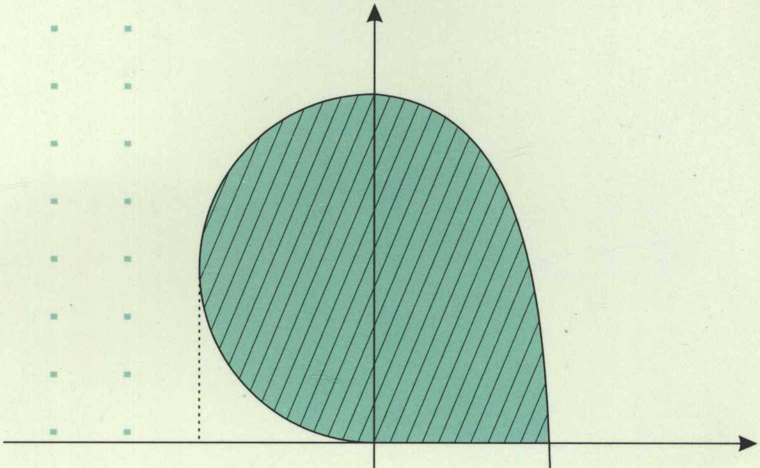
经济应用数学基础《微积分》
（人大版）配套参考书

微积分
同步辅导

□ 孙玉光 李宏 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

经济应用数学基础《微积分》(人大版)配套参考书

微积分同步辅导

孙玉光　李　宏　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容摘要

本书与人大版《微积分》(赵树嫄主编)相配套,共九章,包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、常微分方程与差分方程简介等内容。每章包括四大部分,即内容摘要、典型例题与同步练习、综合练习及参考答案。书后还附有微积分中常用的数学公式,方便学生查阅使用;最后还配有六套模拟题,供学生检验学习情况。

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导/孙玉光,李宏主编.一杭州:浙江大学出版社,2009.9

ISBN 978-7-308-06946-5

Ⅰ.微… Ⅱ.①孙…②李… Ⅲ.微积分一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 148676 号

微积分同步辅导

孙玉光 李 宏 主编

责任编辑 张 鸽(zgzj33@gmail.com)
封面设计 吴慧莉
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 星云光电图文制作工作室
印 刷 德清县第二印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 17
字 数 296 千字
版 印 次 2009 年 9 月第 1 版 2009 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-06946-5
定 价 29.00 元

前言

微积分是高等院校经济管理类各专业的一门重要基础课。然而，近年来随着教学改革的实施，微积分授课时间也有所减少，这对该课程中基本概念的理解、知识点的融会贯通、知识面的拓展必有一定的影响。为了帮助广大学生学习和掌握《微积分》课程的经典理论、思想精华与解题方法，提高他们分析问题与解决问题的能力，同时，又为了满足后续课程及研究生入学考试对微积分的更高更深的要求，我们编写了这本《微积分同步辅导》，它是学生进行各个章节阶段性复习的指导书，也是教师讲授习题时所需的参考书。

本书与人大版《微积分》(赵树嫄主编)相配套，共九章，包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、常微分方程与差分方程简介等内容。

每章包括四大部分，即内容摘要、典型例题与同步练习、综合练习及参考答案。

内容摘要：与主教材相呼应，总结了重要定义、定理及公式，便于学生深入理解主要概念与主要理论，并强化记忆。

典型例题与同步练习：我们认真挑选了各类典型例题，并给出详细解答，大多数例题只给出一种解题方法，其他方法留给同学们自己思考；对各种题型，详细介绍了解题思路与解题技巧，或归纳了这类题目的解法，便于学生掌握主要方法，以期达到事半功倍的学习效果；对各种题型配以同类型的练习题，并给出解答或提示，使学生能够灵活运用各种方法。

综合练习：以基本概念、基本性质、基本计算方法为主，适当配备了简单的应用题与个别的证明题，用以检查学生的微积分学习是否达到教学大纲的要求；练习中也有一些较难的题目，使得有较高要求的学生能在使用本书时获得较大的帮助。

