高等学校教学用書

代数与初等函数

С. И. 諾窪塞洛夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

代数与初等函数

C. И. 諾渥塞洛夫著
張禾瑞　趙慈庚等譯

高等教育出版社

本書系根据苏俄教育部國立教科書出版社（Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР）出版的諾窪塞洛夫（С. И. Новоселов）著“代数与初等函数”（Алгебра и элементарные функции）的1952年第三版譯出。原書經苏俄教育部審定为师范專科学校教科書。

本書中譯本第一編由張禾瑞、孙永生譯，第二編由趙慈庚、嚴士健譯，並由傅种孙同志担任校訂。

代数与初等函数

С. И. 諾窪塞洛夫著

張禾瑞等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號 13010·6　開本 850×1168 1/32　印張 12 15/16　字數 379,000

一九五四年九月上海第一版

一九五六年六月上海第二版

一九五六年七月上海第九次印刷

印數 34,501－42,500　定價(8) ¥1.50

目　錄

第一編　代數

第二編　初等函數

序

这本書是預备給師范專科学校的物理數学系做課本用的。

这本書的第一編（按照教学大綱）講述一些初等代數的問題，这些問題都是有原則性意义的，並且对於中学教師是最迫切需要的。这一編里也包含着某些通常在高等代數教程里才講到的知識——这是由於在師范專科学校里不拿高等代數当做一門独立的科目來学習的緣故。

近世代數的許多重要概念（如环、体、同構）是簡單的，可以用初等方法來講解，同時又有助於清晰地去了解中学代數課本的科学內容。我已經尽力使近世代數的基本概念和中学教材達到自然的协調。

第二編專門有系統地研究初等函數。按照師范專科学校現行的教学大綱，不应該把三角当做独立的教学科目來学習。三角函數与其他初等函數並列起來，当做初等函數的一部分來学習，而將牽涉初等几何圖形的計算問題歸之於几何学。这样的課程結構是絕对不能用之於中学的。

由於对外國的所謂改良运動的过火行为採取不批判的态度，曾產生过要在中学里不把三角做为独立數学科目的悖謬"教学法"思想，这在現代已經遭到了全面的破產。但是对於学过了中学數学課程的師范專科学校学生來說，这样的課程結構是合宜的。中学的數学同初等函數是有關系的，未來的教師对初等函數的嚴整系統有所認識是很重要的。注意，这書里第二編的材料，以及它所取的講述系統，当着安排十年級複習課程的時候，可以用做藍本。

關於用初等方法來研究函數的問題，教学大綱以及这个課本都格外注意。認为旣然高等數学对於函數的研究問題有了完备的方法，便不該把这种研究包括在初等數学教程里的观點，我們認为是一个嚴重

的錯誤。問題在於，涉及函數研究的許多概念(如單調性，極大与極小值)不必依賴於微分法，微分法僅在做这种研究時，供給一些強有力的工具。熟識研究的对象，当然应該在对完成这种研究的工具加以探討之前。在中学課程范圍里，把涉及函數研究的各基本概念揭露出來是完全可能的(当然不过於細致完备地)。正是这一點是很重要的。

在中学教学大綱里插入微積分的想法，曾經是爭論的对象，但是現在未必能認真地說，这种有半世紀之久的思想会再復活。尤其是，不掌握直接根据函數定义來研究函數的技巧，而能夠順利地运用數学分析的方法，是大可怀疑的。初等函數在數学中，在數学的应用中都是極其重要的一類，而每个教師在直接研究这些函數上，在繪制它們的圖象上都应該有素养。

關於師范專科学校教科書的讀者所提的意見，我以为必須說明下列事項：

第一，这部書根本不帶有"通用指南"的性質，而僅是特别給師范專科学校預备的一套課本的組成部分；

第二，这部書是專为有着中学程度的數学知識的人而寫的。

由於上述原因，編者有权認为許多概念是已知的。譬如敍列或函數的極限概念，是高等數学里所講述的，讀者可以在高等數学里去找它們的定义。

在初等數学課本的初版問世以后，我接到讀者很多的信，關於这書提出了各种見解与希望，指出了不同的錯誤与缺點。讀者的这些批評和意見曾帮助我在以后几版中將本書加以改進。謹向所有同我交換过意見的讀者深深地致以謝意。

奧古湼夫、莫捷諾夫、庫圖佐夫、非里切夫各教師在这本教科書的工作上，用宝貴的意見与指教來帮助我，謹向以上各位学者致謝。麥捷里亞諾夫斯基执行書中插圖的繪制工作，又馬庫瑟維奇提出一些有益的指正，我表示感謝。

