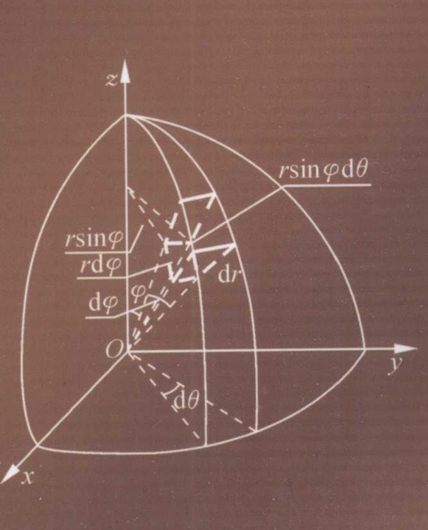
普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

微积分（第二版）

华中科技大学高等数学课题组



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

微　积　分

（第二版）

王汉蓉　毕志伟　魏　宏　林　益
刘国钧　乔维佳　谢　鹏

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

微积分(第二版)/华中科技大学高等数学课题组.—武汉:华中科技大学出版社,2009年8月
ISBN 978-7-5609-5510-0

Ⅰ.微… Ⅱ.华… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第111105号

微积分(第二版)

华中科技大学
高等数学课题组

策划编辑:李 德
责任编辑:李 德 封面设计:潘 群
责任校对:张 琳 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉众心图文激光照排中心
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:35 字数:692 000
版次:2009年8月第2版 印次:2009年8月第12次印刷 定价:48.80元
ISBN 978-7-5609-5510-0/O·492

第二版前言

本次修订工作有以下几个方面：

(1)修订了第一版的一些错误，更换了一些更适合的例子，修饰了一些语句。

(2)考虑到教学实际情况，将微分方程提前，安排在第七章。

(3)在曲线积分与曲面积分一章，增加了斯托克斯公式的内容。

修订工作仍由原作者完成，分工同第一版安排。

编　者

2009 年 6 月

前　　言

本教材由长期从事高等数学教学和研究的资深教师，按照教育部"高等数学课程教学基本要求"，结合长期的教学实践经验编写而成。

本书在内容上力求实用、够用；在例题选择上力求典型、全面；在论述形式上力求详尽、易懂。本书配备了比较全面的基础练习题与综合性练习题。为满足读者进行阶段性复习与自我检测，在每一章末安排了小结及自测题。小结写得比较详细，有基本要求、内容提要及学习指导。所有习题均附有答案。

全书共分十二章，其中第一章与第二章由毕志伟撰稿；第三章与第四章由王汉蓉撰稿；第五章与第六章由魏宏撰稿；第七章与第八章由乔维佳撰稿；第九章与第十章由刘国钧撰稿；第十一章与第十二章由林益撰稿。全书插图由谢鹏绘制，习题由刘国钧审校。

陈爱兰，杨林锡，陈久明等老师认真仔细地审阅了全部书稿，提出了许多宝贵的意见，在此表示感谢。

本书难免有不足甚至错误之处，恳请读者指正。

编　者

2001 年 6 月

目　录

第一章　函　　数

本章介绍变量与函数的概念、函数的基本性质、基本运算以及初等函数. 在初等数学中,读者已学习了许多具体的函数,如幂函数、三角函数及反三角函数、指数函数与对数函数,从中对函数的概念及性质已有了一个初步的认识,本章将着重于这些内容的系统归纳. 由于函数是高等数学课程的主要研究对象,因此本章内容构成全书的基础.

1.1　变量与函数

本节介绍变量、函数的概念,函数的几何解释及几个重要的几何性态.

1.1.1　变量与常量

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中,人们会遇到许多用来表示不同事物的量,通常可将它们分为两类:一类是在考察过程中保持不变,即始终取一固定的值的量,称之为**常量**;一类是在考察过程中会出现变化,即可以取不同的值的量,称之为**变量**.

