

高等学校“十一五”规划教材



TEXTBOOK
FOR HIGHER
EDUCATION



偏微分方程及 数值解

主编 乔宝明

PIANWEIFEN FANGCHENG JI SHUZHJIE

西北工业大学出版社

【内容简介】“偏微分方程及其数值解法”是高等院校的一门重要的基础课程。本书内容主要分两部分,即偏微分方程理论部分和数值解法部分。偏微分方程理论部分主要包括偏微分方程的常用解法:分离变量法、行波法、Green 函数法和积分变换法,以及两种常见的特殊函数 Bessel 函数和 Legendre 多项式;数值解法部分包括有限差分法、抛物型方程的差分解法、双曲型方程的差分解法、椭圆型方程的差分解法、变分法和有限元方法。

本书可以作为“信息与计算科学”及“数学与应用数学”专业的基础课教材,亦可作为非数学专业的各理工科专业本科生的教材(选学其中的基本内容)。

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程及数值解/乔宝明主编. —西安:西北工业大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5612-2642-1

I. 偏… II. 乔… III. 偏微分方程—数值计算 IV. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 155284 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电话:(029)88493844 88491757

网址:www.nwpup.com

印刷者:陕西天元印务有限公司

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:13.75

字数:328 千字

版次:2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

定价:26.00 元

序

偏微分方程在物理、力学和工程技术的众多学科中有着广泛的应用。经典的内容主要是讨论三类基本方程(椭圆型方程、抛物型方程和双曲型方程)的解析求解方法,包括分离变量法、行波法和积分变换法;数值解法包括差分法、变分法和有限元法等。在介绍这些基本内容的同时,考虑到学生已具备的数学基础,用通俗易懂、深入浅出的语言,让学生接触一些新的概念、理论和方法,不仅必要而且可行。

本书的四位作者从事这门课程的教学已有多年,积累了丰富的经验。在承担教学任务的同时,他们都有自己的研究方向。这一次,他们结合自己教学和科研工作的体会,根据工科院校的特点,密切结合工程技术中的应用,撰写了本书,以适应理工科不同专业的不同要求,这是一件很有意义的工作。

我相信本书的出版,对这门课程教学内容的改革会起到一种促进作用,有利于更好地培养适应新形势的科技人才。

李昌兴

2009年6月

前 言

偏微分方程及其数值解是一门同实际联系较密切、综合性较强的学科。它以解决实际问题为唯一目标,广泛运用力学、物理学和数学等各个领域的知识。

本书作为偏微分方程及其数值解的入门教材,力求用较短的篇幅,尽可能系统地介绍偏微分方程的基本理论和数值方法。为了便于教师讲授和学生学习,本书采用循序渐进的方式,主要介绍二阶线性椭圆型方程、抛物型方程、双曲型方程的基本理论和数值方法。在内容的选取上不仅强调数学理论的严密性、完备性,而且还侧重于数学模型的建立,数学和物理的结合,数学和计算机的结合,编写时突出方法和应用。由于教学大纲规定的学时数不同,相关专业在使用时可灵活选取内容。

本书的部分内容参考了国内外出版的一些教材,经过编者三年的教学实践,不断地加以修改和补充,并结合了我们教学科研的体会和成果。书中内容深入浅出,文字通俗易懂,并配有适量难易兼顾的习题。因此,本书可作为高等院校“偏微分方程”课程的教材,亦可作为数学、工程等领域的青年教师和科研人员的参考书。

本书的第1,2,3,11章由乔宝明编写,第6,7,8,9章由刘杰编写,第5,10,12章由周彬编写,第4章由刘叶玲编写,最后由乔宝明统稿。西安邮电大学李昌兴教授和西安交通大学宋雪丽博士对本书进行了审阅,在此向他们表示感谢。

