

素数

逐次排除论

—用逐次排除法证明
歌德巴赫猜想等一系列素数猜想

陈礼 著

2

中国农业科学技术出版社

0156. 2/11

2009

素数

逐次排除论

—用逐次排除法证明
歌德巴赫猜想等一系列素数猜想

陈礼 著

中国农业科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

素数逐次排除论/陈礼著. —北京: 中国农业科学技术出版社, 2009

ISBN 978-7-80233-526-4

I. 素… II. 陈… III. 素数-研究 IV. 0156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 035962 号

责任编辑 杜 洪

责任校对 贾晓红

出版者 中国农业科学技术出版社

北京市中关村南大街 12 号 邮编: 100081

电 话 (010) 82109704 (发行部) (010) 82106629 (编辑室)
(010) 82109703 (读者服务部)

传 真 (010) 82106624

网 址 <http://www.castp.cn>

经销者 新华书店北京发行所

印刷者 北京富泰印刷有限责任公司

开 本 850mm×1 168mm 1/32

印 张 12

字 数 350 千字

版 次 2009 年 4 月第 1 版 2009 年 4 月第 1 次印刷

定 价 28.00 元

—— 版权所有·翻印必究 ——

序

60多年前，母亲光天化日之下为儿时的我在木盆洗澡的情景仿佛还像在昨天一样历历在目，可是我今天已经是白发老翁了，真是时光飞逝，岁月无情，人生苦短，不觉老之已至矣！

我青少年时在学校学习时的成绩应该算是比较好的，当时也对未来充满了梦想，总觉得自己今后可能会做出什么惊天动地的大事业来，以为那样才不枉此一生。可是，后来的现实却告诉我，我只不过是普天下众多的普通老百姓中的一个，我不但不可能做出什么惊天动地的大事业来，我上世纪60年代上学时还饿过肚子，工作后也是一个极普通极平常的技术干部，90年代还因为工厂“停建重组”而被光荣下岗。

但是，我现在对人生的意义又有了新的看法。我觉得，在我们现在的优越社会制度下，一个人不一定非要做出什么惊天动地的大事业来，只要他从事的是对人民有益的工作，不管他是工人、农民、保姆、清洁工，只要他能兢兢业业地做好自己的本职工作，他的人生就同样过得非常有价值、有意义，他就应该受到全社会的尊重，他就是和那些伟人一样伟大的人。当年我们的伟大领袖毛主席振臂高呼“人民万岁”，就是他老人家对人民群众的极大尊

重,所以,雷锋、王进喜、石传祥这些人民群众中的优秀代表人物也将和伟大领袖毛主席一样永远受到人们的尊敬。

我在退休后废寝忘食地从零开始研究以歌德巴赫猜想为代表的一系列素数猜想,其根本初衷就是为了使自己的人生过得更加有意义,就是为了能够为促进科学的发展尽自己的最后努力。开始时一点头绪都没有,一片迷茫,也不相信自己也有可能破解这些世界数学难题。经过几年苦苦思索后,在2004年7月突然觉得豁然开朗,研究渐渐进入正轨,路子也越来越宽广。自以为取得一些成绩以后,我的劲头越来越足,几乎已经入迷,常为了搞清楚一个数据而忙到深夜也不觉得累,并且觉得自己的生活越来越有意义。我的研究,可能是成功的,当然更可能是失败的,但是这些对我都不重要,因为我在这个研究的过程中已经享受了快乐,我的研究已经体现了我的人生价值。

我的研究如果是失败的,那么我为后人充当反面教员,让他们再不走这条错误的道路,我以为我的付出仍然是值得的。

我的研究如果最后被认为是成功的,那当然是天大的好事,在目前这场全世界爆发的金融危机中,可能会大大增长中国人民的信心。我是一个中国人,又是一个中国共产党党员,我的成功将向全世界表明:我们中国人和中国共产党人,是世界上最聪明的人,我们有能力战胜任何困难,我们将能够创造任何人间奇迹。

