

智慧星 趣味数学



8
年级使用

◎ 邢书田 邢治 编著

ZhihuiXingquWeiShuXue



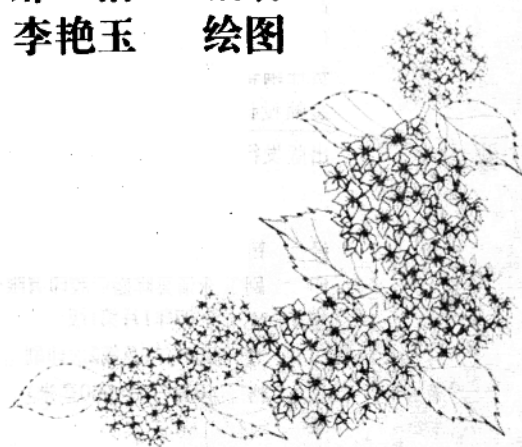
天津教育出版社
TIANJIN EDUCATION PRESS



智慧星 趣味数学

八 年 级

邢书田 邢 治 编著
谷 润 李艳玉 绘图



天津教育出版社
TIANJIN EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

趣味数学. 八年级 / 邢书田等编著. —天津: 天津教育出版社, 2007. 1

(智慧星)

ISBN 978-7-5309-4563-6

I. 趣... II. 邢... III. 数学课—初中—课外读物
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 161489 号

智慧星——趣味数学(八年级)

出 版 人 肖占鹏

选题策划 董 刚

作 者 邢书田 等

责任编辑 董 刚

装帧设计 王 楠

出版发行 天津教育出版社 www.tjeph.com.cn

天津市和平区西康路 35 号

邮政编码: 300051

经 销 全国新华书店

印 刷 永清县晔盛亚胶印有限公司

版 次 2007年1月第1版

印 次 2009年1月第2次印刷

规 格 16开(787×960毫米)

字 数 160 千字

印 张 9

书 号 ISBN 978-7-5309-4563-6

定 价 11.00元

前言

趣味数学这座知识百草园,一直是各国数学爱好者的乐园。在这里,他们不仅能学到许多课本上没有的知识,更重要的是,可以使你掌握灵活多变的思维方法和具备科学探索的精神,而这些本领的掌握与否,往往可以决定你一生事业的成败。

智慧星趣味数学以教学大纲为纲,以网络资源为基础,在参考了古今中外大量的名题、名解的基础上,精心编辑。集科学性、知识性、趣味性于一体,形成一套完整的数学知识学习丛书。

本书图文并茂。通过动动手,数学儿歌,脑筋急转弯,数学趣题,中国古算名题,数学小知识,有趣的数字,趣味数学故事,数学游戏,童话、寓言与神话数学等不同题材 900 例、极具实用意义的内容和精彩的解题方法,展现数学的风采。使你在数学王国里遨游的同时,体验数学给人带来的快乐。

我们每个人都有智慧,我们都是智慧星!智慧星趣味数学丛书,不同的读者都可以从中得到不同的乐趣和益处,领略好玩的数学。可作为所有数学爱好者的精神食粮,它送你一脑聪明智慧。可作为教师教学资源,丰富多彩的题目是一座数学知识宝库,芝麻开门;可作为学生家长指导学生的锦囊妙计,告诉孩子数学并不难,条条大路通北京;可作为学生自主学习的辅导用书,有助于开阔视野,增长知识、机智灵活的解决问题,造就前十名的顶尖人才。

智慧星趣味数学丛书,按年级编写,共五册。小学一年级到六年级,每两个年级为一册,七年级到八年级各一册。随着年级的升高一本一本读下去,你的创新意识和实践能力就会越来越强,创新是科技进步的根本!

数学是一把金钥匙,它能让所有充满智慧的人们用这把金钥匙去打开人生旅途上每一扇通向成功的大门!

在本书的编写过程中锦州市锦州中学高级教师常志江老师、锦州市第二初级中学一级教师张旭东老师给予了多方面的帮助,并提出了宝贵意见,锦州市锦州中学谷润老师,李艳玉老师为本书绘制了插图。在此一并表示感谢!