由于作者学识所限,书中不足之处在所难免,恳请广大读者、同行和专家批评指正。

编 者

2009年6月

目 录

第 1 章 典型方程和定解条件	1
1.1 基本方程的建立	1
1.2 定解条件	7
1.3 定解问题的提法	10
习题 1	12
第 2 章 分离变量法	14
2.1 齐次方程齐次边界条件的定解问题.....	14
2.2 非齐次方程齐次边界条件的定解问题.....	26
2.3 周期性条件的定解问题.....	31
2.4 非齐次边界条件的处理.....	37
* 2.5 本征值理论	42
习题 2	49
第 3 章 行波法	53
3.1 二阶线性偏微分方程的分类.....	53
3.2 一维波动方程的 D'Alembert 公式	59
* 3.3 三维波动方程 球面波	65
* 3.4 二维波动方程 柱面波	69
习题 3	71
第 4 章 Bessel 函数	73
4.1 Bessel 方程的引入	73
4.2 Bessel 方程的求解	74
4.3 当 n 为整数时 Bessel 方程的通解	76
4.4 Bessel 函数的递推公式	77
4.5 函数展开成 Bessel 函数的级数	80

* 带 * 号的章节为选学内容。

4.6 Bessel 函数应用举例	83
习题 4	86
* 第 5 章 Legendre 多项式	88
5.1 Legendre 微分方程及 Legendre 多项式	88
5.2 Legendre 多项式的母函数	93
5.3 按 Legendre 多项式展开	95
5.4 连带 Legendre 多项式的定义	97
5.5 Laplace 方程在球形区域上的 Dirichlet 问题	98
5.6 本章公式表	99
习题 5	100
第 6 章 积分变换法	102
6.1 Fourier 变换在求解偏微分方程初值问题中的应用	102
6.2 Laplace 变换在求解偏微分方程定解问题中的应用	106
* 6.3 关于积分变换的一般讨论	111
习题 6	113
* 第 7 章 Green 函数法	115
7.1 Laplace 方程边值问题的提法	115
7.2 Green 公式	116
7.3 Green 函数	120
7.4 两种特殊区域的 Green 函数及 Dirichlet 问题的解	121
习题 7	124
第 8 章 有限差分法简介	126
8.1 有限差分近似	126
8.2 差分格式相容性、收敛性、稳定性	130
* 8.3 确定差分格式稳定性的方法	136
习题 8	141
第 9 章 抛物型方程的差分解法	143
9.1 常系数扩散方程	143
9.2 边界条件离散	149
9.3 对流-扩散方程	153
9.4 变系数方程	158

9.5 二维问题	160
习题 9	165
第 10 章 双曲型方程的差分解法	166
10.1 一阶线性常系数双曲型方程	166
10.2 一阶线性常系数双曲型方程组	172
10.3 一阶线性变系数双曲型方程及方程组	173
10.4 二阶线性常系数双曲型方程	175
习题 10	178
第 11 章 椭圆型方程的差分解法	179
11.1 Poisson 方程	179
* 11.2 差分格式的性质	181
11.3 边界条件处理	184
11.4 变系数方程	185
习题 11	187
* 第 12 章 变分法和有限元方法介绍	188
12.1 古典变分问题及求解	188
12.2 一维变分问题	193
12.3 二维变分问题	196
12.4 变分问题近似计算	198
12.5 有限元方法	201
习题 12	206
附录 有限差分法和有限元方法小结	208
参考文献	210

第 1 章 典型方程和定解条件

1.1 基本方程的建立

本节要导出一些典型的数学物理方程. 这里说的“导出”其实不过是用数学语言把物理规律“翻译”出来罢了. 通过这些典型方程的导出, 希望读者学会“翻译”技巧.

物理规律反映的是某个物理量在邻近状态和邻近时刻之间的联系, 因此, 数学物理方程的导出步骤如下: 首先要确定研究哪一个物理量 u . 从所研究的系统中划出一个小部分, 根据物理规律分析邻近部分和这个小部分的相互作用(抓住主要的作用, 略去不那么重要的因素), 以及这种相互作用在一个短时间里怎样影响物理量 u . 把这种影响用算式表达出来, 经简化整理就是数学物理方程.

在本节, 我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程, 这些方程构成本书的主要研究对象.