当然,素数的奥秘有很多很多,我所研究的仅是其中极小的一部分。如果说素数的范围有一个地球那么大,我现在研究的范围充其量只有一个电子的大小。如果说研究素数犹如万里长征,我的成就最多也不过是前进了一小步而已,没有什么值得骄傲的。

本书能够顺利地出版发行,首先要感谢出版单位能够打破常规,让我这个业余数学爱好者的作品公诸于世。其次,刘启兰女士

在本书的出版过程中给予我不少指导和帮助,在此表示谢意。最后,我还要感谢我的上级领导、曾经在多处国家机关担任要职的扬志贤先生和我的大学同窗好友董延女士,他们不顾年高,认真给我的文章进行了评审,并且提出了宝贵意见。

陈礼

2009年3月15日于北京

目 录

序	(1)
第一节 概述	(1)
第二节 素数的定义与逐次排除法简介	(14)
第三节 $[1, 2N]$ 区间内素数数量的计算及其误差	(24)
第四节 逐次排除法和古典“埃氏筛法”	(33)
第五节 素数定理和 C_m 负偏差下限的进一步讨论	(54)
第六节 自然数 N 两端对称素数对数量 D_s 的计算 ——歌德巴赫猜想(A)的证明	(60)
第七节 $[1, 2N]$ 区间内孪生素数对数量 L_s 的计算, 孪生素 数有无穷多组	(75)
第八节 孪生素数是二生素数的特例, 满足一定条件的 n 生 生素数组有无穷多组。对于任何自然数 $x > 1, y > 1$, 总有 $\pi(x) + \pi(y) > \pi(x + y)$	(80)
第九节 指数型素数链	(148)
第十节 哥德巴赫猜想(A)与二生素数组的关系, 任何偶数 都等于两个素数之差的证明, 对哥德巴赫猜想(B) 的证明	(186)

第十一节	n^2 和 $(n+1)^2$ 之间总有素数的证明, $[1, 2N]$ 区间 内素数的最大间隙 $X_m < \sqrt{2N}$	(214)
第十二节	关于大素数问题	(221)
附 录	(224)
后 记	(371)

第一节

概述

公元 1742 年哥德巴赫猜想问世之际,正是伟大的科学家牛顿先生诞辰一百周年之时,工业革命的巨匠、工业蒸汽机的发明人瓦特先生当年年仅六岁,当时中国最后一位有作为的封建皇帝乾隆刚过而立之年。这个聪明绝顶的年轻皇帝当时一定是踌躇满志,春风得意。事实上他的确是一位了不起的皇帝,他几乎十全十美,他使中国最后一个封建王朝大清帝国达到鼎盛时期。但是他犯了一个致命的错误,他没有与时俱进,他可能做梦都没有想到,他其实是被瓦特这个年轻人打败的,以瓦特蒸汽机为代表的工业革命使当时的世界迅速发生了巨变。从那时至今,整整 265 年过去了,世界已发生翻天覆地的变化,1949 年 10 月 1 日,一个强大的、人民当家作主的中华人民共和国巍然屹立在世界东方。从 20 世纪 50 年代起,以航天、核能、信息技术、生命科学为代表的现代科学技术迅速发展、突飞猛进,近年来更达到日新月异的发展速度。

然而,哥德巴赫猜想却仍然那么古老,猜想仍然只是猜想。这个看似简单的数学难题难住了世界各国一代又一代的数学家,他们为之着迷,为之奋斗,有的人甚至为此耗尽了毕生精力。但是,



任何努力在它的面前都只能无功而还,哥德巴赫猜想至今无人破解,成为当今仍然没有破解的世界数学难题之一。我国著名数学家陈景润先生的“ $1+2$ ”的陈氏定理取得了举世瞩目的辉煌成就,是在此问题研究上迄今为止的最高水平,然而“ $1+2$ ”和“ $1+1$ ”之间仍有一道不可逾越的鸿沟,使问题又回到了起点。斗转星移,时光转眼又过千年大限,人类已进入了 21 世纪,难道哥德巴赫猜想还要这样一直猜下去,直至千年、万年,甚至成为永远不能破解的宇宙之谜?

