普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

第二版

刘三阳 马建荣 杨国平 编著

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

第二版

刘三阳　马建荣　杨国平　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，根据近几年国内外线性代数课程改革的一些新动态，以及使用本教材第一版的同行和读者提出的宝贵意见，对部分内容作了充实和完善。第二版既保留了第一版的特色，又在教学实践的基础上对内容结构进行了合理的调整。全书共分8章，包括矩阵及其应用、行列式、矩阵的秩与线性方程组、向量空间、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换以及MATLAB解线性代数问题。本书从线性方程组出发，以矩阵为工具，比较自然地阐明了线性代数的基本概念、基本理论和方法。在内容的讲述上循序渐进、深入浅出、简明易懂、理实结合，便于理解和讲授。通过将线性代数的基本知识与计算机技术相结合，使学生能利用数学软件求解基本的线性代数问题。

本书可作为高等学校理工科和经济管理等各专业“线性代数”课程的教材，也可作为报考硕士研究生的参考书，还可供科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘三阳，马建荣，杨国平编著. —2版.
—北京：高等教育出版社，2009.7
ISBN 978-7-04-027258-1

Ⅰ.线… Ⅱ.①刘…②马…③杨… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第086368号

策划编辑 兰莹莹 **责任编辑** 李 茜 **封面设计** 张志奇 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 史新薇 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
印　　刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2005年8月第1版
开　　本	787×960 1/16		2009年7月第2版
印　　张	17.5	印　　次	2009年7月第1次印刷
字　　数	310 000	定　　价	19.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　27258-00

第二版前言

根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求编写的《线性代数》教材，经3年使用，效果良好。我们根据教学实践中积累的一些新经验和近几年国内外线性代数课程改革的一些新动态，以及使用本教材的同行和读者们提出的宝贵意见，对全书作了充实和完善。本次修订，在保持原书主体内容和基本风格的基础上作了以下修改：

一、增加了第8章——MATLAB解线性代数问题，引入了数学建模和数学实验的思想，简要介绍了线性代数计算方法和应用实例等内容。

二、增加了线性代数应用方面的实例，全书共增写了线性代数在通信、交通流量、投入产出、常微分方程、多元函数极值等方面的实例近20个，以便理论联系实际，开阔学生的视野和思路，培养学生的数学应用能力。

三、调整了前3章的顺序，使得全书叙述更为顺畅，结构更加合理。改写了某些定理的叙述和证明，并补证了第一版中未证的一些定理，以适应不同层次的教学要求。

在教育部高教司和高等教育出版社的支持下，本书列入普通高等教育"十一五"国家级教材规划。对于教育部高教司、高等教育出版社高等理工出版中心和西安电子科技大学教务处对本书的关心和支持，谨表衷心感谢。同时也对张海琴、任春丽、张鹏鸽等老师和兰莹莹编辑在本书修订过程中所做的工作深表谢意。

编　者

2009年1月

第一版前言

线性代数是理工科和经济管理等有关专业的一门重要基础课，主要研究有限维线性空间的结构和线性空间上的线性变换。它不仅是学习其他数学课程的基础，也是自然学科、工程技术和经济管理等各领域应用广泛的数学工具。

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求，结合作者长期从事线性代数和高等代数的教学经验和体会，并注意借鉴和吸收国内外优秀教材的优点，为适应各专业对线性代数的不同要求而编写的。它的主要内容包括行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、相似矩阵、二次型、线性空间和线性变换等。为了适应近年来线性代数教学内容增多、学时减少和要求提高的新形势，本书在以下几个方面做了一些探索。

1. 从最基本的线性方程组的求解出发，比较自然地引出了消元法、矩阵及其秩和初等变换等概念，初学者容易接受。充分发挥矩阵秩的作用，用以简便地处理诸多问题。把向量组的线性相关性和齐次线性方程组紧密结合，使得向量组的线性相关性的讨论相对容易，许多推导证明得以简化。

2. 以线性方程组为主线、以矩阵为工具，阐明线性代数的基本概念、基本理论和方法。注重应用矩阵工具处理问题，强化初等变换和分块矩阵的应用。它不仅是矩阵运算的重要方法和技巧，而且在理论分析中也有重要作用。

3. 线性代数具有概念多、结论多、内容抽象和逻辑性强等特点。本书注意理论联系实际，尽量从问题或实例出发引出概念和方法。力求深入浅出，循序渐进，难点分散。

4. 注重揭示数学思想和知识的来龙去脉，不仅阐明结果，还注意剖析过程，以便培养学生的数学素养。

5. 安排有较多的典型例题，注重借题释理，以例示法。同时配有精心挑选的适量习题并附有答案，题型多样，难易兼备。

在本教材的编写过程中，得到了西安电子科技大学数学系的领导及同事的支持与协助。高等教育出版社的大力支持，尤其是高等理科分社徐刚社长、杨波、李艳馥编辑给予的帮助，使本教材得以顺利出版。在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中有不妥或谬误之处在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

2004 年 12 月

目　　录

第 1 章　矩阵及其应用

矩阵是研究线性方程组和其他相关问题的有力工具,也是线性代数的主要研究对象之一,它的理论和方法在自然科学、工程技术、经济管理、社会科学等众多领域都具有极其广泛的应用.矩阵作为一些抽象数学结构的具体表现,在数学研究中占有极重要的地位.本章从实际问题出发,引出矩阵的概念,讨论矩阵的运算及其性质,进而讨论用途很广的矩阵的初等变换与初等矩阵.