以学校的运动场为例. 运动场的面积、跑道的长度保持不变,是常量;而每天来运动场运动的人数、运动场的气温、风向等则会出现变化,因而是变量.

又如,将一密闭的容器中的气体进行加热,在加热过程中,容器中气体的体积、分子数保持不变,是常量;气体的温度、容器内的气压在不断变化,是变量.

一个量是变量还是常量,依赖于其相关的考察过程. 例如对于重力加速度 g,从地球表面的各点分布值来看,它是变量(因为地球表面各点的地心距不完全一样);而在考察某一点处的自由落体运动过程中,它却是一个常量.

表示事物中的量通常是用实数,如上述问题中的面积、长度、人数、气温、气压、体积等等. 但也有许多量须用复数、矢量等来表示,如风向常用矢量表示,方程 $x^2+1=0$ 的根则是用复数来表示. 在本课程中如不特别说明,所涉及的量均是指用实数表示的量.

通常用字母 a、b、c、λ、μ 等表示常量,用字母 x、y、z、s、t 等表示变量. 在一个考察过程中,变量 x 所取的数值的全体组成一个数集,记作 M,称为变量 x 的**变域**. 表示数集 M 的方法主要有两种:一种是**列举式**,如百分制下学生分数 x 的变域是 $M=\{0,1,2,\cdots,100\}$;另一种是**命题式**,如方程 $P(x)=0$ 的根 x 的变域是 $M=\{x\mid P(x)=0\}$,其一般形式为

$$M=\{x \mid x\text{满足命题}P\},$$

数 x 属于数集 M 的充分必要条件是 x 满足命题 P.

在几何上,可以用数轴表示全体实数集,从而数轴上的点集可以用来表示实数集.本课程中用得较多的实数集是下列被称为区间的数集:

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\} \tag{1}$$

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\} \tag{2}$$

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\} \tag{3}$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\} \tag{4}$$

$$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\} \tag{5}$$

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\} \tag{6}$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\} \tag{7}$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\} \tag{8}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\text{是实数}\} \tag{9}$$

其中,a、b 是给定实数,$a<b$;$+\infty$ 与 $-\infty$ 是两个记号(不是实数),分别读作正无穷大与负无穷大.称(1) ~ (4) 区间为有限区间,$b-a$ 是这些区间的长度,(5) ~ (9) 区间为无限区间.称区间(1) 为闭区间,(2) 为开区间,(3) 为左闭右开区间,(4) 为左开右闭区间.

以 a 为中心的开区间 $(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$ 称为 a 的**邻域**,δ 称为此邻域的半径.常将邻域 $(a-\delta,a+\delta)$ 记作 $N(a,\delta)$ 或 $N(a)$.在 $N(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 后,称为 a 的**去心邻域**,记作 $N^0(a,\delta)$ 或 $N^0(a)$.邻域是极限论中的一个基本概念,可用来表示点 x 与点 a(即数 x 与数 a)的接近程度.如

$$|x-a|<\delta\Leftrightarrow x\in N(a,\delta),$$

$$0<|x-a|<\delta\Leftrightarrow x\in N^0(a,\delta).$$

以后用字母 I 泛指区间(1) ~ (9).

1.1.2 函数概念

在一个问题的考察过程中,往往有几个变量同时出现,并且这些变量之间有一定的联系.相联系的变量可以是两个,也可能更多,先看以下几个例子.