笔者系四川资中人,高级工程师。1962 年考入北京航空学院飞机发动机设计专业,毕业后在国防军工系统从事技术工作三十余年。笔者退休后旅居北京期间,得暇对歌德巴赫猜想进行深入研究,坚信哥德巴赫猜想必有破解之时,其痴迷程度常达夜不能寐的地步。功夫不负有心人,在历尽千辛万苦后,独辟蹊径,采用逐次排除法对自然数中素数的分布规律进行探讨、研究,终于在 2004 年 7 月取得突破性进展,一举得出了证明歌德巴赫猜想的计算公式,大量实例证明了公式的正确性和可操作性。笔者那时只研究了 $2N \leq 10000$ 的情况,当 $2N = 10000$ 时公式的误差几乎为零,精确度如此之高,真有一个都不能少的感觉,当时笔者欣喜若狂。后来陆续看见一些资料,知道笔者得出的计算公式在 $2N$ 不断变化时还可能会出现负的偏差,笔者才认识到计算公式的误差问题不容忽视,因此,笔者从 2005 年开始对计算公式的误差进行研究。笔者从 2006 年 5 月起还以大量的精力投入对 n 生素数组的深入研究,并且取得了新的重大突破。

因为笔者得出的若干计算公式并不复杂,笔者在欣喜之余又为历代数学家们为什么没有得出类似的结果而百思不得其解,同时笔者也迫切希望了解歌德巴赫猜想研究的历史和现状。所以,

在母校北京航空航天大学老师李心灿教授的推荐下,笔者于2005年10月9日到北京海淀图书城“九章数学书店”购买了“王元论歌德巴赫猜想”和“潘承洞文集”两书。王元先生和潘承洞先生都是我国在证明歌德巴赫猜想上已经取得重大成就的著名数学家,王元先生的书以综合论述为主,“潘承洞文集”则主要是潘承洞先生的数学论文。10月13日又到王府井新华书店购买了潘承洞、潘承彪先生合著的“初等数论”和司钊、司琳先生合著的“歌德巴赫猜想与孪生素数猜想”这两本书。拜读他们的文章后,我对国内外数学家们研究歌德巴赫猜想等素数猜想的历史情况有了大致的了解。首先,我对国内外历代数学前辈为研究歌德巴赫猜想付出的艰苦努力和取得的卓越成就表示由衷的赞赏和钦佩,正是他们试图从各个角度证明歌德巴赫猜想,从而有力地推动了数论科学的发展。但是,应该看到,在研究歌德巴赫猜想的成果中,大量的成果是对弱项猜想的证明,而直接对哥德巴赫猜想本身的研究成果甚少。同时,还应该看到,在过去的研究成果中,以在别人研究成果的基础上进行继承、发展或完善的较多,自己有独立见解的创新型的成果甚少。

长期以来,数学家们研究哥德巴赫猜想采取了许多种方法,单是筛法,除了古典的“埃氏”筛法外,还有若干种改进型,如布朗筛法、贝尔赛格筛法、林尼克大筛法、陈景润先生的新的加权筛法等,另外还有圆法、史尼尔曼密率法等方法。

数学家们为了证明哥德巴赫猜想这个世界数学难题,真是绞尽脑汁,千方百计。他们认为直接证明哥德巴赫猜想可能太困难了,于是采取迂回包围的战术,其中一个最主要的方法是探讨所谓殆素数的分布规律,陈景润先生的著名“ $1+2$ ”的陈氏定理可认为是这种方法的顶峰,但是连陈景润先生自己都无法超越自己,说明



殆素数这条路也是走不通的。

我们知道,1922年哈代先生和李特伍德先生根据圆法的理论提出了一个关于哥德巴赫猜想的著名猜想式: $r_2(N) = 2 \prod_{p>2, p|N} \prod_{p>2, p|N}$

$\frac{P-1}{P-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{N}{(\ln N)^2} (1 + o(1))$, 当 $2|N$ 。(“王元论歌德巴赫猜想”P138)

