高中数学解题宝典

有效解题的策略

韦晔 编著

YOUXIAO JIETI DE CELÜE

化学工业出版社

高中数学解题宝典

有效解题的策略

YOUXIAO JIETI DE CELUE

韦晔 编著

化学工业出版社

·北京·

本书以高中数学基本内容为素材，以高中数学经典问题为载体，着重介绍高中数学解题策略、思维训练方法、突破思维障碍技巧、数学思想方法的应用、有效解题经典范例赏析等。把那些原本平凡然而恰恰因其平凡而常常被忽略的思路和方法整理成通用、有效、系统的解题方法奉献给读者。读完此书，你将发现其实你本来就有足够的能力提高自己的解题能力和数学素质。

本书能帮助高中生实现有效解题，对高中一线数学教师的教学必有所裨益。

图书在版编目（CIP）数据

高中数学解题宝典：有效解题的策略/韦晔编著. —北京：化学工业出版社，2009.8

ISBN 978-7-122-06108-9

Ⅰ.高… Ⅱ.韦… Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 102978 号

责任编辑：蔡洪伟　　装帧设计：史利平

责任校对：战河红

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

720mm×1000mm　1/16　印张 14¾　字数 305 千字　2009 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：24.00 元

版权所有　违者必究

前言

问题是数学发展的不竭动力与源泉，解答一定量的数学题是学好数学的基础．简单地说，数学是做出来的．数学方法论和解题研究一代宗师乔治·波利亚（George Polya）曾经说过："数学教学的首要任务就在于加强解题能力的训练．"

高中数学自然也不例外．高中数学解题能力表现在发现问题、分析问题和解决问题的敏锐洞察力与整体把握上，其核心就是能否掌握正确的解题策略，"因题制宜"地选择"对口"的解题技巧，使用有效的解题方法，调用精明的解题智慧．虽然高中数学学习并非总等于解题，大搞题海战术，但离开解题去学习高中数学同样也是错误的．高中数学解题能力的形成是建立在对高中数学基本概念、定理、公式和数学思想方法的理解和灵活运用的基础上的，提高解题能力最有效的途径还是通过解决问题来实现．

应当承认，高中学生已经具有较丰富的解题经验，能将数学知识、解题方法与问题条件进行有序组合，享受成功解题的快乐．然而，我们却经常听到很多同学反映，上课听老师讲课听得很"明白"，但到自己解题时，困难重重，无从入手；有时，在课堂上等老师把某一问题分析完毕，常常看到学生拍脑袋："唉，我怎么就没想到这样做呢?"还有一些学生，他们并不缺乏学习数学的热情，练习做的也不少，可成绩却始终上不去．于是，他们不断地增加学习时间，希望能够通过"劳其筋骨，饿其体肤"来提高解题能力和考试成绩，但总是事与愿违．面对中档题，基本懂题意，得分不如意；碰上"大难题"，读题三五遍，题意总不见．每次考试都"很受伤"，体验了历次数学考试带来的"过尽千帆皆不是，斜晖脉脉水悠悠"的无助．有位学生曾经这样说道："天下再没有比解数学题更令人惶恐和烦躁的事了．"

其实，今天的高中生在完成其必要的数学训练时需要解决的问题，不仅没有想象中那么难，而且大多数问题具有很强的规律性，或许比其他学科的问题更好解决，如果他们能够掌握其中的规律，必定茅塞顿开，疑难尽释，就会感到解数学题不仅不是一种痛苦，而且还是一件乐事．那么，问题究竟出在哪里呢？如果说数学学习的三重境界是"练"、"用"、"悟"，那么多数学生的数学学习往往只停留在第一重境界．作者经过多年的观察发现，学生对不少问题的解答产生困难，并不是因为这些问题太难以致无法解决，而是他们的思维形式与具体问题的解决之间存在着较大的差异．有的学生解题只是为了完成"任务"，缺乏"用"和"悟"的意识，不讲究解题策略，不善于将数学基本知识和数学思想方法整合于整个解题活动之中，无法实现"有效"解题，结果"做题越多越糊涂"．