由于作者水平有限,一定有许多不足之处,敬请广大读者提出宝贵的意见。书中部分内容取自互联网,未能一一标明原作者,请原作者谅解。

编者

2006 年 2 月





(一) 数学趣题 (38题)

01. 五猴分桃..... 1
02. 牛顿的算术问题..... 3
03. 驴子和骡子..... 4
04. 分家产..... 5
05. 小狗与老鼠..... 6
06. 稻农出题..... 6
07. 一个难解的解..... 7
08. 采蘑菇..... 8
09. 包工造屋..... 9
10. 三个大力士..... 9
11. 新婚夫妇买家具..... 10
12. 多少个点..... 10
13. 马塔尼茨基的算术题..... 11
14. 两个赌徒掷色子..... 12
15. 法国民间流传着的算题..... 12
16. 马克思做过的题..... 13
17. 失望的乞讨者..... 14
18. 圣诞节卖火鸡..... 14
19. 百蛋..... 15
20. 罗马分遗产的问题..... 15
21. 继承遗产..... 16
22. 买卖猪..... 17
23. 印度的猴子..... 18
24. 四个孩子的年龄..... 18
25. 阿周那的箭..... 19
26. 百鸡问题..... 19
27. 粮仓的秘密..... 20
28. 太阳神的群牛..... 21

29. 选驸马与逆向推理..... 22
30. 丈夫和妻子..... 23
31. 三童分糖..... 24
32. 百牛问题..... 24
33. 检票问题..... 26
34. 同年同月同日生..... 26
35. 五层书架..... 26
36. 蜜蜂与宙斯..... 27
37. 邮政编码..... 28
38. 警犬护队..... 29

(二) 趣味几何 (30题)

39. 引葭赴岸..... 30
40. 荷花问题..... 30
41. 井中立木..... 31
42. 方田约分..... 32
43. 直田长阔..... 33
44. 索长有几..... 34
45. 三斜求积..... 35
46. 传国玉玺..... 35
47. 池塘水渠..... 37
48. 大象身长..... 38
49. 有望海岛..... 39
50. 勾股容方..... 40
51. 计地容民..... 41
52. 甲乙相会..... 41
53. 索长几何..... 42
54. 倚木于垣..... 42
55. 金字塔高..... 43
56. 地积公式..... 43
57. 将军饮马..... 44
58. 最短路线..... 45
59. 两鸟叼鱼..... 46
60. 希腊十字..... 46
61. 勾股月牙..... 47

目录

- 62. 倒定影液..... 48
- 63. 圆环面积..... 48
- 64. 小圆大圆..... 49
- 65. 帕普斯线..... 49
- 66. 九树十行..... 50
- 67. 从角到角..... 51
- 68. 图形谜题..... 51

(三) 智力与推理问题 (30题)

- 69. 农夫过河..... 53
- 70. 夫妻过河..... 53
- 71. 三个侦察兵..... 54
- 72. 火中逃生记..... 55
- 73. 穿越封锁线..... 55
- 74. 帽子的颜色..... 56
- 75. 集会问题..... 56
- 76. 称量硬币..... 57
- 77. 称球问题..... 57
- 78. 灌水问题..... 60
- 79. 韩信分油..... 61
- 80. 分酒类问题..... 61
- 81. 海盗分金问题..... 62
- 82. 梅奇里亚克砝码问题..... 64
- 83. 货车转轨..... 66
- 84. 强盗的难题..... 67
- 85. 体操全能冠军是谁? 67
- 86. 一百米决赛的冠军是谁? 68
- 87. 鹿死谁手? 68
- 88. 巧计问题..... 70
- 89. 谁是国际间谍..... 70
- 90. 谁喝水? 谁养斑马? 71
- 91. 律师们的供词..... 72
- 92. 林肯破案..... 73
- 93. 巧断作案时间..... 74
- 94. 谁在说谎..... 74

95. 哪句是真话..... 76
 96. 岔路问路..... 77
 97. 真话假话..... 77
 98. 关于逻辑学家的经典问题..... 78

(四) 数学小知识 (30题)