1.1.1 弦振动方程

演奏弦乐器(例如二胡、提琴)的人用弓在弦上来回拉动. 弓所接触的只是弦的很小一段, 似乎应该只引起这个小段的振动, 但实际上振动总是传播到整根弦, 弦的各处都振动起来.

振动是怎样传播的呢? 不妨认为弦是柔软的, 可是在绷紧以后, 相邻小段之间有拉力, 这种拉力叫做弦中张力, 张力沿着弦的切线方向. 由于张力作用, 一个小段的振动必定带动它的邻段, 而邻段又带动它的邻段……这样, 一个小段的振动必然传播到整根弦. 这种振动传播现象叫做波.

弦乐器所用的弦往往是很轻的, 它的质量只有张力的几万分之一. 跟张力相比, 弦的质量完全可以略去. 这样真实的弦就抽象为“没有质量的”弦.

把没有质量的弦绷紧, 它在不振动时是一根直线, 就取这直线作为 x 轴(见图 1.1). 把弦上各点的横向位移记作 u . 这样, 横向位移 u 是 x 和 t 的函数, 记作 $u(x, t)$. 要推导的就是 u 所遵从的方程.

弦的振动是一种机械振动. 机械振动的基本规律是质点力学的 $F=ma$. 然而弦并不是质点, 所以 $F=ma$ 对整根弦并不适用. 但整根弦可以细分为许多极短的小段, 每个小段可以抽象为质点, 就是说, 整根弦由许多相互牵连的质点组成, 对每个质点即每个小段可以应用 $F=ma$.

把弦细分为许多极短的小段. 以区间 $(x, x+dx)$ 上的小段 B 为例加以研究. B 既然没有质量而且是柔软的, 它就

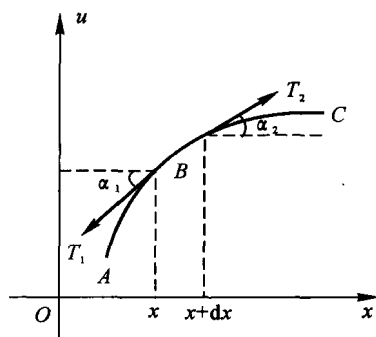


图 1.1

只受到邻段 A 和 C 的拉力 T_1 和 T_2 .

弦的每小段都没有纵向(即 x 方向)的运动,所以作用于 B 的纵向合力应为零.

弦的横向加速度记作 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$. 按照 $F=ma$, 小段 B 的纵向和横向运动方程分别为

$$\begin{cases} T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0 & (1.1.1) \\ T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = \rho ds \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} & (1.1.2) \end{cases}$$

式中, ρ 为弦的密度, 即单位长度的质量; ds 为小段 B 的弧长.

我们只考虑小的振动, 这时为小量, 如果忽略 α_1^2, α_2^2 以上的高阶小量, 则

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= 1 - \frac{\alpha_1^2}{2!} + \frac{\alpha_1^4}{4!} - \dots \approx 1 \\ \cos \alpha_2 &\approx 1, \sin \alpha_1 \approx \alpha_1 - \frac{\alpha_1^3}{3} \dots \approx \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 &\approx \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx dx \quad (\text{其中 } \frac{\partial u}{\partial x} = \tan \alpha \approx \alpha)$$

又 $\tan \alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x, \tan \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx}$. 这样, 式(1.1.1) 和式(1.1.2) 简化为

$$\begin{cases} T_2 - T_1 = 0 & (1.1.3) \\ T_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho dx & (1.1.4) \end{cases}$$

因此, $T_2 = T_1$, 弦中张力不随 x 而变, 它在整根弦中取同一数值. 同时, 在振动过程中的每个时刻都有长度 $ds \approx dx$, 即长度 ds 不随时间而变, 所以作用于 B 段的张力也不随时间而变. 弦中张力既跟 x 无关, 又跟 t 无关, 只能是常数, 记为 T , 式(1.1.4) 成为

$$T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

由于 dx 取得很小, $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$. 这样, B 段的运动方程就成为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.5)$$

其实, 作为代表的 B 段是任选的, 所以方程式(1.1.5) 适用于弦上的各处, 是弦作微小横振动的运动方程, 简称为**一维波动方程(弦振动方程)**.