本书不是数学解题理论的汇集，而是从高中数学教学和数学学习实践出发，把那

些原本平凡然而恰恰因其平凡而常常被忽略的思路和方法整理成通用、有效、系统的解题方法奉献给读者．确切地说，本书是为了帮助高中生实现有效解题，为高中数学教师提供丰富的教学素材而编写的．全书共五章，详细阐述解题策略、思维训练方法、突破解题思维障碍、数学思想方法的应用、有效解题经典范例赏析等，通过大量的典型问题来描述实现有效解题的基本途径．

在本书的编写过程中，笔者得到了广西师范大学汤服成教授，广西大化高中韦景伦校长的鼓励和支持，在此，谨向他们致以诚挚的谢意！同时，笔者也衷心感谢化学工业出版社的领导和编辑为本书的顺利出版所做的大量努力．

编著者

2009 年 6 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目 录

第一章 解题策略

第二章 思维训练

第三章 突破思维障碍

第四章 数学思想方法的应用

第五章　有效解题经典范例赏析

感悟数学解题

参考文献

第一章 解题策略

1.1 解题策略浅论

1. 解题策略的含义及其内容

当我们面对一个比较综合、有一定难度的数学问题时，怎样才能迅速地找到突破口，打开解题思路呢？俗话说“妙计可以打胜仗，良策则有利于解题”，解决一个数学问题，绝不能只凭蛮劲强攻硬取，必须因题而异，也就是说解题要讲究策略．何谓“策略”？“策略”的原意是计策与谋略，是指一种总体的行为指导方针，而非具体的方法．解决问题的策略是解题的计策与谋略，具体表现为对解决问题的方法、手段的选择与运用．解决数学问题，特别是解决新颖的数学问题时需要有策略，而这种策略又必须在解决问题的活动中形成和积累．有条理地整理信息，发现数量之间的联系是策略的切入口，发现和利用数量关系是解决问题的途径，通过整理信息，明确和把握数量关系，既是可操作的方法，也是解决问题的策略．

心理学家认为，在认识和解决问题的过程中，若遇到的是非熟知的、非模式化的问题，则需要创造性的思维，应具备解题的策略．数学题（尤其是综合性较强的数学题）的数据纷杂，条件繁多，或图形交错，或背景复杂，或文字语言冗长，常使人看不清问题的实质．在探求问题的答案时，对解题的一种概括性的、综合性的认识，就是数学的解题策略.

总之，策略是高层次的信息处理方法，它在问题解决中的作用是减少尝试的任意性，节约解题所需的时间和精力，使解题的成功具有更大的可能性．

2. 解题策略形成的条件

波利亚指出：“丰富而有条理的知识储备是解题者的至宝．”任何一种解题策略的产生都离不开具体的、已具备的数学知识（数学概念、法则、公式、定理、定义、公理等）和由基本题型形成的基本方法．一旦我们将所接受的信息和长期记忆中提取的信息形成网络，整合在一起，这时，问题就可朝着有希望的方向不断推进，从而形成解题策略．当我们对数学知识、数学思想方法的学习和运用达到一定水平时，应该把一般的思维升华到计策谋略的境界．只有掌握了一定的解题策略，才能在遇到问题时，找到问题的思考点和突破口，迅速、正确地解题．怎样形成合理的解题策略？这是我们在解题中要重点解决的问题．一般做法是：

(1) 仔细读题，认真观察，全面把握信息（条件），发现隐含在题目中的信息（条件）或特点；

(2) 联系比较，以题目信息（条件）或题目特征为线索，联想已掌握的知识、方法、经验，从而确定解决问题的策略，再进一步寻求问题转化的方法和途径；

(3) 按确定的解题策略尝试解题，若失败，退回 (1) 重新审题，确定新的解题策略；

(4) 组织解题内容，呈现思维过程，养成认真细致的良好习惯，克服眼高手低的弊病；

(5) 检查解决问题过程是否有疏漏，是否有不恰当的地方，是否有可改进的地方；

(6) 对问题进行反思，想一想是否有其他解决问题的方法？探索是否能得到其他不同的结论？改变题目条件是否能得到新的结论？若将条件和结论进行交换，情况如何？等等.