99. 数学是什么..... 79
 100. 勾股定理..... 80
 101. 奇妙的圆形..... 80
 102. 决定 π 近似值的投针实验..... 81
 103. 最速降线问题..... 82
 104. 三十六军官问题..... 83
 105. 为什么时间和角度的单位用六十进制..... 83
 106. 古希腊的音乐厅的天花板为什么做成椭球面? 84
 107. 贾宪三角与帕斯卡三角形..... 85
 108. 几何的三大问题..... 87
 109. 分数与小数..... 88
 110. 为什么电子计算机要用二进制..... 89
 111. 自相似..... 90
 112. 金字塔和纸草书..... 91
 113. 数学归纳法..... 91
 114. 哥德巴赫猜想..... 94
 115. 孪生素数猜想..... 95
 116. 费尔马数..... 97
 117. 梅森尼数..... 98
 118. 四色猜想..... 98
 119. 角谷猜想..... 99
 120. 蜂窝猜想..... 101
 121. 费马最后定理..... 101
 122. 西尔维斯特问题..... 103
 123. 圆桌骑士问题..... 103
 124. 夫妻围坐问题..... 104
 125. 柯克曼女生问题..... 105
 126. 掷色子问题..... 106
 127. 生日相同的概率..... 107

128. 彩票中奖概率..... 107

(五) 趣味数学游戏 (22题)

129. 数学成语谜语..... 109

130. 数学灯谜..... 109

131. 数学笑话..... 110

132. 趣味数学与温馨四季..... 111

133. 被乘数首位变末位..... 112

134. 猜数游戏..... 112

135. 摆火柴游戏..... 114

136. 倒推转化巧拿硬币..... 116

137. 扑克牌中的数学游戏..... 117

138. 猜牌问题..... 118

139. 硬币戏法..... 119

140. 棋子游戏..... 119

141. 盖绳圈..... 123

142. 假结..... 124

143. 谋比乌斯带..... 124

144. 玻璃杯问题..... 125

145. 泡泡糖问题..... 126

146. 乒乓球赛问题..... 126

147. 错抱的婴儿..... 127

148. 塑料杯问题..... 129

149. 多少只动物..... 129

150. 追逐曲线..... 130

(一)数学趣题 (38 题)

01. 五猴分桃

著名美籍华人科学家李政道在一次回国讲学期间,曾给中国科技大学少年班的同学出了这样一道古时的趣题:

五只猴子采得一堆桃,它们约定次日早起来分.半夜里,一只猴子偷偷起来,把桃均分成五堆后,发现还多一个,它吃了这桃子,拿走了其中一堆.第二只猴子醒来,又把桃子均分成五堆后,还是多了一个,它也吃了这个桃子,拿走了其中一堆.第三只、第四只、第五只猴子都依次如此做了.问桃子数最少有多少个?

解:设原有桃子 x 个,第一只猴吃掉 1 个再拿走余下桃子的 $\frac{1}{5}$,还剩下

$$x - (x - 1) \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}(x - 1),$$

第二只猴吃掉 1 个再拿走余下桃子的 $\frac{1}{5}$,还剩下

$$\left[\frac{4}{5}(x - 1) - 1 \right] - \left[\frac{4}{5}(x - 1) - 1 \right] \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \left[\frac{4}{5}(x - 1) - 1 \right],$$

以此类推,第三只猴吃掉 1 个再拿走余下桃子的 $\frac{1}{5}$;还剩下

$$\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5}(x - 1) - 1 \right] - 1 \right],$$

第四只猴吃掉 1 个再拿走余下桃子的 $\frac{1}{5}$,还剩下

$$\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5}(x - 1) - 1 \right] - 1 \right] - 1 \right],$$

第四只猴吃掉 1 个再拿走余下桃子的 $\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5} \left[\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5}(x - 1) - 1 \right] - 1 \right] - 1 \right] - 1 \right] = y.$$

解这个多重括号的方程要特别小心.经过化简、整理,得

$$256x - 3125y = 2101. \quad \text{①}$$

这里只有一个方程,但有 x, y 两个变量,用什么方法来解这个方程呢?

回溯《五猴分桃》的源头,最巧妙精彩、最古老的方法当首推“辗转相除法”,这是约在距今二千二百年前古希腊学者欧几里得创立的.