諾窪塞洛夫　1951年9月20日　莫斯科

第一編　代數

第一章　有理數体

§1. 負數的引入

从算術中，我們已知由於數各个物体而最先產生的自然數概念其后得到擴大。我們引入了表示沒有物体的數零以及为了表示量的部分所必需的分數。

在算術中所研究的是自然數 $1, 2, 3, \cdots$ 及數 0 以及形式为 $\frac{m}{n}$ 的分數，这里 m, n 是整數，$n \neq 0$。这些數，除零外，將叫做正有理數。这样，从算術中所知的數的集合是由正數和零所組成的。这些數中以零为最小，因此不等式 $k>0$ 被用为表示 k 为正數的符号。

數的概念的更進一步的擴大是与度量有方向的量的需要相關联着的，这种量不僅由數值，而且还須由方向才能完全表征出來。我們將研究特殊形式的方向量，对於它們只須區分兩个相反方向。这類方向量的例子是：物体作直線运動進退的路程，位在直線上的線段，在寒暑表上从冰點向上向下計算的温度；从某一時刻向前或向后計算的時間。某种量的增大与減小可認为是它在相反方向的变化（如温度上昇与下降，收入与開支等）。

我們約定，对於某一种量的在某一固定方向的度量，我們用从算術中已知的數。於是就有必要引入新的數來擴大數的概念，用这些新數來表示这种量在相反方向的度量結果。

例如研究直線上線段的度量的問題。沿着給定的直線 MN 移動的兩个可能方向之一叫作正方向;有方向的直線將叫作軸。在圖 1, a 中,“向右”的方向被选定为正方向並用箭头标明(这里我們利用直观想像,各几何概念的精确定义屬於几何学)。为了度量与軸同方向的線段(例如 AB),我們用正數。若 B 點与 A 點重合(卽線段退縮为點),那么我們說, AB 是“零線段”。对於零線段我們用數零作为它的度量結果。为了度量与軸反方向的線段必須引入新數——叫作負數。若線段 AB (方向向右)的量用數 a 表示,則線段 BA 的量必須以“新的”負數來表示,我們用“$-a$”來記它。數 a 与 $-a$ 互称为反數。正的整數和分數、負數和零總起來都叫作“有理數”。由算術中已知的數彼此之間有下面众所週知的關系:第一,在这些數上可实施算術运算;第二,这些數中間有順序關系,卽是兩个不同的數中,一个是較大的數,另一个是較小的數。適宜於新數的算術运算我們尙未建立起來。例如我們还不知道:兩个負數相加,或者一个正數与一个負數相加,是什么意义。同样我們也不知道如何比較兩負數或者一負數与一正數的大小。在擴大了的數的集合內,可以利用引入適当定义的方法來建立算術运算。这些定义就是协議,在这些协議中,我們同意,当“新”數参進算術运算的時候,給算術运算附加一定的意义。这些定义像任何定义一样是不能証明的。同样,適合於新數的“大於”,“小於”,“等於”的概念也是利用適当的定义來引入的。

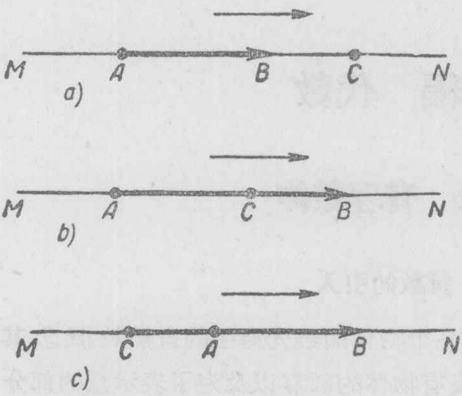

圖 1.

我們确定定义時,应按下面原則:

第一,我們借着算術中已知數的运算解決了一系列的应用問題。引入一种新數之所以有益是因为这些數有具体的解釋並且能应用在人類的实际活動上。由此下面原則是可理解的:

利用有理數上的运算必須能解決涉及方向量的这样一些問題,它們与在算術里能利用正數上的运算來解決的問題性質相同。

例如,兩線段(無向量)的和的長等於該兩線段的長的和。我們知道,任意有向線段的和是借助於下列法則:

$$AB+BC=AC \text{ (圖 1)}$$

來建立的。

在所說的原則下,量線段 AC 的數,必須看作是量線段 AB 与 BC 的數的和。

在中学代數課本中,形成正負數运算法則時,先研究一系列不同的具体問題(有向線段的相加,向右及向左的运動,盈余与虧損的計算,溫度的变化等)。从解这些問題的結果中就看出了,从正負數运算的具体意义出發,应如何建立这种运算的法則。例如,若是約定,等速运動公式:

$$s=vt$$

可以应用到任意的有向速度以及从某一時刻向前或向后計算的時間上,那么对於正負數的乘法就不可避免地要採用已知的"符号法則"。

我們不再重複这些論述,因为在中学課本上它們已被有足夠說服力地講解过了。

我們只指出下面的事实:正負數演算的具体解釋,表明減法在有理數集合里应該經常地可以实施。只需看線段上的运算。不論線段 AB 和 AC 是怎样的線段,存在唯一的差線段 X,滿足条件:

$$AB+X=AC, \tag{1}$$

卽 $X=BC$。

令 a 和 b 是量 AC 与 AB 的數；量 BC 的數 x 必是數 a 与 b 之差 $a-b$，因为由（1）我們应有：

$$b+x=a。$$

第二，算術中數的运算具有一系列的性質。基本运算律如下：

加法的性質。

1° 交換律：

$$a+b=b+a。$$

2° 結合律：

$$(a+b)+c=a+(b+c)。$$

乘法的性質。

3° 交換律：

$$ab=ba。$$

4° 結合律：

$$(ab)c=a(bc)。$$

加法与乘法如下地互相联系：

5° 分配律：

$$(a+b)c=ac+bc。$$

从这些基本規律，在算術中推出了任意多个數的运算法則。

在算術上已知數的集合中，乘法的逆运算（除法），除去除數为零外，是可以單值地实施的，卽：不論 a 和 b 是怎样的數，只要 $b\neq 0$，就存在唯一的數 x，滿足条件

$$bx=a,$$

这个數（商）被表示如下：

$$x=\frac{a}{b}。$$

加法的逆运算（減法）不常常成立，卽：滿足条件

$$b+x=a \qquad (2)$$

的數 $x=a-b$，僅当 $a\geqslant b$ 時才存在。

下述对於任意 a 都成立的等式：

$$a+0=a,\quad a\cdot 0=0,\quad 1\cdot a=a, \tag{3}$$

表出 0 与 1 兩數的特性。

在定义任意有理數的运算時我們將遵从下面的原則：

加法和乘法应当是可以單值地实施的，即是：对於任意兩个有理數 a 和 b 可使唯一的數 $a+b$，叫作它們的和，以及唯一的數 ab，叫作積，跟它們对应。

正有理數的相加和相乘应与算術中的意义相同。对於加法和乘法运算，基本定律 1°—5° 必須成立。等式(3)必須成立。在有理數集中減法应是可以單值地实施的，即是对於任意 a 和 b 一定存在唯一的數 x，滿足条件(2)。在有理數集中除法也应是可以單值地实施的，但零作除數除外。

既然定律 1°—5° 將被滿足，那么在作成有理數的各种运算時，可以利用在算術中得到的运算法則(作为基本定律的推論)。

假定，所提出的条件能被滿足，那么由这些条件必然地可以得出關於有理數的运算所必須採用的定义。下面我們作这一方面的研究，但是不企圖達到十分完备的地步。

讓我們看一看，为了使基本定律有效，对於有理數的运算須採取何种定义。由於減法可以实施，对於有理數集合中的任一數 a，必存在唯一的反數 $x=(-a)$，滿足条件：

$$a+x=0 \quad 或 \quad a+(-a)=0。$$

令 $a<b$(此处 a, b 都是正有理數)，在有理數集中必存在唯一的數 x，滿足条件：

$$b+x=a。$$

設 $b-a=r$，即 $b=a+r$。那么

$$(a+r)+x=a。$$

两边加$-a$，得(利用加法的性質)：

$$(-a)+(a+r)+x=0 \quad 或 \quad [(-a)+a+r]+x=0,$$

由此$r+x=0$而$x=-r=-(b-a)$。这就是說，x是差$b-a$的反數。

令$-r$和$-r_1$是兩个負數(於是r和r_1是正數)，有：

$$\left.\begin{array}{r} r+(-r)=0 \\ r_1+(-r_1)=0 \end{array}\right\}; \tag{4}$$

依項相加，得：

$$[r+(-r)]+[r_1+(-r_1)]=0;$$

由於加法的交換和結合性質，有：

$$(r+r_1)+[(-r)+(-r_1)]=0,$$

因而 $$(-r)+(-r_1)=-(r+r_1)。$$

这就是說，兩个負數的和必是和$r+r_1$的反數。

令r是正數，而$-r_1$是負數；我們有：

$$r_1+(-r_1)=0。$$

两边加數r：

$$r+(-r_1)+r_1=r$$

或 $$r_1+[r+(-r_1)]=r。$$

从最后等式得：当$r>r_1$時和$r+(-r_1)$必等於差$r-r_1$，而当$r<r_1$時这个和必等於數$-(r_1-r)$，即差r_1-r的反數。这样，我們得出中学教程中已知的正負數加法法則。