参考答案：在每章后附有本章所有同步练习及综合练习的参考答案或提示。

书后还附有一些在微积分学习中常用的数学公式，即包括了中学时已经掌握的一些公式，也包括了《微积分》教材中新学到的一些公式，以便学生能随时查阅使用。

本书最后还附有六套模拟题，供学生检验《微积分》学习掌握的情况。

本书编写目的在于帮助学生更好地掌握《微积分》的基本理论和解决基本计算的问题，克服《微积分》解题过程中遇到的困难，以提高分析和解决问题的能力，为今后的专业学习打下坚实的基础。

在此书的编写过程中得到了很多同行的帮助，在此表示由衷的感谢。

惟因时间紧促、经验有限，本书难免有缺点和错误，欢迎老师和同学们批评指正，以希能日臻完善。

编者

2009 年 8 月

目　录

第一章　函　数

一、内容摘要

(一) 集合,实数,绝对值,区间,邻域

1. 集合

(1) 集合:具有某种属性的事物的全体,或者说是一些确定对象的汇总,称为集合,一般用大写字母表示,如 $A,B,C,X,Y,\cdots$,等.

(2) 元素:构成集合的事物或对象,称为集合的元素,一般用小写字母表示,如 $a,b,c,x,y,\cdots$,等.如果 a 是集合 A 的元素,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,记作 $a \overline{\in} A$ 或 $a \notin A$.

(3) 有限集合:由有限个元素构成的集合称为有限集合,记为 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

(4) 无限集合:由无限多个元素构成的集合称为无限集合,记为

$A = \{a \mid p(a)\}$,其中 $p(a)$ 是元素 a 需满足的条件或法则.

(5) 常用的数集:一般地,我们分别用 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 表示全体自然数、全体整数、全体有理数、全体实数构成的集合.

(6) 集合的子集:如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,即如果 $a \in A$,则必有 $a \in B$,就称 A 是 B 的子集,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

(7) 集合的相等:如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称集合 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

(8) 空集:不包含任何元素的集合,称为空集,记作 $\varnothing$.而 $\{0\}$,$\{\varnothing\}$ 都不是空集,前者含有元素"0",后者以空集"$\varnothing$"为其元素.

2. 实数

每一个实数必是数轴上某一个点的坐标;反之,数轴上每一个点的坐标必是一个实数,因此说全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系.高等数学中研究的数都是实数,为方便起见,用相同的字母 a 表示数轴上的点 a 和实数 a 在数轴上的对应点.实数分类如下:

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数（无限不循环小数）}\end{cases}.
$$

3. 绝对值

(1) 一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为：$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

(2) $|x|$ 的几何意义：$|x|$ 表示数轴上的点 x（不论 x 在原点左边还是右边）与原点之间的距离.

(3) 绝对值的性质：

① $|x|=\sqrt{x^2}$；

② $|x|\geqslant 0$；

③ $|-x|=|x|$；

④ $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

⑤ $|x|\leqslant a \quad (a>0)$，等价于 $-a\leqslant x\leqslant a$，$\{x \mid |x|\leqslant a, a>0\}$ 几何上表示所有与原点的距离小于 a 的点 x 的集合；

⑥ $|x|>b \quad (b>0)$，等价于 $x<-b$ 或 $x>b$，$\{x \mid |x|>b, b>0\}$ 几何上表示所有与原点的距离大于 b 的点 x 的集合；

⑦ $|x+y|\leqslant |x|+|y|$；

⑧ $|x-y|\geqslant |x|-|y|$；

⑨ $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$；

⑩ $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$，$y\neq 0$.

4. 区间

区间是一种应用较多的数集. 设 a,b 为实数，且 $a<b$，则区间可作以下定义.

(1) 开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

(2) 闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3) 半闭区间：$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

以上三类区间均称为有限区间，a,b 称为区间端点，$b-a$ 为区间长度.

(4) 无限区间：$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$ 等.

注：本书中不再说明所记区间是否包含端点以及是有限区间还是无限区间，均简单地称为区间，并记为 I.