对于五猴分桃所得的方程①,我们先考虑:

$$256x + 3125y = 1.$$

$3125 \div 256$ 商等于 12,余 53; $256 \div 53$ 商等于 4,余 44……故有:

$$3125 = 12 \times 256 + 53, 256 = 4 \times 53 + 44,$$

$$53 = 1 \times 44 + 9, 44 = 4 \times 9 + 8,$$

$$9 = 1 \times 8 + 1, \text{因而得:}$$

$$1 = 9 - 8 = 9 - (44 - 4 \times 9) = 5 \times 9 - 44$$

$$= 5 \times (53 - 44) - 44 = 5 \times 53 - 6 \times 44$$

$$= 5 \times 53 - 6 \times (256 - 4 \times 53)$$

$$= 29 \times 53 - 6 \times 256$$

$$= 29 \times (3125 - 12 \times 256) - 6 \times 256$$

$$= 256 \times (-354) + 3125 \times 29.$$

这样,方程 $256x + 3125y = 1$ 便有一组解:

$$x = -354, y = 29.$$

接着,用 $c = 2101$ 遍乘 $256x + 3125y = 1$ 各项便有:

$$256(-743754) - 3125(-60929) = 2101,$$

由此可知方程 $256x - 3125y = 2101$ 有一组解:

$$x = -743754, y = -60929.$$

因为方程 $ax + by = c$ 只要有一组整数解

$$x = x_0, y = y_0,$$

则一切整数解可表示成:

$$x = x_0 - bt, y = y_0 - at.$$

故得 x 的解为: $x = 3125t - 743754$.

因 $x > 0$, 故 $t > \frac{743754}{3125} > 238$,

故当 x 为最小正整数时, $t = 239$.

于是满足题意的解为:

$$x = 3125 \times 239 - 743754 = 3121.$$

这就是《五猴分桃》题中的总桃数.

我们也可以用解不定方程的常规方法来解.

把方程①改写为

$$x = \frac{3125y + 2102}{256} = 12y + 8 + \frac{53(y+1)}{256},$$

其中 $12y + 8$ 已为正整数, 仅要取适当的正整数 y , 使 $\frac{53(y+1)}{256}$ 为正整数

即可.

容易看出 53 与 256 无公约数, 因此 $y = 255$ 时满足要求. 此时求出 $x = 3121$.

当然我们可以看出问题有无穷多解, 上面求出的是满足条件的最小正整

数解.

科大少年班的一些同学是这样解的:

因为桃子总数及每次剩下的桃子数都是5的倍数多1(或者少4).又桃子数量在分的过程中被5除过5次,因此总数应与 5^n 有关(其中 $n \geq 5$).先检验 $5^n + 1$:

第一只猴吃了一个再拿走 $\frac{1}{5}$ 后剩下 $\frac{4}{5} \cdot 5^n = 4 \cdot 5^{n-1}$;

第二只猴吃了一个拿走 $\frac{1}{5}$ 后剩下 $\frac{4}{5}(4 \cdot 5^{n-1} - 1)$.易见这不是一个整数.因此 $5^n + 1$ 不可能..

再检验 $5^n - 4$, ($n \geq 5$):

第一次余下 $\frac{4}{5}(5^n - 4 - 1) = 4(5^{n-1} - 1)$;

第二次余下 $\frac{4}{5}[4(5^{n-1} - 1) - 1] = 4^2[5^{n-2} - 4]$;

至此已可看出,当 $n \geq 5$ 时,数字 $5^n - 4$ 都满足要求,其中最小的那个数是 $5^5 - 4 = 3121$ (个).

这种解法思维简明,可见少年班的同学智力的确不同凡响.

上述解法可更简缩为如下的解法:

假若我们借来4个桃子,这样桃子数可连续5次均分成5堆,所以桃子数最少应该是

$$5^5 - 4 = 3121(\text{个}).$$

02. 牛顿的算术问题

英国大数学家和大物理学家牛顿曾经写过一本算术书,其中有一道题目,通常被称为牛顿问题.题目是这样的:

牧场上有一片青草,每天都在均匀地生长.这片青草供给10头牛吃,可以吃20天;供给15头牛吃,可以吃10天;试问:如果供给25头牛吃,可以吃几天?