对于均匀弦, ρ 是常数, 式(1.1.5) 通常改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.6)$$

式中, $a^2 = \frac{T}{\rho}$. 以后会看到 a 就是振动在弦上传播的速度.

质点的位移仅是时间 t 的函数, 质点的运动方程也就是以时间 t 为自变量的常微分方程. 而弦的位移 u 是时间 t 和坐标 x 两个自变量的函数, 弦的运动方程则是以 x 和 t 为自变量的偏微分方程. 它是弦上许多彼此相牵连的质点的运动方程, 质点之间的牵连反映在 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 项.

如果弦在振动过程中还受到外加横向力的作用, 每单位长度弦所受横向力为 $F(x,t)$, 则

应将式(1.1.2) 修改为 $T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + F(x, t) dx = \rho ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. 与此相应, 式(1.1.6) 修改为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1.1.7)$$

式中, $f(x, t) = F(x, t) / \rho$ 称为力密度, 为 t 时刻作用于 x 处单位质量上的横向外力. 式(1.1.7) 称为弦的受迫振动方程. 方程式(1.1.6) 与式(1.1.7) 的差别在于右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x, t)$, 这个项称为自由项. 包含有非零自由项的方程称为非齐次方程, 自由项恒等于零的方程称为齐次方程. 式(1.1.6) 为齐次一维波动方程, 式(1.1.7) 为非齐次一维波动方程.

1.1.2 传输线方程

对于直流电或低频的交流电, 电路的基尔霍夫(Kirchhoff) 定律指出同一支路中电流相等. 但对于较高频率的电流(频率值还没有高到能显著地辐射电磁波的情况), 电路中导线的自感和电容的效应不可忽略, 因而同一支路中电流未必相等.

现在考虑一来一往的高频传输线, 它被当做具有分布参数的导体(见图 1.2), 我们来研究这种导体内电流流动的规律. 在具有分布参数的导体中, 电流通过的情况, 可以用电流强度 i 与电压 v 来描述, 此处 i 与 v 都是 x, t 的函数, 记作 $i(x, t)$ 与 $v(x, t)$.

以 R, L, C, G 分别表示下列参数:

R ——每一回路单位的串联电阻;

L ——每一回路单位的串联电感;

C ——每单位长度的分路电容;

G ——每单位长度的分路电导.

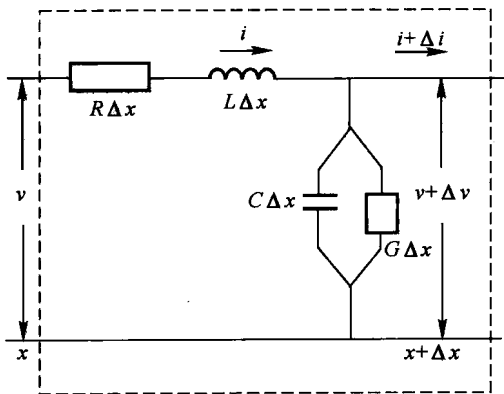


图 1.2

根据基尔霍夫第二定律, 在长度为 Δx 的传输线中, 电压降应等于电动势之和, 即

$$v - (v + \Delta v) = R\Delta x i + L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t}$$

由此可得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.1.8)$$

另外,由基尔霍夫第一定律,流入节点 x 的电流应等于流出该节点的电流,即

$$i - (i + \Delta i) = G \cdot \Delta x \cdot v + C \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

或

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -Gv - C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.1.9)$$

将方程式(1.1.8)与式(1.1.9)合并,即得 i, v 应满足如下方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \end{cases}$$

从这个方程组消去 v (或 i),即可得到 i (或 v) 所满足的方程.例如,为了消去 v ,我们将方程式(1.1.9)对 x 微分(假定 v 与 i 对 x, t 都是二次连续可微的),同时在方程式(1.1.8)两端乘以 C 后再对 t 微分,并把两个结果相减,即得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + G \frac{\partial v}{\partial x} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - RC \frac{\partial i}{\partial t} = 0$$

将式(1.1.8)中的 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 代入上式,得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + GRi \quad (1.1.10)$$

式(1.1.10)就是电流 i 满足的微分方程.采用类似的方法从式(1.1.8)与式(1.1.9)中消去 i ,可得电压 v 满足的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv \quad (1.1.11)$$

式(1.1.11)称为传输线方程.