顺便指出,潘承洞先生在1982年时也曾经对这个猜想式进行了证明(见潘承洞文集P310)。由于笔者的水平有限,无法从理论上对这个猜想式进行分析和评论。但是,我们知道,实践是检验真理的唯一标准,而上述猜想式与实测数据完全不符,所以笔者认为上述猜想式很可能是不正确的。笔者认为,与两位先生关于孪生素数的比较正确的猜想式相比,上述猜想式的系数2似乎应该为1才可能是正确的,这个错误可能是“圆法”这种方法本身的缺陷带来的。

笔者认为,数学家们之所以长期奋斗而没有解决哥德巴赫猜想这个世界数学难题,并不是他们不聪明,更不是他们不努力,而是可能如王元先生所说的数学家们的思路出了问题。王元先生1987年写道:“看来,圆法与筛法均已山穷水尽,用它们几乎是不可能证明猜想(A)的。数学家殷切期望新思想与新方法的产生。”(“王元论歌德巴赫猜想”P55)王元先生还说:“因此我们深信对于进一步研究猜想(A),必须有一个全新的思想。”(“王元论歌德巴赫猜想”P35)

数学家们的思路究竟出了什么问题,不是笔者这样的寻常之辈能够妄加评论的,只是笔者有以下两点看法供数学家们参考。第一,笔者认为不应该把1排除在素数之外,1本来就是素数,而

且还是一个非常重要的素数,是唯一一个永远都存在的剩余数。同时,否定了1的素数身份,实际上是否定了哥德巴赫猜想(B),因为,如果1不是素数,奇数9也不可能等于三个奇素数的和。第二,笔者认为,我们对哥德巴赫猜想的研究不应该仅局限于只做纯理论的数学公式的推导,虽然这种纯理论研究也是十分重要的,我们在研究中还更应该坚持理论与实际相结合这条原则。我们的某些分析或结论,虽然看起来似乎完全正确,但是如果它们与客观实际已经完全不相符合,则只能说明这个结论可能是错误的,我们就应该断然将其否定或对其进行修正。

笔者研究歌德巴赫猜想时完全是白手起家,笔者手里当时也没有任何一个素数表,于是笔者的第一个任务就是制定一万以内的素数表,其方法就是人人都知道的排除法,去掉含100以下所有素数因子的复合数,剩下的自然数就是素数。一开始是用打叉代表一个数,复合数则划圈,后来觉得这样太费事而采用表格,用交点代表一个数。笔者知道在经过素数2、3排除后,自然数中存在1系列($6n+1$)和5系列($6n+5$),今后所有的素数都只能存在于其中,于是对复合数的排除就分别在上面两个系列中进行,这样笔者完成了一万以内的素数表。笔者从来都认为歌德巴赫猜想其实就是任何自然数 N 两端必定存在着对称的素数对的问题,所以笔者一直试图从这个角度来证明歌德巴赫猜想。笔者认真分析了任何连续6个自然数两端可能存在的对称素数对的分布规律,发现3的倍数点比其他四个点的机会多一倍,所以笔者又试图先从其他四个点率先进行突破。当自然数 N 比较小时,这个问题还是比较简单的。如自然数 $N=53$ 时, N 两端共有16个5系列的点,存在8个奇数对,经过素数5排除时,最多排除掉4个点,7排除时最多排除掉3个点,则这7个点最多排除掉7个非素数对,这样就



至少保留了一个素数对,同理, $N = 51$ 时则至少保留了两个素数对,实践也证明上述结论完全正确。但是,当参加排除的素数很多时,问题就非常复杂了,问题在于出现了重复排除,而重复排除的部分很不好计算,加加减减很难搞清楚。但如果不把其中重复排除的部分区别开,就无法通过计算能够确保一个很大的自然数 N 两端必定存在着至少一个对称的素数对,显然,想要通过这个途径去证明歌德巴赫猜想是不可能的。笔者在经过长期苦苦思索后,突然发现上面所说存在 8 个奇数对的数量就是先经过素数 2、3 的排除后使用乘法而不是使用加减法计算出来的,所以笔者立刻转而研究采用乘法来进行计算,并且在实践中创造并不断完善了逐次排除法的理论。