1.1　矩阵的概念

1.1.1　矩阵的概念

首先看几个例子.

例 1　设有 A,B,C 三人及三项工作 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,若第 i 个人从事第 j 项工作可产生的价值如下表所示:

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A	25	15	22
B	31	20	19
C	35	24	17

这个排成 3 行 3 列的价值矩形表格$\begin{pmatrix} 25 & 15 & 22 \\ 31 & 20 & 19 \\ 35 & 24 & 17 \end{pmatrix}$,具体描述了这三个人从事各项工作所生产的价值,也揭示了价值随工人变化的情况.

例 2　设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

这个线性方程组未知量的系数按方程组中的顺序组成一个 3 行 4 列矩形表格,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

未知量的系数与常数项按方程组中的顺序也可组成一个 3 行 5 列矩形表格,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

这两个矩形表格决定着给定方程组是否有解,以及如果有解,解是什么等问题.

例 3 一个简单的通信网络如图 1.1 所示. x_1,x_2,x_3,x_4表示 4 个通信点,连接线表示点 x_i与 x_j相互有通信联系,用 $a_{ij}=1$ 表示;若无联系,用 $a_{ij}=0$ 表示. 又假设点自身不通信,即 $a_{ii}=0$,该网络联系信息可用如下数表表示

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

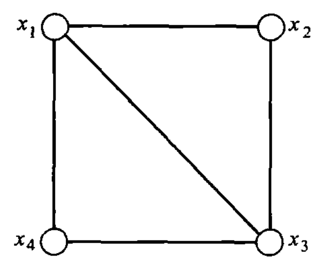

图 1.1

在日常生活和社会活动中,经常使用各种各样的矩形数表,如学生成绩登记表,公司的产值统计表,工厂的产量统计表等. 这样的矩形数表在数学上就称为矩阵.

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ **矩阵**或 m **行** n **列矩阵**,简称矩阵. 横排称为矩阵的行,纵排称为矩阵的列,$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为矩阵的第 i 行第 j 列**元**或(i,j)元. $m\times n$ 矩阵通常用大写字母如 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$ 或$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n},\cdots$ 表示,有时也记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或(a_{ij}).

元都是实数的矩阵称为实矩阵;元都是复数的矩阵称为复矩阵.

元全为 0 的矩阵称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{O}$.

只有一列的矩阵

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

称为**列矩阵**,也称为**列向量**.

只有一行的矩阵

$$
\boldsymbol{A}=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)
$$

称为**行矩阵**,也称为**行向量**.为了避免元间的混淆,行向量也记作

$$
\boldsymbol{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)
$$

行向量和列向量也可用小写字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\cdots$表示.

若 $m=n$,即矩阵的行数与列数相同时,称矩阵为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**.在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,从左上角到右下角的对角线称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线**,主对角线上的元 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线元**;从右上角到左下角的对角线称为 $\boldsymbol{A}$ 的**次对角线**.

当 $m=n=1$ 时,就得一阶矩阵,记为(a)或 a,今后将一阶矩阵和一个数不加区别.

1.1.2 几种特殊矩阵

称主对角线以下的元全为零的 n 阶方阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

为**上三角形矩阵**.

称主对角线以上的元全为零的 n 阶方阵

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

为**下三角形矩阵**.上三角形矩阵与下三角形矩阵统称为**三角形矩阵**.

如果 n 阶方阵的主对角线以外的元全为零,即

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

则称它为**对角矩阵**,记作 $\boldsymbol{A}$ 或 $\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 在对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,未写出的元表示零元,下同.

主对角线上全为 1 的 n 阶对角矩阵,即

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$

称为 n 阶**单位矩阵**,记作 $\boldsymbol{E}_n$,$\boldsymbol{I}_n$或 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{I}$.

如果两个矩阵的行数与列数均相等,则称它们为**同型矩阵**.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$与 $\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}$是同型矩阵且对应元相等,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$$

在实际问题中,常常会遇到一些变量要用另外一些变量线性表示. 设一组变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 用另一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示为

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}\tag{1.1}$$

称此关系式为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**线性变换**.