根据不同的具体情况,对参数 R, L, C, G 作不同的假定,就可以得到传输线方程的各种特殊形式.例如,在高频传输的情况下,电导与电阻所产生的效应可以忽略不计,也就是说可令 $G=R=0$,此时方程式(1.1.10)与式(1.1.11)可简化为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

这两个方程称为高频传输线方程.

若令 $a^2 = \frac{1}{LC}$,上述两个方程与式(1.1.6)完全相同.由此可见,同一个方程可以用来描述不同的物理现象.一维波动方程只是波动方程中最简单的情况,在流体力学、声学及电磁场理论中,还要研究高维的波动方程.

1.1.3 电磁场方程

从物理学我们知道,电磁场的特性可以用电场强度 E 与磁场强度 H 以及电通(量)密度 D 与磁感应强度 B 来描述.联系这些量的麦克斯韦(Maxwell)方程组为

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1.12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.1.15)$$

式中, \mathbf{J} 为面积电流, ρ 为电荷的体密度.

这组方程还必须与场的物质方程

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.1.16)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.1.18)$$

相联立, 其中, ϵ 是介质的介电常数, μ 是导磁率, σ 为导电率, 我们假定介质是均匀而且是各向同性的, 此时 ϵ, μ, σ 均为常数.

方程式(1.1.12)与式(1.1.13)都同时包含有 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} , 从中消去一个变量, 就可以得到关于另一个变量的微分方程. 例如先消去 \mathbf{H} , 在式(1.1.12)两端求旋度(假定 \mathbf{H}, \mathbf{E} 都是二次连续可微的)并利用式(1.1.16)与式(1.1.18)得

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

将式(1.1.13)与式(1.1.17)代入上式得

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

而 $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$, 且 $\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, 所以最后得到 \mathbf{H} 所满足的方程为

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

同理, 若消去 \mathbf{H} 即得 \mathbf{E} 所满足的方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

如果介质不导电 ($\sigma = 0$), 则上面两个方程简化为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{H} \quad (1.1.19)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.1.20)$$

式(1.1.19)与式(1.1.20)称为三维波动方程.

若将三维波动方程以标量函数的形式表示出来, 则可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

式中, $a^2 = \frac{1}{\epsilon \mu}$; u 是 \mathbf{E} (或 \mathbf{H}) 的任意一个分量.

从方程式(1.1.15)与式(1.1.16)还可以推导出静电场的电位所满足的微分方程. 事实上, 以式(1.1.16)代入式(1.1.15)得

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$$

而电场强度 E 与电位 u 之间存在关系

$$E = -\operatorname{grad}u$$

所以可得

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}u = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

或

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.1.21)$$

这个非齐次方程称为泊松(Poisson)方程.

如果静电场是无源的,即 $\rho=0$,则式(1.1.21)变成

$$\nabla^2 u = 0 \quad (1.1.22)$$

这个方程称为拉普拉斯(Laplace)方程.

1.1.4 热传导方程

一块热的物体,如果体内每一点的温度不全一样,则在温度较高的点处的热量就要向温度较低的点处流动,这种现象就是热传导.由于热量的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置的变化,因此,解决传热问题都要归结为求物体内部温度的分布,现在我们来推导均匀且各向同性的导热体在传热过程中温度所满足的微分方程.与上例类似,我们不是先讨论一点处的温度,而应该先考虑一个区域的温度.为此,在物体中任取一闭曲面,它所包围的区域记作 V (见图 1.3).假设在 t 时刻区域 V 内点 $M(x, y, z)$ 处的温度为 $u(x, y, z, t)$, n 为曲面元素 ΔS 的法向(从 V 内指向 V 外).