1.2 几个常用策略

为了使分析、联想、猜想的方向更加明确，思路更加活泼，进一步提高探索的成效，我们有必要掌握所有可能的解题策略．一切解题策略的基本出发点在于变换，即把面临的问题转化为一道或几道易于解答的新题，通过对新题的考察，发现原题的解题思路，最终达到解决原题的目的．基于这样的认识，我们认为常用的解题策略有：目的性策略、熟悉化策略、简单化策略、直观化策略、特殊化策略、一般化策略、整体化策略、间接化策略等.

1.2.1 目的性策略

解题必须有明确的目的，如何实现问题的求解，是解题策略的首要问题．有些同学虽然把题目看懂了，但没有明确解题的要求，盲目套用旧的解题模式，结果常常以失败而告终．因此，解题首先要明确目的和要求，根据要求抓住关键，逐步转化变形，以使问题顺利解决.

【例 1】 已知 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$，求证：$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$.

分析 1 证明目标是 $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$，若将左边展开，则得到一个含有 α,β 两个单角正切的三角函数式，右边展开只含有角 α，剩下的工作就是化简，故我们只要找出 α,β 的三角函数的显性关系式即可．将已知条件变形得

$$3\sin\beta=\sin2\alpha\cos\beta+\cos2\alpha\sin\beta\ ,\ \tan\beta=\frac{\sin2\alpha}{3-\cos2\alpha}$$

代入 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$化简即可（此法解题较麻烦）.

分析 2 要证 $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$，该式可以看成是角 α 和角 $\alpha+\beta$ 的三角函数之

间的关系．如果将已知条件转化成角 α 与角 $\alpha+\beta$ 的三角函数之间的关系，那么下一步只要将 $3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$ 这个关系式转化成要证的等式即可（此法最佳）．

上述解题思维都是在目的性策略下启动和定向的；反之，如果目的性策略差，就会行为盲目，或解题过程繁杂，或把握不住解题的方向，甚至会出现严重的知识或逻辑上的错误．

下面摘录的是两个学生在一次测试中失败的解题过程．

学生 1 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}$（到此为止，不知该怎么写了！）

学生 2 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$

$\Rightarrow 3\sin\beta=\sin2\alpha\cos\beta+\cos2\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow 3\sin\beta=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+(2\cos^2\alpha-1)\sin\beta$

$\Rightarrow 4\sin\beta=2\cos\alpha(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$\Rightarrow \dfrac{2\sin\beta}{\cos\alpha}=\sin(\alpha+\beta)$（到此为止，解题之路不知该走向何方！）

不难看出，这两个学生在解题过程中缺乏明确的目的，从而导致解题的失败．

1.2.2 熟悉化策略

所谓熟悉化策略，就是当我们面临的是一道以前没有接触过的陌生题目时，要设法把它转化为曾经解过的或比较熟悉的题目，以便充分利用已有的知识、经验或解题模式，顺利地解出原题．一般说来，对于题目的熟悉程度，取决于对题目自身结构的认识和理解．从结构上来分析，任何一道题目都包含条件和结论（或问题）两个方面．因此，要把陌生的问题转化为熟悉的问题，就需要在变换题目的条件、结论（或问题）以及它们的联系方式上多下工夫．常用的途径有以下几种．

1. 充分联想基本知识和基本题型

在解决问题之前，我们应充分联想和回忆与原有问题相同或相似的知识点和题型，充分利用相似问题中的方式、方法和结论，从而解决现有的问题．

【例 2】 对正整数定义运算“$\otimes$”：①$2\otimes2009=1$；②$(2n+2)\otimes2009=3[(2n)\otimes2009]$．求 $2010\otimes2009$ 的值．