由于青草每天都在长,时间越长,长得越多,所以题目中所说的10头、15头及25头牛吃的青草的总量各不相同,因而牛的头数与能吃的天数不是简单的反比例关系,这是本题的麻烦之所在,也是趣味之所在.

我们还是先用算术方法解一下,然后再用代数方法解一下.

按照题目的意思,每头牛每天吃的草应该是同样多的.

10头牛20天所吃的草,应该等于1头牛200天所吃的草,也等于原有的青草与20天新长出来的青草的总和.

15头牛10天所吃的草,应该等于1头牛150天所吃的草,也等于原有的青草与10天新长出来的青草的总和.

从上面两个条件可以看出,10天新长出的青草够1头牛吃50天或者5头牛

吃 10 天,于是(由第二个条件)可知原有的青草够 10 头牛吃 10 天,够 20 头牛吃 5 天.

而 10 天新长出的青草够 5 头牛吃 10 天,意味着 1 天新长出的青草够 5 头牛吃 1 天,因而,假如有 25 头牛,则可以让其中 5 头牛专门去吃每天新长出来的草,每天新长出的草对于 5 头牛可以自给自足;于是,让另外 20 头牛去吃原有的草,原有的草够这 20 头牛吃几天,这片草就够 25 头牛吃几天.而前面已经知道了原有的草够 20 头牛吃 5 天,所以这片草可供 25 头牛吃 5 天.

现在我们考虑用代数方法解此题.

设每头牛每天吃的草为 a 斤、原有的草够 x 头牛吃一天、每天新长出的草够 y 头牛吃一天,并设这片草够 25 头牛吃 t 天,则依题意可得方程组

$$\begin{cases} x \cdot 1 \cdot a + y \cdot 20 \cdot a = 10 \cdot 20 \cdot a, \\ x \cdot 1 \cdot a + y \cdot 10 \cdot a = 15 \cdot 10 \cdot a, \\ x \cdot 1 \cdot a + y \cdot t \cdot a = 25 \cdot t \cdot a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 20y = 200, & \text{①} \\ x + 10y = 150, & \text{②} \\ x + ty = 25t. & \text{③} \end{cases}$$

① - ② 可得 $100y = 50, y = 5.$

把 $y = 5$ 代入(1)式可得 $x + 100 = 200$

$$x = 100;$$

把 $x = 100, y = 5$ 代入(3)式可得

$$100 + 5t = 25t,$$

解之可得 $t = 5$, 所以这片青草可供 25 头牛吃 5 天.

03. 驴子和骡子

欧几里得是古希腊著名数学家,是欧几里得几何学的创始人,现在中、小学里学的几何学,基本上还是欧几里得几何学体系.下面是一道欧几里得算题.

驴子和骡子一同走,它们负着不同袋数的货物,但每袋货物都是一样重的.驴子抱怨负担太重.“你抱怨干吗呢?”骡子说,“如果你给我一袋,那我所负担的就是你的两倍,如果我给你一袋,我们的负担恰恰相等.”驴子和骡子各负着几袋货物?

请你也来解解大数学家的这道题.

从条件骡给驴 1 袋,它们的负担相等可知,骡原负担的比驴多 2 袋;如果驴给骡 1 袋,骡就比驴多 4 袋,题中告诉我们,这时骡的负担是驴的负担的 2 倍.于是可知,驴负 4 袋,骡负 8 袋.可见骡原负 7 袋,驴原负 5 袋.

本题用代数方法解也较方便.

设驴原负 x 袋,骡原负 y 袋.根据题意可列出方程组:

$$\begin{cases} y+1=2(x-1), \\ y-1=x+1. \end{cases}$$

①

②

由②式得 $y = x + 2$, 把它代入①式, 得

$$x + 3 = 2x - 2.$$

答: 骡原负 7 袋, 驴原负 5 袋.

04. 分家产

老汉今年九十一, 有点家产想处理.
老大拿去一万整, 哭着闹着他依;
思来想去怎么办, 八分之一属于你; 老二听说有这事, 先取两万往下提;
八分之一归了我; 剩余兄弟再分去;
如此先拿往上增; 再取八分还有一;
小弟还小不懂事; 最后剩余全归已;
说来这事真稀罕; 公平合理分仔细;
老汉了却终生愿; 家产兄弟各有几?

