2$　　D. $1+a+a^2+a^3$

2. 用数学归纳法证明“当 n 为正奇数时,x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除”第二步的归纳假设应写成　(　　)

A. 假设 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$ 正确,再推 $n=2k+3$ 正确

B. 假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 正确,再推 $n=2k+1$ 正确

C. 假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 正确,再推 $n=k+1$ 正确

D. 假设 $n=k(k\geqslant1)$ 正确,再推 $n=k+2$ 正确

3. 猜想 $1=1,1-4=-(1+2),1-4+9=1+2+3,\cdots$ 的第 n 个式子为________.

4. 设平面内有 n 条直线($n\geqslant3$),其中有且仅有两条直线互相平行,任意三条直线不过同一点. 若用 $f(n)$ 表示这 n 条直线交点的个数,则 $f(4)=$__________;当 $n>4$ 时,$f(n)=$__________.(用 n 表示)

5. 已知函数 $f(x)=\frac{x+3}{x+1}(x\neq-1)$. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=f(a_n)$,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=|a_n-\sqrt{3}|,S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)用数学归纳法证明:$b_n\leqslant\frac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$;

(2)证明:$S_n<\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数,其图象关于直线 $x=1$ 对称,对任意 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$,都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,且 $f(1)=a>0$.

(1)求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$;

(2)证明 $f(x)$ 是周期函数;

(3)$a_n=f(2n+\frac{1}{2n})$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

7. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,且 $a_{n+1}=(1+\frac{1}{n^2+n})a_n+\frac{1}{2^n}(n\geqslant1)$.

(1)用数学归纳法证明:$a_n\geqslant2(n\geqslant2)$;

(2)已知不等式 $\ln(1+x)<x$ 对 $x>0$ 成立,证明:$a_n<e^2(n\geqslant1)$,其中无理数 $e=2.71828\cdots$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足关系式:$a_{n+1}=2+\frac{n}{a_n},n=1,2,3,\cdots,a_1=2$.