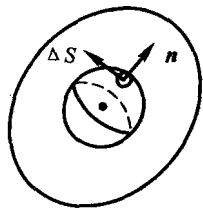


图 1.3

由传热学中的 Fourier 实验定律可知,物体在无穷小时间段 dt 内,流过一个无穷小面积 dS 的热量 dQ 与时间 dt 、曲面面积 dS 以及物体温度 u 沿曲面 dS 的法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 三者成正比,即

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS \cdot dt = -k (\operatorname{grad}u)_n dS dt = -k \cdot \operatorname{grad}u \cdot dS \cdot dt$$

式中, $k = k(x, y, z)$ 称为物体的热传导系数.当物体为均匀且各向同性的导热体时, k 为常数.

上式中的负号是由于热量的流向和温度梯度的正向,即 $\operatorname{grad}u$ 的方向相反而产生的.这就是说,当 $\frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{grad}u \cdot n > (<) 0$ 时,物体的温度沿 n 的方向增加(减少),而热流方向却与此相反,故沿 n 的方向通过曲面的热量应该是负(正)的.

利用上面的关系,从时刻 t_1 到时刻 t_2 ,通过曲面 S 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iint_S k \cdot \operatorname{grad}u \cdot dS \right) dt$$

流入的热量使 V 内温度发生了变化,在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内,区域 V 中各点温度从 $u(x, y, z, t_1)$ 变化到 $u(x, y, z, t_2)$,则在 $[t_1, t_2]$ 中 V 内温度升高所需要的热量为

$$\iiint_V c\rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV$$

式中, c 为物体的比热, ρ 为物体的密度, 对均匀且各向同性的物体来说, 它们都是常数.

由于热量守恒, 流入的热量应等于物体温度升高所需要吸收的热量, 即

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\iint_S k \cdot \text{gradu} \cdot dS \right) dt = \iiint_V c\rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV$$

此式左端的曲面积分中 S 是闭曲面, 假设函数 u 关于 x, y, z 具有二阶连续偏导数, 关于 t 具有一阶连续偏导数, 可以利用 Gauss 公式将它化为三重积分, 即

$$\iiint_S k \cdot \text{gradu} \cdot dS = \iiint_V k \cdot \text{div gradu} \cdot dV = \iiint_V k \cdot \nabla^2 u dV$$

同时右端积分可以写成

$$\iiint_V c\rho \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dV = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right) dt$$

因此, 有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V k \nabla^2 u dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right) dt \quad (1.1.23)$$

由于时间间隔 $[t_1, t_2]$ 及区域 V 都是任意取的, 并且被积函数是连续的, 因此式(1.1.23) 左右恒等的条件是它们的被积函数恒等, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.1.24)$$

式中, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$. 方程式(1.1.24) 称为三维热传导方程.

若物体内有热源, 其强度为 $F(x, y, z, t)$, 则相应的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t)$$

式中, $f = \frac{F}{c\rho}$.

作为特例, 如果所考虑的物体是一根细杆(或一块薄板), 或者即使不是细杆(或薄板), 而其中的温度 u 只与 x, t 有关(或与 x, y, t 有关), 则方程式(1.1.24) 就变成一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

或二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

如果我们考虑稳恒温度场, 即在热传导方程中物体的温度趋于某种平衡状态, 这时温度 u 已与时间 t 无关, 所以 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, 此时方程式(1.1.24) 就变成 Laplace 方程式(1.1.22). 由此可见稳恒温度场内的温度 u 也满足 Laplace 方程.

在研究气体或液体的扩散过程时, 若扩散系数是常数, 则所得的扩散方程与热传导方程完全相同.

1.2 定解条件

上一节所讨论的是如何将一个具体问题所具有的规律用数学公式表达出来, 除此之外, 还

需要把这个问题所具有的特定条件也用公式表达出来,这是因为任何一个具体的物理现象都是处在特定条件之下的,比如上节导出的弦振动方程是一切柔软均匀弦作微小横向振动的共同规律.但我们知道,一个具体的运动状态一定与此时刻之前某个时刻的状态及对弦两端的约束有关.因此,研究弦的具体运动,除了列出方程外,还必须给出其所处的特定条件,其他物理现象也是如此.