释意: 老汉今年九十一, 有点家产想处理. 大儿子拿走 1 万, 又拿走剩下的 $\frac{1}{8}$ 万肯罢休; 二儿子听说有这事, 不由分说, 先从老大拿走的钱后剩下的钱中拿走 2 万, 再在余下的钱中, 又拿走剩下的 $\frac{1}{8}$; ...; 如此往下分, 最后剩余的钱归不懂事的小弟. 说也奇怪, 这样分的结果公平合理, 各兄弟分得的钱应该同样多. 老汉了却终生愿望. 问老汉有多少家产? 家中多少兄弟?

解: 设: 家产总共为 x 万元, 则根据已知, 大儿子拿走:

$$(x-1) \times \frac{1}{8} + 1 = \frac{x}{8} + \frac{7}{8} = (x+7) \times \frac{1}{8}, \quad ①$$

剩钱:

$$x - (x+7) \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8}x - \frac{7}{8} = (x-1) \times \frac{7}{8},$$

二儿子拿走:

$$\left[(x-1) \times \frac{7}{8} - 2 \right] \times \frac{1}{8} + 2 = (7x+105) \times \frac{1}{64},$$

根据各兄弟分得的钱应该同样多, 有:

$$(x+7) \times \frac{1}{8} = (7x+105) \times \frac{1}{64},$$

解得

$$x = 49 \text{ (万元)}.$$

将大儿子拿走: $x = 49$ 万元代入①式知各兄弟分得的钱是:

$$(49+7) \times \frac{1}{8} = 7(\text{万元}).$$

因此有兄弟:

$$49 \div 7 = 7(\text{人})$$

答:老汉有遗产 49 万元,共有兄弟 7 人.

05. 小狗与老鼠

一位来自广东的小商人买进一些胖墩墩的小狗,还买了成对的老鼠,老鼠的对数正好是小狗头数的一半.每只小狗进价为 2 只角子,每对老鼠也是这个价钱.

后来,小商人将这些动物以高出进价 10% 的价钱卖了出去,自己身边只留 7 只.这时,他发现所得的钱款与买进全部动物所花的钱正好相等.因此他的利润正好由那留下的 7 只动物的零售价所代表.

试问:这 7 只动物究竟是什么? 它们值多少钱?

尽管萨姆·劳埃德在他的《大全》中对此题不太重视,并在其答案中没有说明解题方法,但它仍然是最有趣的题目之一,因为它把代数解法同丢番图分析结合起来了.

下面便是一种解法.设 x 是原先买进的小狗数,也就是购入的老鼠数.我们用 y 表示留下来的 7 只动物中的小狗数,则留下来的老鼠数应为 $7-y$,卖掉的小狗数(每只卖价按增加 10% 计算,应是 2.2 只角子)等于 $x-y$,而卖掉的老鼠数(每对卖 2.2 只角子,或每只卖 1.1 只角子)是 $x-(7-y)$.所以:

$$\left(x + \frac{x}{2}\right) \times 2 = (x-y) \times 2.2 + [x-(7-y)] \times 1.1.$$

化简上述式子即可得下列关于两个未知数的丢番图方程,当然这些未知数都应是正整数: $3x = 11y + 77$.

此外,已知 y 不能大于 7.

把 7 个可能的 y 值一一代进去,我们发现只有当 $y=5$ 和 $y=2$ 时, x 才是正整数.如果不是事先已说明老鼠是成对买进的话,将会出现两个不同的解.若 $y=2$,则原先购入的老鼠数为 33 只,而 33 是奇数,不合题意,必须排除,从而得出: $y=5$. 现在真相已经大白,商人买进 44 只小狗和 22 对老鼠,总共付出 132 只角子.他卖掉了 39 只小狗与 21 对老鼠,收入 132 只角子,身边还剩下 5 只小狗,价值为 11 只角子(零售价),和 2 只老鼠,值 2.2 只角子(也是零售价).这 7 只动物一共值 13.2 只角子,正好等于他原来投资额的 10%.

06. 稻农出题

有 100 头水牛和 100 捆干草,站着的水牛每头吃了 5 捆干草,躺着的水牛吃了 3 捆干草.3 头老水牛共吃了 1 捆干草.那么,站着的水牛、躺着的水牛以及老

水牛各有多少头?