解析 这是一个图表符号型的“创新型问题”，乍看起来似乎无法下手，但经过观察发现，题中每一个式子都出现了 2009，也就是说，在本题中 2009 是“不变量”．因此，题中所暗示的某个规律应当在其他的数和式当中产生．

若令 $a_n=(2n)\otimes 2009$，则有 $a_{n+1}=(2n+2)\otimes 2009=3a_n$，且 $a_1=2\otimes 2009=1$. 可见$\{a_n\}$是一个公比为 3，首项为 1 的等比数列，故 $a_n=3^{n-1}$，从而 $2010\otimes 2009=a_{1005}=3^{1004}$.

【例 3】 求函数 $f(x)=4\cos^3x-3\cos^2x-6\cos x+2$ 的值域.

解析 联想我们熟悉的题型：求函数 $f(t)=4t^3-3t^2-6t+2(t\in[-1,1])$的值域（具体解题过程从略）.

2. 多角度分析题意

对于同一道数学题，常常可以从不同的侧面、不同的角度去认识．因此，根据自己的知识和经验，适时调整分析问题的视角，有助于更好地把握题意，找到自己熟悉的解题方向.

【例 4】 已知 a,b,x,y 都是实数，$a>0$，$b>0$ 且 $a+b=1$，求证：$ax^2+by^2\geqslant(ax+by)^2$.

分析 这一道题目，可以采用比较法、放缩法证明，也可以用柯西不等式证明.

【例 5】 已知 S_n是等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，S_3,S_9,S_6成等差数列，求证：a_2,a_8,a_5成等差数列.

分析 显然公比 $q\neq1$. 下面给出三种证法.

证法 1 用公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. 因为 S_3,S_9,S_6成等差数列，故 $S_3+S_6=2S_9$，从而

$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}，即\ q^3+1=2q^6$$

所以 $a_2+a_5=a_1q+a_1q^4=a_1q(1+q^3)=a_1q(2q^6)=2a_1q^7=2a_8$，即 a_2,a_8,a_5成等差数列.

证法 2 用公式 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$. 因为 $S_3+S_6=2S_9$，所以

$$\frac{a_1-a_3q}{1-q}+\frac{a_1-a_6q}{1-q}=\frac{2(a_1-a_9q)}{1-q}，即\ a_3+a_6=2a_9$$

则 $a_2q+a_5q=2a_8q$，即 $a_2+a_5=2a_8$，所以 a_2,a_8,a_5成等差数列.

证法 3 用公式 $S_{2n}=S_n(1+q^n)$，$S_{3n}=S_n(1+q^n+q^{2n})$.

因为 $S_6=S_3(1+q^3)$，$S_9=S_3(1+q^3+q^6)$，$S_3+S_6=2S_9$，

所以 $S_3+S_3(1+q^3)=2S_3(1+q^3+q^6)$，解得 $q^3=-\dfrac{1}{2}$.

于是 $a_2+a_5-2a_8=a_1q+a_1q^4-2a_1q^7=a_1q(1+q^3-2q^6)=0$.

所以 a_2,a_8,a_5成等差数列.

3. 恰当构造辅助元素

数学中，同一素材的题目，常常可以有不同的表现形式；条件与结论（或问题）之间，也存在着多种联系方式．因此，恰当构造辅助元素，有助于改变题目的

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

形式，沟通条件与结论（或条件与问题）的内在联系．在数学解题中，构造辅助元素的方法是多种多样的，常见的有构造图形（点、线、面、体）、构造算法、构造多项式、构造方程（组）、构造坐标系、构造数列、构造等价性命题、构造反例、构造数学模型等．

【例 6】 设 n 为正整数，求证：$\frac{2^{2n}}{2n}\leqslant C_{2n}^{n}<2^{2n}$.