我们知道,素数在自然数中的分布是不均匀的,同时,素数还有一个无穷无尽的庞大系列,所以,我们直接研究素数的分布规律将是十分困难的。笔者在自创的逐次排除法中建立了剩余数系列的概念,笔者认为,逐次排除法中每轮排除产生的剩余数系列在其一个周期内的分布是相对均匀的,这是一个极其重要的判断,根据这个判断,我们很容易计算出素数的数量,歌德巴赫猜想等素数猜想这些复杂问题放在剩余数系列中来考虑,证明也变得十分简单。现在看来,在每轮排除产生的剩余数系列中充满了无限玄机,它不仅包含了单个素数的秘密,也包含了歌德巴赫猜想和所有 n 生素数数组的秘密。笔者认为,素数的无限性从根本上说取决于剩余数系列的无限性,符合一定条件的 n 生素数数组的无限性从根本上说也取决于该 n 生素数数组剩余数系列的无限性。

我们知道,剩余数系列 $\pi(T_m, S_m)$ 在素数 S_m 的一个排除周期 T_m (即区间 $[1, T_m]$) 内一定会有一个确定的数值,笔者认为,剩余数系列 $\pi(T_m, S_m)$ 在区间 $[1, T_m]$ 内的分布是相对均匀的。因为

剩余数系列 $\pi(T_m, S_m)$ 中小于 S_{m+1}^2 的这一部分全部都是素数, 根据剩余数系列 $\pi(T_m, S_m)$ 在素数 S_m 的一个排除周期内的平均密度 α_m , 笔者得出计算区间 $[1, 2N]$ ($S_m^2 < 2N < S_{m+1}^2$) 内素数数量的理论正确值 Z_s 的公式如下:

$$Z_s = 2N\alpha_m + m = 2N \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{S_i}\right) + m \approx \frac{2N}{2.051g(2N)}, \text{ 并且, } Z_s$$

的值必定大于 $\sqrt{2N}$ 。

我们知道, 不管区间 $[1, 2N]$ 和与此相关的 S_m, T_m 有多大, 剩余数系列 $\pi(T_m, S_m)$ 及其平均密度 α_m 永远都是存在的, 所以, 笔者认为上面这个公式应该是计算素数数量的最基本的理论正确值计算公式, 从上面的对数表达式可看出, 这个理论正确值 Z_s 比素数定理的值要大一些。

笔者认为, 当 $2N \geq 10000$ 时, 任何 $[1, 2N]$ 区间内的素数实际数量 $\pi(2N)$ 应该在理论计算值 Z_s 的 $\pm 12.5\%$ 的范围内, 即 $\pi(2N)$ 的范围为 $\frac{3.5(2N)}{8.21g(2N)} < \pi(2N) < \frac{4.5(2N)}{8.21g(2N)}$ 。

必须指出, 上面这个理论正确值的公式是笔者自己独立建立的, 笔者当时并不知道欧拉函数和埃氏筛法, 拜读王元先生的文章后, 才知道上面这个公式也可以从埃氏筛法推导出来。显然, 数学家们对笔者上面这个公式其实是早就知道的, 既然如此, 为什么数学家们不采用这个公式呢? 原来, 数学家们认为上面公式的误差项可能太大了, 根据数学家们的分析, 上面公式的误差将可能有 2^m 那么大 (m 为所有参加 $[1, 2N]$ 区间排除的素数的总数量), 当 $2N$ 是一个较大的数时, 2^m 将是一个十分巨大的数值, 因为误差可能太大, 所以数学家们认为此路不通。