現在來看乘法法則；我們有：

$$a+(-a)=0;$$

两边乘以任一有理數b。乘左边時，我們利用按照約定应該有效的分配律。得：

$$[a+(-a)]b=ab+(-a)b \quad 或 \quad ab+(-a)b=0。$$

由此，數$(-a)b$是ab的反數：

$$(-a)b=-ab;$$

以 $-b$ 代 b，得：

$$(-a)(-b)=-a(-b)=ab。$$

我們得出中学教程中已知的正負數乘法法則。

以上討論說明有理數的运算法則应該是怎样的。但是我們並未談到以下問題，即事实上能否建立这样的數集，在这个數集里一系列事先指定的，我們用以得出运算規則的条件能被滿足。

在下面几節內將講述有理數理論的形式邏輯的建立。我們將指出，以算術中所知的數集为基礎，用形式邏輯的方法，可以建立起这样的新數的系統，使它們和原來已知的數联系以后，形成新的"擴大"的數集，在这數集中，所有作为論述始點的条件將眞正地成立。在形式邏輯的理論中，數的运算將利用一些协議來建立；本節所述，是表明使我們有必要採用这些协議的原因。

§2. 有理數

对任一正有理數 a 使一新物件与之对应，記为 $-a$。例如(根据所建立的对应關系)，數 1 有 -1 与它对应，數 3 有 -3 与它对应，數 $\frac{1}{3}$ 有 $-\frac{1}{3}$ 与它对应。

这些物件被看作新數並叫作負有理數。

这个定义是不足以表征負數概念的，因为現在我們还沒有建立"新數"自身間以及与"舊數"間的任何相互關系。我們將逐漸建立这些相互關系，而負數概念的全部表征將利用一連串的定义來完成。

定义　相互对应的數 a 与 $-a$ 互称为反數或对称數。

數 $-a$ 是 a 的反數，而 a 是 $-a$ 的反數。

这样，置符号 $-$ 在正數前面就变成了反數，即負數。我們約定，对於負數也用置符号 $-$ 的办法來表示变为相应的正數。由於这个协議：$-(-a)$ 是 a，$-[-(-a)]$ 是 $-a$。例如，$-(-2)$ 是 2，$-\left[-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

是$-\dfrac{1}{3}$。

再加以下新補充协議：數0認为是它自身的反數：-0是0。

數0既不算是正數，也不算是負數。

若是一个負數的反數是整數（分數），那末这个負數叫作整數(分數)。这样，數-2，-5是整數，而數$-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{5}{7}$是分數。

正負整數，正負分數和數0一起作成的數集，叫作有理數集合。

註 I. 若是約定，正數a前可加$+$号，而認为$+a$卽是a（例如$+2$是2，$+7$是7)，那么对任一異於零的有理數a，若它是正的，可加上$+$号，若它是負數，可加上$-$号。

註 II. 若是認为，字母a可以表示任意有理數(不只是正數)，那么当a是正數時，$-a$表示負數；当a是負數時，$-a$表示正數；当a是零時，$-a$表示零。

註 III. 符号$-$(減号)有兩种作用：作为轉为反數的符号及作为減法运算符号。以下，当在同一式子中这个符号以不同意义出現時，將利用括弧；卽a的反數$-a$將表示为$(-a)$。

定义　正數的絕对值卽是該正數；負數的絕对值是作为它的反數的正數；零的絕对值是零。

絕对值也叫作模。为了表示絕对值，在給定數的兩旁划垂直線。例如：

$$|2|=2,\quad \left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\quad |0|=0,\quad |5-3|=|2|=2。$$

在具体解釋中，一个數的絕对值表示含在一个量內的度量單位的數量，而沒有計及它的方向。

線段的長(不計算方向)是正的，而被用相应的數的絕对值來表示。

§3. 有理數大小的比較

在算術中研究的數有相互的順序關系：若a和b是兩个數，那么在