例 1 在物体作自由落体运动的过程中,物体的高度 h,运动的速度 v,下落时间 t,下落的距离 s 都是变量;下落开始时初始高度 h_0 及加速度 g 都是常量.由物理学可以得到它们之间的以下关系式:

$$s+h=h_0,\quad v=gt,\quad s=\frac{1}{2}gt^2.$$

例 2 考察圆的半径 r 及面积 A.r 和 A 的变域是 $(0,+\infty)$,它们之间的相互关系为

$$A=\pi r^2.$$

例 3 考察矩形的长 a，宽 b，周长 l，面积 A，它们满足以下关系式：

$$l = 2(a+b), \quad A = ab.$$

从这些例子中可以观察到同一过程中变量之间的依从关系：一些变量的变动会影响到另外一些变量之值的大小. 变量之间的这种依从或制约关系称作函数关系. 如

$$s = h_0 - h, \quad v = gt, \quad s = \frac{1}{2}gt^2, \quad A = \pi r^2.$$

这些关系式反映了两个变量之间的依从关系，称之为一元函数关系. 而

$$l = 2(a+b), \quad A = ab,$$

描述的是三个变量之间的依从关系，称之为二元函数关系或多元函数关系. 为简便起见，先研究一元函数关系，以下简称函数.

函数是本课程的主要研究对象，其定义如下.

定义 1 设 x、y 是两个变量，D 是一非空数集，f 是某一确定的规则. 若变量 x 在 D 中任取一值 x_0 时，依据规则 f 变量 y 有唯一确定的值 y_0 与 x_0 对应，则称 f 是从变量 x 到变量 y 的一个函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

称 x 是函数 f 的**自变量**，y 是函数 f 的**因变量**. 与 x_0 对应的 y_0 称为函数 f 在 x_0 的**函数值**，记作 $f(x_0)$，即 $y_0 = f(x_0)$. D 称为函数 f 的**定义域**，函数 f 在 D 上的函数值的全体构成一个数集：

$$W = \{f(x) \mid x \in D\},$$

称 W 为函数 f 的**值域**.

由定义 1 知，函数 f 是一个对应规则. 由于此规则是通过函数值 $f(x)(x \in D)$ 来表示的，故也可以用 $f(x)$ 来表示函数. 在不致混淆时亦可以用 $y(x)$ 表示 $f(x)$，用或 y 来表示函数.

一个函数由对应规则 f 及定义域 D 所完全确定. 也就是说，两个函数相等的充分必要条件是其定义域与对应规则完全一致.

例 4 判断以下各对函数是否相同.

(1) $f(x) = x^2, g(x) = (2x)^2$；　　(2) $f(x) = 2\lg x, g(x) = \lg x^2$；

(3) $f(x) = x, g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$；　　(4) $f(x) = x, g(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$.

解 以上函数的定义域均未写出，这时约定其定义域是使表达式有意义的 x 的全体值，称为**自然定义域**.

(1) f 与 g 不相同. 因为对于同一个 x_0，$f(x_0) = x_0^2$，而 $g(x_0) = 4x_0^2$，这说明对应规则不同，故不是同一函数.

(2) f 与 g 不相同. 因为 f 的定义域是 $(0, +\infty)$，而 g 的定义域是 $(-\infty, +\infty) - \{0\}$. 定义域不同，故不是同一个函数.

(3) f 与 g 不相同. 因为 f 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，而 g 的定义域是 $(-\infty, 1)$ 及 $(1, +\infty)$，定义域不同.

(4) f 与 g 相同. 首先是因为定义域相同，均为 $(-\infty, +\infty)$；其次是对应规则相同，因为 $g(x) = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x = f(x)$.

值得注意的是，选用什么字母来表示函数不是本质的. 例如，$\sin x$ 与 $\sin y$ 是同一个函数，$f(x) = 1 + x^2$ 与 $g(t) = 1 + t^2$ 也是同一个函数. 一般的，$f(x)(x \in D)$ 与 $f(y)(y \in D)$ 是同一个函数，因为其定义域与对应规则相同.

另外，在一些实际问题中，函数 $f(x)$ 的定义域是由变量 x 的实际含义来确定，而不是由代数式 $f(x)$ 的自然定义域来确定. 例如，圆面积公式 $A = \pi r^2$ 中，半径 r 的实际变化范围 $(0, +\infty)$ 是该函数的定义域，而不是自然定义域 $(-\infty, +\infty)$.