解析 通过计算组合数 C_{2n}^{n} 来证明这个不等式，繁难！通过考察并联想问题的背景，我们发现 C_{2n}^{n} 是二项式 $(1+x)^{2n}$ 的展开式中的最大系数．于是，在展开式

$$(1+x)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}x+\cdots+C_{2n}^{n}x^{n}+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

中，令 $x=1$，得 $2^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}+\cdots+C_{2n}^{n}+\cdots+C_{2n}^{2n}$

由于 n 为正整数，故 $C_{2n}^{n}<C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}+\cdots+C_{2n}^{n}+\cdots+C_{2n}^{2n}\leqslant 2nC_{2n}^{n}$

由后两式知，原不等式成立.

1.2.3 简单化策略

所谓简单化策略，就是当我们面临的是一道结构复杂、难以入手的题目时，要设法把它转化为一道或几道比较简单、易于解答的题目，以便通过对新问题的考察，启迪解题思路，以简驭繁，解出原题．简单化是熟悉化的补充和发展，一般说来，我们对于简单问题往往比较熟悉，容易把握．因此，在实际解题时，熟悉化和简单化这两种策略常常是结合在一起运用的，只是着眼点有所不同而已．解题中，实施简单化策略的途径和方法也是多方面的，常用的有：寻求中间环节、分类考察讨论、简化已知条件、恰当分解结论等.

1. 寻求中间环节，挖掘隐含条件

有些结构较复杂的题目，就其生成背景而论，大多是由若干比较简单的基本题，经过适当组合抽去中间环节而构成的．因此，从题目的因果关系入手，寻求可能的中间环节和隐含条件，把原题分解成一组相互联系的系列问题，是实现复杂问题简单化的一条重要途径.

【例 7】 已知函数 $f(x)=x^2-x+k$，若 $\log_2 f(a)=2$，且 $f(\log_2 a)=k(a>0, a\neq1)$，求使得$\begin{cases}f(\log_2 x)>f(1)\\ \log_2 f(x)<f(1)\end{cases}$成立的 x 的取值范围.

解析 在本题中，由于参数 a,k 的值是用含有抽象函数记号的方程隐蔽地给出的，不能一眼看透．不过，若从参数着眼，顺藤摸瓜，把它分解为几个基本题，逐步突破，思路便畅通了.

由题意，本题可分解为下列四个子问题：

① 由方程 $f(\log_2 a)=k$，求 a 的值；②由方程 $\log_2 f(a)=2$，求 k 的值；③求 $f(x)$ 的解析式；④解不等式组求 x 的取值范围.

依次解①得 $a=2$，解②得 $k=2$，从而③为 $f(x)=x^2-x+2$，解④得 $0<x<1$.

【例 8】 已知函数 $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)=-3+2\cos x$，其中 $x\in(-1,1)$，且 $f(0)=0$. 求使不等式 $f(1-x)+f(1-x^2)>0$ 成立的 x 的取值范围.

解析 求 x 的取值范围，就是要解关于 x 的不等式 $f(1-x)>-f(1-x^2)$，而要解这个不等式，必须设法“脱”去函数符号“f”. 因此我们必须弄清楚两个问题：

① 函数 $f(x)$ 的奇偶性；②函数 $f(x)$ 的单调性.

因为 $f'(x)=-3+2\cos x<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调递减；又根据导函数的解析式，可设 $f(x)=-3x+2\sin x+c$，而 $f(0)=0$，故 $c=0$，从而 $f(x)=-3x+2\sin x$. 容易判断，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内为奇函数. 再注意到题目的隐含条件即可顺利求出 x 的取值范围.

不等式 $f(1-x)+f(1-x^2)>0$ 等价于 $f(1-x)>f(x^2-1)$，即有

$$\begin{cases}1-x<x^2-1\\-1<1-x<1\\-1<x^2-1<1\end{cases}$$，解之得 x 的取值范围是 $(1,\sqrt{2})$.