给定了线性变换(1.1),它的系数按原来的相对位置确定一个矩阵,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

此矩阵称为线性变换的**系数矩阵**;反之,如果给一 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,则可构造出线性变换(1.1),即线性变换也就确定. 在这个意义上,线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系,因此可用矩阵来研究线性变换;反之,也可利用线性变换来研究矩阵.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加法与数乘

定义 1.2 设有两个同型的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和

记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 1.3 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积,简称数乘,记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$,规定为

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的**线性运算**.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,称矩阵$(-a_{ij})$为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,记作$-\boldsymbol{A}$. 由负矩阵可以定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

即两个同型矩阵相减,归结为它们的对应元相减. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等时,就有 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;反过来,当 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 时,也有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

矩阵的线性运算满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,k 与 l 为数):

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

(5) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(6) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(8) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

例 1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B} &=2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 3\\ -5 & -1 & -12\end{pmatrix}$$

1.2.2 矩阵的乘法

矩阵乘法是源于研究线性方程组以及线性变换的乘法的需要而建立起来的.

已知从变量 y_1,y_2 到变量 x_1,x_2,x_3 的线性变换、从变量 z_1,z_2 到变量 y_1,y_2 的线性变换分别为:

$$\begin{cases}x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2\\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2\\ x_3=a_{31}y_1+a_{32}y_2\end{cases}\tag{1.2}$$

$$\begin{cases}y_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2\\ y_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2\end{cases}\tag{1.3}$$

将线性变换(1.3)代入(1.2)整理,得从变量 z_1,z_2 到变量 x_1,x_2,x_3 的线性变换:

$$\begin{cases}x_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})z_2\\ x_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})z_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})z_2\\ x_3=(a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21})z_1+(a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22})z_2\end{cases}\tag{1.4}$$

线性变换(1.2),(1.3)及(1.4)的矩阵分别为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}\end{pmatrix}$$

容易看到矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的元之间的关系:矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列对应元等于

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}\quad (i=1,2,3;j=1,2)$$

即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元乘积的和.

一般地,我们引入以下定义.

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵,规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

由矩阵乘积的定义可见，不是任何两个矩阵都可以相乘. 位于左边矩阵的列数与位于右边矩阵的行数相等的两个矩阵才能相乘；其乘积是一个与左边矩阵有相同行数，与右边矩阵有相同列数的矩阵；乘积矩阵第 i 行第 j 列的元等于左边矩阵第 i 行的各元与右边矩阵第 j 列的对应元乘积之和. 所谓对应元，即第 i 行的列号与第 j 列的行号相同的元.

例 2 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&0&4\\1&-1&2\end{pmatrix} \quad 与 \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\\0&3\end{pmatrix}$$

的乘积.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数均为 3，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，其乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是 3×2矩阵，由定义 1.4，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&0&4\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&5\\0&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3\times2+1\times1+(-1)\times0 & 3\times3+1\times5+(-1)\times3\\2\times2+0\times1+4\times0 & 2\times3+0\times5+4\times3\\1\times2+(-1)\times1+2\times0 & 1\times3+(-1)\times5+2\times3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}7&11\\4&18\\1&4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 3 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 由乘法定义可知

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\2&-2\end{pmatrix}$$

例 4 设

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

求 AB 与 BA.

解

$$AB=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

$$BA=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{pmatrix}$$

由以上三个例子可以看出,矩阵乘法需注意以下几点:

(1)矩阵乘法不满足交换律,即在一般情况下,$AB\neq BA$. 这因为,第一,AB 有意义,BA 不一定有意义,如例 2;第二,AB 与 BA 都有意义,但其结果不一定有相同的行数与列数,如例 4;第三,即使 AB 与 BA 有相同的行数与列数,但 AB 与 BA 也不一定相等,如例 3. 所以,在矩阵乘法运算中,不可随意交换相乘的两个矩阵的次序.

矩阵乘法不满足交换律,并不是说对所有的矩阵 A,B 都有 $AB\neq BA$. 若 A, B 为 n 阶矩阵,且 $AB=BA$,则称 A 与 B 乘法可交换. 例如 n 阶单位矩阵 E 与任何 n 阶矩阵乘法可交换.

(2) 两个非零矩阵之积可能是零矩阵. 如例 3,即在一般情况下,由 $AB=O$ 不能得到 $A=O$ 或 $B=O$ 的结论.

(3) 若 $A\neq O$,$AB=AC$ 不能推出 $B=C$.

矩阵乘法满足下列运算规律:

(1) $(AB)C=A(BC)$;

(2) $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$;

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$,其中 λ 是数;

(4) $E_m A_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$.

证明 在这里仅对 $A(B+C)=AB+AC$ 给出证明.

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$, $C=(c_{ij})_{s\times n}$

$$A(B+C)=M=(m_{ij})_{m\times n},\quad AB+AC=N=(n_{ij})_{m\times n}$$