函数关系 $y = f(x)(x \in D)$ 可以在 xy 平面上直观表示，称平面点集

$$G = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

为函数 $y = f(x)$ 的图形(见图 1.1). 图形 G 常常是一段或几段曲线，因此也称 G 为“函数 $y = f(x)$ 的曲线”.

利用函数 f 的图形，可以直观地了解变量 x 与变量 y 的对应关系，尤其是函数 f 的整体特征. 因而在研究函数时，常常画出其图形，以期发现变量之间的变化规律. 用图形的几何特征解释函数的相关概念或性质，常说成是**几何解释**.

以下举出一些函数的例子，这些函数以后将经常用到.

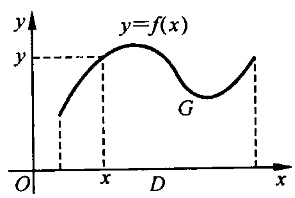


图 1.1

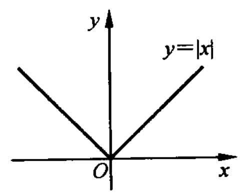


图 1.2

例 5 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

这个函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $[0, +\infty)$，其图形关于 y 轴对称(见图 1.2).

例 6 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

这个函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $\{-1, 0, 1\}$，其图形关于原点对称(见图 1.3).

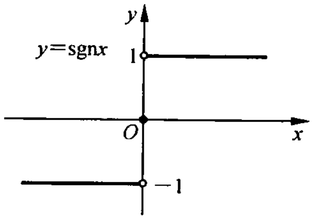


图 1.3

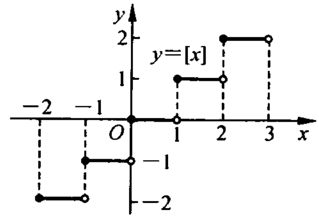


图 1.4

例 7　取整函数

$$y = [x]$$

对任意实数 x，记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 例如，$[\sqrt{2}] = 1$，$[-\pi] = -4$，$[\pi] = 3$，$[0] = 0$. 这个函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是整数集. 其图形如图 1.4 所示.

例 8　Dirichlet 函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}; \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

这个函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $\{0,1\}$. 其图形是分布在直线 $y = 0$ 及 $y = 1$ 上的无限个点构成的集合(见图 1.5)，无法准确画出来.

以上几个函数与初等数学中所熟悉的一些函数在表达方式上有所不同. 如 $y = x^2$，$y = \sin x$ 都是由一个公式给出 x 与 y 的对应规则. 而 $|x|$，$\mathrm{sgn}x$，$D(x)$ 则是针对 x 所属范围不同而用不同的公式表示 x 与 y 的对应规则. 或者说，函数对应规则 f 是由一些分规则组合而成. 依这种方式定义的函数通常称为**分段函数**. 下面再举一例说明.

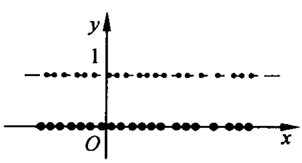


图 1.5

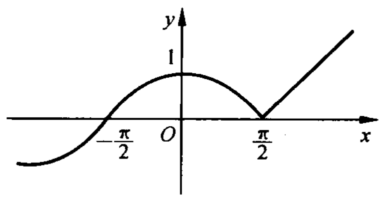


图 1.6

例 9　函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x - \pi/2, & x > \pi/2; \\ \cos x, & x \leqslant \pi/2 \end{cases}$$

是一个分段函数，函数规则 f 在 $x \leqslant \pi/2$ 及 $x > \pi/2$ 时分别由 $\cos x$ 及 $x - \pi/2$ 表示. f 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $[-1, +\infty)$(见图 1.6). 在计算函数值 $f(x_0)$ 时，应视 x_0 的大小情况而用不同的公式. 如 $f(0) = \cos 0 = 1$，$f(2\pi) = 2\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3}{2}\pi$.