2. 分类考察和讨论

有些数学题，解题的复杂性主要在于它的条件、结论（或问题）包含多种不易识别的可能情形. 对于这类问题，选择恰当的分类标准，把原题分解成一组并列的简单题，有助于实现复杂问题简单化.

【例 9】 设 k 为实常数，问方程 $(2-k)x^2+(k-1)y^2=(2-k)(k-1)$ 表示何种曲线？

解析 当 $k=1$ 时，方程表示直线 $x=0$（y 轴）；当 $k=2$ 时，方程表示直线 $y=0$（x 轴）；当 $k<1$ 时，方程表示焦点在 y 轴上的双曲线；当 $1<k<\frac{3}{2}$ 时，方程表示焦点在 y 轴上的椭圆；当 $\frac{3}{2}<k<2$ 时，方程表示焦点在 x 轴上的椭圆；当 $k>2$ 时，方程表示焦点在 x 轴上的双曲线.

【例 10】 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数：①$C\subseteq A\cup B$ 且 C 中含有 3 个元素；②$C\cap A\neq\varnothing$.

分析 由已知并结合集合的概念，C 中的元素分两类：①属于 A 的元素；②不属于 A 而属于 B 的元素，并由含 A 中元素的个数 1,2,3，而将取法分三种.

解答 满足条件的集合 C 的个数为：$C_{12}^1C_8^2+C_{12}^2C_8^1+C_{12}^3C_8^0=1084$.

评述 本题是排列组合中“包含与排除”的基本问题，正确地解题的前提是合理科学地分类，达到分类完整及每类互斥的要求，还有一个关键是要确定 C 中元素如何取法.

另一种解题思路是使用“排除法”，即 $C_{20}^3-C_8^3=1084$.

3. 简化已知条件

有些数学题，条件比较抽象、复杂，不太容易入手．这时，不妨简化题中某些已知条件，寻找条件的等价形式，再看看这个简化了的条件和问题的目标有什么联系，最终解决原问题．

【例 11】 已知$\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $6\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$，求 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$的值．

解析 题中条件比较复杂，难以看出它与目标式有什么联系，故先对条件式进行简化．

由 $6\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$，得$(2\sin\alpha-\cos\alpha)(3\sin\alpha+2\cos\alpha)=0$．

又由 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$知 $\sin\alpha>0,\cos\alpha\leqslant 0$，故 $2\sin\alpha-\cos\alpha>0$，从而 $3\sin\alpha+2\cos\alpha=0$．

结合题设条件及 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，可求出 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 的值，再由两角差的正弦公式，即得 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$之值．

4. 恰当分解结论

有些综合性问题，解题的主要困难来自结论的抽象概括，难以直接和条件联系起来，这时，不妨把结论分解为几个比较简单的部分，以便各个击破，解决原来的问题．

【例 12】 求证：$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}<\frac{2n^2-n-1}{2(n+1)}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$．

分析 由于不等式左边含有对数符号，用数学归纳法证明无法实现，必须另寻他法．现从不等式两边的结构出发，探究证明思路．由不等式右边，有

$$\frac{2n^2-n-1}{2(n+1)}=\frac{2n^2-2-(n-1)}{2(n+1)}=n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left[1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]+\left[1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]+\cdots+\left[1-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

再由左边和式的特点，我们又联想到

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \quad ①$$

综合上述三式，我们需要证明：

$$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}<\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

为此，只要证明$\frac{\ln k^2}{k^2}<1-\frac{1}{k^2}$，即证 $\ln k^2<k^2-1(2\leqslant k\leqslant n)$．

故本题需要证明：(1) ①式成立；(2) $\ln x<x-1(x\geqslant 4)$．①式显然成立，$\ln x<x-1$ $(x\geqslant 4)$ 用导数极易证明．

1.2.4 直观化策略

所谓直观化策略，就是当我们面临的是一道内容抽象、不易捉摸的题目时，要设法把它转化为形象鲜明、直观具体的问题，以便凭借事物的形象把握题中所涉及的各对象之间的联系，找到原题的解题思路.