各个具体问题所处的特定条件,即研究对象所处的特定“环境”和“历史”,定义为数学物理问题的边界条件和初始条件.

1.2.1 初始条件

对于随着时间变化的问题,必须考虑研究对象特定的“历史”,就是说追溯到运动开始时刻的所谓“初始”时刻的状态,即初始条件.

对热传导问题初始状态指的是物理量 u 的初始分布(初始温度分布等),若以 $\varphi(M)$ 表示 $t=0$ 时物体任一点处的温度,则初始条件为

$$u(M, t) \Big|_{t=0} = \varphi(M) \quad (1.2.1)$$

对振动过程(弦、膜、较高频率交变电流沿传输线传播、电磁波)只给出初始“位移”

$$u(M, t) \Big|_{t=0} = \varphi(M)$$

是不够的,还须给出初始“速度”

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(M) \quad (1.2.2)$$

从数学角度看,就时间 t 这个变量而言,热传导方程中只出现 t 的一阶导数 $\frac{\partial u}{\partial t}$,是一阶微分方程,所以只需要一个初始条件式(1.2.1);波动方程中则出现二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,是二阶微分方程,所以需要两个初始条件式(1.2.1)和式(1.2.2).

另外稳定场问题(静电场、静磁场及稳定温度分布等)与时间无关,不存在初始条件问题.

1.2.2 边界条件

物理量在它所占“范围”即区域边界上的分布总比内部的分布直观得多,因为边界上的“情况”总可以通过观察、测量甚至规定得出,通过边界上的条件来探索物理量在区域内部的分布,实际上是解决数学物理问题的重要方法,所以给出边界条件非常重要.

所谓边界,即区域边界点所组成的集合,一维区域(例如弦)的边界,即两个端点;二维区域的边界为曲线或折线;三维区域的边界为曲面.

以下我们将区域的边界记为 S ,则边界条件主要有以下三种类型:

1. 第一类边界条件

第一类边界条件直接给出物理量在边界上的分布

$$u(M, t) \Big|_S = f_1(M, t) \quad (1.2.3)$$

对于弦振动问题,若两端固定,相应的边界条件为 $u \Big|_{x=0} = 0, u \Big|_{x=a} = 0$,即为第一类边界条件;对热传导问题,如果在导热过程中,物体边界的温度一致,则边界条件为

$$u \Big|_S = f$$

也为第一类边界条件.第一类边界条件又称为 Dirichlet 条件.

2. 第二类边界条件

第二类边界条件给出物理量的梯度在边界上的分布

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = f_2(M, t) \quad (1.2.4)$$

式中, \mathbf{n} 为边界 S 的法线方向.

弦振动问题中的自由端属于这类边界条件, 这是因为弦在自由端处不受位移方向的外力, 从而这个端点弦在位移方向的张力应为零, 由 1.1 节中的推导过程可知, 此时相应的边界条件为

$$T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$$

即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$$

对热传导问题, 若物体与周围介质处于绝热状态, 或者说边界 S 上的热量流速始终为零, 则由 1.1 节中的推导过程可知在 S 上必满足

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = 0$$

第二类边界条件又称为 Neumann 条件.

3. 第三类边界条件

第三类边界条件给出物理量及其边界上法线方向导数的线性关系

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u \right) \Big|_S = f_3(M, t) \quad (1.2.5)$$

式中, σ 为常数. 弦振动问题的弹性支承, 就是这类边界条件. 在弹性支承时, 由 Hooke 定律可知

$$T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = -ku \Big|_{x=a}$$

即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \right) \Big|_{x=a} = 0$$

式中, $\sigma = \frac{k}{T}$, k 为弹性体的弹性系数.