那么, 笔者上面这个公式的实际误差究竟有多大呢? 当 $2N =$



10^9 时, $m = 3401$, 按数学家们的分析, 公式的误差项 $2^m = 2^{3401}$, 这个误差是一个超过 1000 位的天文数字, 这样的误差当然是太大了。实际情况究竟怎么样呢? 当 $2N = 10^9$ 时, 按笔者上面公式 $Z_s = 2N\alpha_m + m$ 计算, 实际值 $\pi(2N)$ 比理论计算值的确减少 3325876 个, 负偏差的数值的确是非常巨大的, 但其相对误差还不到 6.14%, 这个相对误差值还小于素数 5 排除后 $2N = 28$ 时剩余数数量的相对误差值 6.25%。在笔者已知的范围内, 公式的准确度实际上都已经超过 90%, 犹如学生考试成绩已超过九十分, 这样的不算大的一个相对误差水平应该说明该计算公式可以算是基本准确吧。

众所周知, 实践是检验真理的唯一标准。既然数学家们对误差的分析与客观实践完全不相符合, 那我们有理由认为, 数学家们对笔者上面这个公式误差项的分析很可能是不正确的。显然, 对笔者上面这个公式误差项的认识决不是个别数学家的看法, 而是当前整个数论界的共识。笔者认为, 数学家们很可能已经陷入了误差项的这个黑洞而不能自拔, 这就极大地妨碍了他们对这个问题进行进一步的深入研究, 这也许是歌德巴赫猜想研究的最大误区和最大悲剧。

笔者最近听电视里杨振宁先生讲他年轻时获得诺贝尔奖的经过, 深有感触。笔者认为, 杨振宁先生年轻时就获得诺贝尔奖决不是偶然的, 一方面当然因为他有超人的智慧, 另一方面也是由于他有创新精神, 敢于向传统观念挑战。当时, 学术界的权威论断认为四大力系都遵守宇称守恒定律, 当时有许多这方面的文章和大量的实验数据, 这似乎是铁板钉钉的事实了。但是, 杨振宁先生、李政道先生这两位当时名不见经传的年轻人在仔细分析了实验数据后, 却敏锐地认识到其中弱作用力的实验数据恰恰证明了弱作用

力并不遵守宇称守恒定律。此论一出,舆论一片哗然,几乎没有一个人相信他们的新观点,还受到当时的学术权威的嘲讽。但是,以后的大量实验最终证明了真理在杨振宁、李政道两位年轻人这一边,两位先生因此获得了诺贝尔奖。这个事情给我们的启示是,我们做什么事都应该非常认真,对任何细节都要仔细推敲,另外,我们也一定不要受传统观念的束缚,一定要有敢于创新的精神。笔者特别佩服著名的农业科学家袁隆平先生,他不受水稻等单子叶植物不能异花授粉的传统观念的束缚,并且通过自己长期的艰苦努力,终于成功地创造了杂交水稻这一个举世闻名的优良新品种。袁隆平先生开始时也是采用传统的选用良种来培育新品种的方法,他在发现一株特大稻穗时大喜过望,以为这次可以一举成功获得新品种,将其种下再收获时却大失所望,期望中的特大稻穗踪影全无。就在垂头丧气之时,袁隆平先生却从特大稻穗的一喜一悲这个细节突发灵感,敏锐地认识到这个失败恰好证明了水稻可以异花授粉进行杂交这一个事实。我们知道,袁隆平先生被誉为“当代神农”、“杂交水稻之父”,袁先生的成就不仅解决了中国人民的吃饭问题,而且还解决了世界上很多国家的吃饭问题,例如越南就由缺粮国变为稻米出口国。实际上,袁先生的成就将永远造福于中国人民和全世界人民,笔者认为,说袁隆平先生是中国历史上最伟大的科学家也毫不为过,我们每个科技工作者都应该学习他,特别要学习他的创新精神。目前在我们国家正在建设科学发展、全面和谐的社会主义国家,需要涌现出大量的各方面的创新型人才,特别需要发扬袁隆平先生这种创新精神。

我的体会是:一、独立思考,走自己的路。二、实事求是、科学分析,对前辈们的结论不盲从、不迷信、不人云亦云,不肯定一切,也不否定一切。三、坚持下去,努力奋斗,必有所得。