1. 图表直观

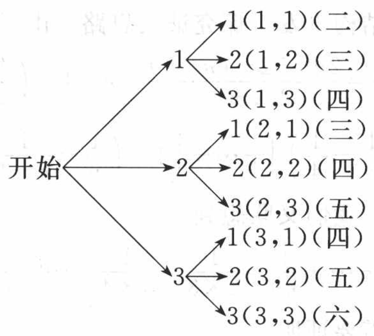
有些数学题，内容抽象、关系复杂，给理解题意增添了困难，常常由于题目的抽象性和复杂性，使正常的思维难以进行到底. 对于这类题目，借助图表直观，利用示意图或表格分析题意，有助于抽象内容形象化、复杂关系条理化，使思维有相对具体的依托，便于深入思考，发现解题线索.

【例 13】 某中学高一年级有 6 个班，要从中选出 2 个班代表学校参加某项活动，（一）班必须参加；另外再从（二）班至（六）班选出 1 个班.（四）班有学生建议用如下的方法：从装有编号为 1,2,3 的三个白球的 A 袋中摸出一个球，再从装有编号为 1,2,3 的三个红球的 B 袋中摸出 1 个球（两袋中球的大小，形状与质量完全一样），摸出的两个球上的数字和是几，就选几班，你认为这种方法公平吗？请说明理由.

分析 1 用表格来说明：

编号	红球 1	红球 2	红球 3
白球 1	(1,1)(二)	(1,2)(三)	(1,3)(四)
白球 2	(2,1)(三)	(2,2)(四)	(2,3)(五)
白球 3	(3,1)(四)	(3,2)(五)	(3,3)(六)

分析 2 用树状图来说明：



所以，（二）班被选中的概率为$\frac{1}{9}$，（三）班被选中的概率为$\frac{2}{9}$，（四）班被选中的概率为$\frac{1}{3}$，（五）班被选中的概率为$\frac{2}{9}$，（六）班被选中的概率为$\frac{1}{9}$，故这种方法不公平.

评述 列表和画树状分析图是获取概率的常用方法，在列表或利用树状分析图

获取概率时要注意不要遗漏任何一种可能的结果.

【例 14】 “国际无烟日”来临之际，小李就公众对在餐厅吸烟的态度进行了调查，并将调查结果制作成如图 1-1 所示的统计图.

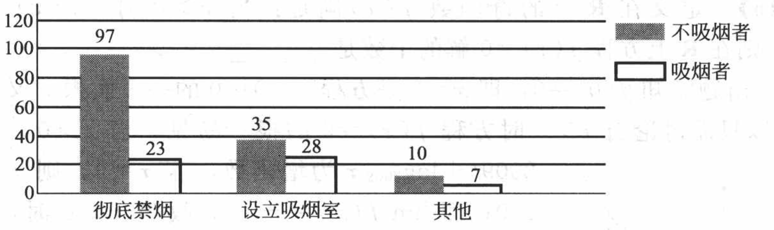


图 1-1

请根据图中的信息回答下列问题：

(1) 被调查者中，不吸烟者赞成在餐厅彻底禁烟的人数是________；

(2) 被调查者中，希望在餐厅设立吸烟室的人数是________；

(3) 求被调查者中赞成在餐厅彻底禁烟的频率；

(4) 某市现有人口 370 万，根据图中的信息，估计该市现有人口中赞成在餐厅彻底禁烟的人数.

答案 (1) 97；(2) 63；(3) 0.6；(4) 222 万.

评述 三种意向中，每一种都含有不吸烟的人和吸烟的人，审题时注意这些区别是关键.

2. 图形直观

有些涉及数量关系的题目，用代数方法求解，道路崎岖曲折，计算量偏大．这时，不妨借助图形直观，给有关数量以恰当的几何分析，拓宽解题思路，找出简捷、合理的解题途径.

【例 15】 设正三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，$\angle ASB=40^\circ$，$SA=2\text{cm}$，过 A 作截面分别与 SB, SC 交于点 D, E，求截面三角形 ADE 周长的最小值.