解:设站着的水牛、躺着的水牛、老水牛分别为 x, y, z 头.

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 5x + 3y + \frac{z}{3} = 100. \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

根据①,②,可得 $y = 25 - \frac{x}{4}$.

又因为 x, y 为非零和负整数,所以 x 取 4、8、12,求得 3 组解:

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 18, \\ z_1 = 78; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 11, \\ z_2 = 81; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 12, \\ y_3 = 4, \\ z_3 = 84. \end{cases}$$

此题为越南的数学题目,是不定方程问题.一般为多解.

07. 一个难解的解

英国剑桥大学数学教师、著名儿童文学作家刘易士·卡洛尔曾写过一本有趣的数学通俗读物《乱纷纷的结》,里面收集了许多题目,别开生面地称为“绳结”,其中有一个绳结的大意如下:

一位旅行者从下午三点步行到晚上八点.他走的先是平路,然后爬山,到了山顶之后就循原路下坡,再走平路,回到出发点.已知他在平路上每小时走 4 英里,爬山时每小时走 3 英里,下坡每小时走 6 英里,回到平地还是每小时走 4 英里.请问旅行者一共走多少路程?

解:本题要利用一个辅助未知数.设 x 为旅行者走过的全部路程, y 为他上坡(或下坡)走过的路程.整个行程可分为四段:走平路、上坡、下坡、再走平路.现在容易看出:他开始走平路所花的时间是

$$\frac{\frac{1}{2}x - y}{4},$$

上坡所花的时间是 $\frac{y}{3}$;下坡所花的时间是 $\frac{y}{6}$;再走平路所花的时间是

$$\frac{\frac{1}{2}x - y}{4}.$$

根据题意可列出方程:

$$\frac{\frac{1}{2}x - y}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{\frac{1}{2}x - y}{4} = 5.$$

在方程左边化简整理后,未知数巧妙的消去了,于是原方程变为

$$\frac{1}{4}x = 5,$$

即 $x = 20$ 英里.

所以旅行者一共走了 20 英里路,可是分段路程究竟是多少,那是无法确定的,所以这是一个极其奥妙的题目,体现了出题的哲学思想,即总体勾画,而细节难以琢磨.

08. 采蘑菇

清晨,甲、乙、丙、丁四个小朋友走进森林采蘑菇.九时的时候,他们准备往回走.走出森林之前,各人数了数篮子里的蘑菇,四个人加起来总共有 72 只.但甲采的蘑菇有一半能吃.在往回走的路上,甲把有毒的蘑菇全都丢了;乙的篮子底坏了,漏下两只,被丙拾起来放在篮子里.这时,他们三个人的蘑菇数正好相等.而丁呢,他在走出森林的路上又采了一些,使篮子里的蘑菇增加了一倍.到走出森林后,他们坐下来,又每人各自数了数篮子里的蘑菇.这次,大家的数目都相等.

你算算看,他们准备往回走出森林时,各人篮子里有多少蘑菇?走出森林后,又有多少蘑菇?

分析:假设准备出森林时,甲的篮子里有 a 只蘑菇;那么走出森林后,甲只有 $\frac{a}{2}$ 只.根据题意:

$$\therefore \frac{a}{2} = \text{乙} - 2 = \text{丙} + 2 = 2 \text{丁},$$

$$\therefore \text{乙} = \frac{a}{2} + 2,$$

$$\text{丙} = \frac{a}{2} - 2,$$

$$\text{丁} = \frac{a}{4}.$$

$$\text{甲} + \text{乙} + \text{丙} + \text{丁} = a + \frac{a}{2} + 2 + \frac{a}{2} - 2 + \frac{a}{4} = 72,$$

$$\frac{9}{4}a = 72,$$

解得 $a = 32$ (只),

$$\frac{a}{2} + 2 = 18 \text{(只)},$$

$$\frac{a}{2} - 2 = 14 \text{(只)},$$

$$\frac{a}{4} = 8 \text{(只)}.$$

答:他们准备走出森林时:甲有 32 只;乙有 18 只;丙有 14 只;丁有 8 只.走