上述各个例子中函数的表示法均属于**解析法**或**公式法**，对应规则 f 用数学公式(分段或整段地)表示.但是，不要以为这就是函数表示的唯一形式.变量 x 与变量 y 之间的对应规则还可以用平面上的一段曲线来表示.例如，由电子仪器记录的某种信号随时间的变化曲线(如心电图、地震测量波等)，这种表示法称为**图示法**.它能直观地表达 x 与 y 的对应关系.此外，当人们关心的不是函数 f 的对应规则而是 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 时，常常把 x 经常取的值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与其函数值 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 列成一个表格，供人们查用.例如，自然数 n 的平方表与立方表，正弦函数表，常用对数表等等.这种表示法称作**表格法**.

函数的以上三种表示法各有所长.解析法便于对函数 f 进行理论研究与数值计算.图示法便于直观了解 f 的动态以及整体性质.表格法则使得函数值便于查找.本课程中以解析法为主，并尽可能地辅以图形说明，以期获得代数与几何上的全面了解.

1.1.3 函数的几何性态

当函数值 $f(x)\geqslant 0$ 时，称此函数为非负函数.函数的非负性在几何上表现为其图形始终在 x 轴上方(可以与 x 轴相切)，如图 1.7 所示.因此若知道函数的图形，则从几何上可以一眼看出，它是否为非负函数.

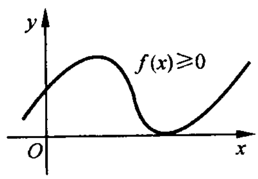


图 1.7

以下几种重要的函数性质均具有非常明确的几何特性，分别予以介绍.

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对区间 I 中任意两个值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增**(或**单调减**).单调增与单调减统称为**单调**.称 I 为 f 的单调区间，称 f 为 I 上**单调函数**.

若将上面的不等号"$\leqslant$"与"$\geqslant$"分别换作"$<$"与"$>$"，则称函数 f 在区间 I 上**严格单调增**与**严格单调减**，统称为**严格单调**.由于 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 包含了 $f(x_1)<f(x_2)$，故严格单调的函数也是单调函数.

常数函数 $y=C$，既属于单调增函数也属于单调减函数.

在几何上，$f(x)$ 在区间 I 上单调增(或单调减)表现为 $f(x)$ 的图形沿 x 轴的正向逐渐上升(或下降)(见图 1.8).利用这一几何特性很容易判别曲线 $y=f(x)$ 所对应的函数的单调性.

例 10 确定以下函数的单调性.

(1) $y=x^2$； (2) $y=x^3$.

解 从初等数学知道，这两个函数的图形如图 1.9 所示，从而直接看出，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上严格单调减，在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增，但在 $(-\infty,+\infty)$ 上它

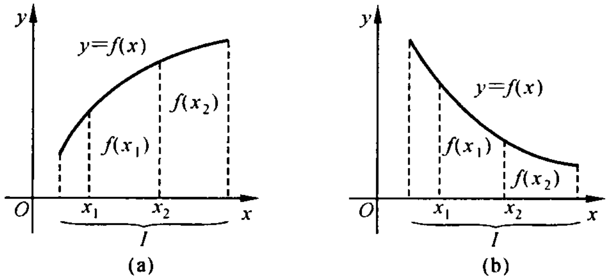


图 1.8

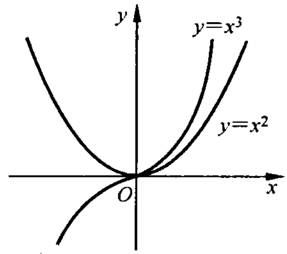


图 1.9

不是单调函数;而函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增.

在论及函数 $f(x)$ 的单调性时,应当指明单调区间.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$),若对每个 $x\in D$ 有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**;若对每个 $x\in D$ 有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

在几何上,$f(x)$ 是奇函数,表现为其图形关于原点对称;而 $f(x)$ 是偶函数表现为其图形关于 y 轴对称(见图 1.10).