解析 如图 1-2，将正三棱锥 $S\text{-}ABC$ 沿侧棱 SA “剪”开，展成平面图形，则 AM 的长即为截面三角形 ADE 周长的最小值．由 $\angle ASM=120^\circ$，$SA=2\text{cm}$ 及余弦定理可求得 AM.

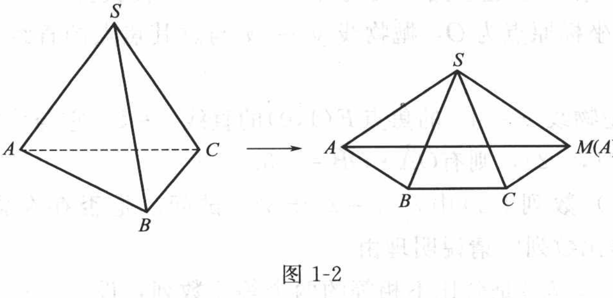


图 1-2

3. 图像直观

不少涉及数量关系的题目，与函数的图像密切相关，灵活运用图像的直观性，常常能以简驭繁，获取简便、巧妙的解法.

【例 16】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足：当 $x>0$ 时，$f(x)=2009^x+\log_{2009}x$，则在 $\mathbf{R}$ 上方程 $f(x)=0$ 解的个数是__________.

解析 由题意知 $f(0)=0$，即 $x=0$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个实根．又 $f(x)$ 为奇函数，所以只需讨论当 $x>0$ 时方程 $f(x)=0$ 的根．易见，当 $x>0$ 时，$f(x)=2009^x+\log_{2009}x$ 为增函数，若 $x=1$，则 $f(1)=2009>0$；而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，故当 $x>0$ 时，函数 $y=f(x)$的图像与 x 轴有且只有一个交点．根据奇函数的图像知，当 $x<0$ 时，函数 $y=f(x)$的图像与 x 轴也有且只有一个交点．所以方程 $f(x)=0$ 有 3 个实数根.

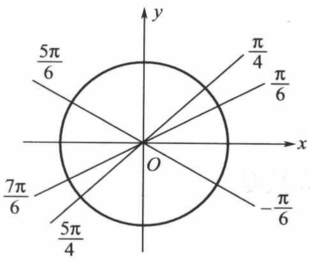


图 1-3

【例 17】 求函数 $y=\sqrt{4\cos^2x-3}+\ln(1-\tan x)$的定义域.

分析 利用三角函数的图像或三角函数线（如图 1-3）求解，先求出一个周期上的解再写出全部.

解答 由$\begin{cases}4\cos^2x-3\geqslant0\\1-\tan x>0\end{cases}$，得

$\begin{cases}\cos x\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{或}\cos x\leqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\tan x<1\end{cases}$，故所求的定义域为$\left\{x\,|\,k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

评述 三角函数图像和三角函数线，是处理三角函数值大小问题的两个有力武器，用好它会使解题简捷、高效.

1.2.5 特殊化策略

所谓特殊化策略，就是当我们面临的是一道难以入手的一般性题目时，要注意从一般退到特殊，先考察包含在一般情形里的某些比较简单的特殊问题，以便从特殊问题的研究中，拓宽解题思路，发现解答原题的方向或途径.

【例 18】 设坐标原点为 O，抛物线 $y^2=4x$ 与过其焦点的直线交于 A,B 两点，求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

解析 取过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点$F(1,0)$的直线 $x=1$，它与该抛物线的两个交点为 $A(1,2)$，$B(1,-2)$，则有$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$.

【例 19】 (1) 数列$\{c_n\}$中，$c_n=2^n+3^n$．试问：是否存在常数 p，使数列$\{c_{n+1}-pc_n\}$是等比数列？请说明理由；

(2) 已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是公比不相等的两个等比数列，设 $c_n=a_n+b_n$，试问：数

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com