对热传导方程来说, 也有类似的情况, 如果在导热过程中, 物体的内部通过边界与周围介质有热量交换, 以表示和物体相接触的介质温度, 这时利用另一个热传导实验定律: 从一介质流入另一介质的热量和两介质间的温度差成正比

$$dQ = k_1(u - u_1) dS dt$$

式中, k_1 为两介质的热交换系数. 在物体内部任取一个无限贴于边界 S 的闭曲面 Γ , 由于在 S 内侧热量不能积累, 所以在 Γ 上的热量流速应等于边界 S 上的热量流速, 而在 Γ 上的热量流速为 $\left. \frac{dQ}{dS dt} \right|_{\Gamma} = -k \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma}$. 因此, 当物体和外界有热交换时, 相应的边界条件为

$$k_1(u - u_1)|_r = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_r$$

即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_r = \sigma u_1 \Big|_r$$

式中, $\sigma = k_1/k$. 第三类边界条件又称为混合边界条件.

式(1.2.3)、式(1.2.4)、式(1.2.5)中的函数 $f_i (i=1, 2, 3)$ 都是定义在边界 S 上的已知函数(一般来说还依赖于 t). 不论哪一类边界条件, 当它的数学表达式中的自由项(即不依赖于 u 的项)恒为零时, 这种边界条件称为齐次的, 否则称为非齐次的.

当然, 边界条件并不只限于以上三类, 还有各种各样的边界条件, 有时甚至是非线性的边界条件

$$-\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_s = C(u^4 \Big|_s - u_0^4)$$

式中, C 为一个常数, u_0 为外界的温度, u 和 u_0 都是绝对温标.

除了初始条件和边界条件外, 有些具体的物理问题还须附加一些其他条件才能确定其解.

所谓“没有边界条件的问题”是一种抽象结果. 实际物理系统都是有限的, 必然有边界, 要求有边界条件. 但是, 如果着重研究不靠近边界处的情形, 在不太长的时间间隔内, 边界的影响还没有来得及传到, 不妨认为边界在“无穷远处”, 将问题抽象成为无边界条件的问题. 例如, 半导体工艺的金扩散比较快, 在 100°C 左右, 金原子用几分钟时间就扩散到整个硅片. 硼和磷的扩散则慢得多, 在差不多同样的温度下, 硼和磷原子用了几十分钟以至两三个小时只能进入硅片几微米. 用扩散法制作超导材料 Nb_3Sn , 锡原子进入铌芯也只有几微米. 硅片或铌芯的厚度很小, 不到 1 mm , 可是, 硼、磷、锡原子的扩散深度更小. 如果着重研究边界附近的慢扩散, 在不太长的时间(十几小时甚至几十小时)里, 硼、磷、锡原子来不及到达另一边界, 根本不受另一边界的影响, 我们不妨认为不存在另一边界, 认为硅片或铌芯延伸到无限远(其实还不到 1 mm), 构成半无界的问题.

1.3 定解问题的提法

前面两节我们推导了三种不同类型的偏微分方程, 并讨论了相应的初始条件和边界条件的表达方式. 由于这些方程中出现的未知函数的偏导数的最高阶都是二阶, 而且它们对于未知函数及其各阶偏导数来说都是线性的, 因此, 这种方程称为二阶线性偏微分方程. 在工程技术上二阶线性偏微分方程遇到得最多.

如果一个函数具有某偏微分方程中所需要的各阶连续偏导数, 并且代入该方程中能使它变成恒等式, 则此函数称为该方程的解(古典解). 由于每一个物理过程都处在特定的条件之下, 因此, 我们的任务是要求出偏微分方程的适合某些特定条件的解. 初始条件和边界条件都称为定解条件. 把某个偏微分方程和相应的定解条件结合在一起, 就构成了一个定解问题.

只有初始条件, 没有边界条件的定解问题称为始值问题; 没有初始条件, 只有边界条件的定解问题称为边值问题; 既有初始条件又有边界条件的定解问题称为混合问题.

把一个具体物理问题抽象概括为一个定解问题, 这个定解问题提得是否符合实际情况, 当然还必须依靠实践来验证. 然而, 从数学角度来看, 一个定解问题提得是否有意义, 可以从三个