可以验证,以下函数是$(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数

$$x,\quad x^3,\quad \sin x,\quad \operatorname{sgn}x,$$

而以下函数是$(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数

$$1,\quad x^2,\quad \cos x,\quad D(x).$$

必须注意,不能说函数 $f(x)$ 非奇即偶或非偶即奇. 如 $f(x)=x+1$ 既不是奇函数,也不是偶函数,因 $f(-1)=0$,$f(1)=2$,既无 $f(-1)=-f(1)$,也无 $f(-1)=f(1)$. 从图形上也可看出这一点(见图 1.11).

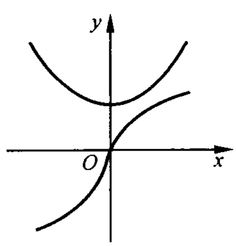


图 1.10

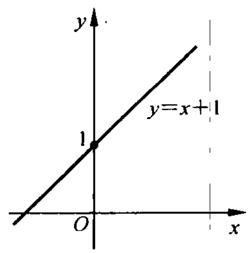


图 1.11

3. 周期性

设 $f(x)$ 的定义域为 D,T 是正常数.若任给 $x \in D$,有 $x+T \in D$,且

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,称 T 为 $f(x)$ 的一个**周期**.

若 T 是 $f(x)$ 的一个周期,则因

$$f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x),$$

故 $2T$ 也是 $f(x)$ 的一个周期.类似地可以说明,$nT(n=3,4,\cdots)$ 也是 $f(x)$ 的周期.

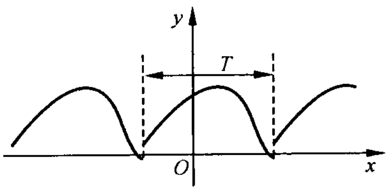


图 1.12

因此,周期函数会有无限多个周期,若这些周期中有一个最小的正周期 T,则称 T 为$f(x)$ 的**基本周期**.例如,函数 $\sin x$,$\cos x$ 以 2π 为基本周期,$\tan x$,$\cot x$ 以 π 为基本周期.

在几何上,若将定义区间划成长度为 T 的等分段,则 $f(x)$ 以 T 为周期就表现为其图形在每个段上有相同的形状(见图 1.12).

4. 有界性

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若有常数 B,使得

$$f(x) \leqslant B$$

对每个 $x \in I$ 都成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**有上界**,且称 B 是$f(x)$ 在区间 I 上的一个**上界**.若有常数 A,使得

$$A \leqslant f(x)$$

对每个 $x \in I$ 都成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**有下界**,且称 A 是$f(x)$ 在区间 I 上的一个**下界**.若有常数 $M > 0$,使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对每个 $x \in I$ 都成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**,且称 M 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个界.若对任何正数 M,总有 $x \in I$ 使得 $|f(x)| > M$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

$f(x)$ 在区间 I 上有界,相当于有 $M > 0$,使得

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M \quad (x \in I).$$

这说明 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界(M) 又有下界($-M$).反过来,若 $f(x)$ 在区间 I 上既有下界 A 又有上界 B,则记 $M = \max\{|A|,|B|\}$,便有

$$-M \leqslant A \leqslant f(x) \leqslant B \leqslant M \quad (x \in I).$$

这说明 $f(x)$ 在区间 I 上有界.因此,$f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是,它在区间 I 上既有上界又有下界.

从几何上看,$f(x)$ 于区间 I 上有界,表现为曲线 $y=f(x)$ 介于直线 $y=A$ 与 $y=B$ 之间(见图 1.13).

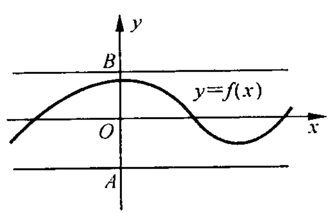


图 1.13