5. 邻域

(1) 定义：一个实数集合 $\{x \mid |x-x_0|<\delta, \delta>0\}$，在数轴上是一个以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$，其中 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

(2) 分类：

① 有心邻域为 $U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta, \delta>0\}$；

② 去心邻域为 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, \delta>0\}$

$$=(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta).$$

(二) 函数关系

1. 函数的定义

若 D 是一个非空的实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x), x\in D$. 其中，x 称为自变量，y 称为因变量，集合 D 称为函数的定义域，记为 D 或 $D(f)$. 常用 f,g,φ 等字母表示变量 x 与 y 之间的对应规则.

2. 函数值和值域

若 $x_0\in D(f)$，则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义. 此时，x_0 所对应的 y 值，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值，记为 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合，称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 Z 或 $Z(f)$，即 $Z(f)=\{y \mid y=f(x), x\in D(f)\}$.

3. 构成函数的两个要素

函数的定义域与对应规则称为函数的两个要素. 当且仅当两个函数的定义域和对应规则相同时，两个函数才相等.

当函数以公式法表示时，定义域是指使表达式成立的自变量的变化范围，这种定义域称为函数的自然定义域；而在实际问题中，函数有实际的意义时，则按其实际意义确定其定义域.

4. 显函数与隐函数

函数的因变量用自变量的表达式表示出来的函数，即 $y=f(x)$，称为显函数；若函数的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示的，则称该函数为由方程

$F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

5. 分段函数

若函数在其定义域内，当自变量取不同的值时，其对应规则不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的表达式表示，则称该函数为分段函数.

常见的几个分段函数如下.

(1) 绝对值函数：

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases},$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z=[0,+\infty)$，图形如图 1-1 所示.

(2) 符号函数(克朗涅克函数)：

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-2 所示.

(3) 取整函数：$y=[x]$，表示不超过 x 的最大整数，如 $[-3.6]=-4$.

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z(f)=\mathbf{Z}$.

此函数的图形在 x 为整数值处发生跳跃，跃度为 1，故又称其为阶梯函数，图形如图 1-3 所示.

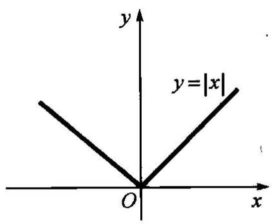


图 1-1

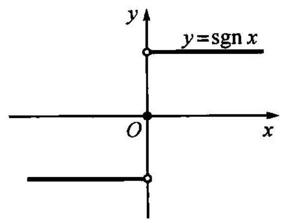


图 1-2

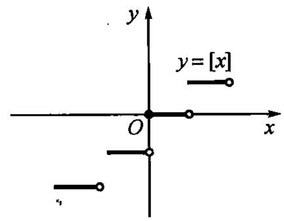


图 1-3

(三) 函数的性质

1. 函数的奇偶性

若 $f(-x)=f(x), x\in[-l,l]\quad(l>0)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；

若 $f(-x)=-f(x), x\in[-l,l]\quad(l>0)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

奇偶函数的性质：

(1) 两个偶函数的和(差)是偶函数，两个奇函数的和(差)是奇函数；

(2) 两个偶函数或两个奇函数的积(商)(分母不为 0)是偶函数；

(3) 一个奇函数与一个偶函数的积(商)(分母不为 0) 是奇函数;

(4) 任何一个函数都可以写成一个奇函数与一个偶函数的和,即

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

2. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在正的常数 T,使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立,则称此函数为周期函数. 满足这个等式的最小正数 T,称为此函数的周期.

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加或单调递增;当 $x_1<x_2$ 时,若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少或单调递减.

单调增加函数的图形是沿 x 轴 正向逐渐上升的,单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x\in(a,b)$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界,也称 $f(x)$ 为 (a,b) 内的有界函数. 如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界.

(四) 反函数与复合函数

1. 反函数

设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一个函数,值域为 $Z(f)$,若对于每一个 $y\in Z(f)$ 都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应,其对应规则记为 f^{-1},则这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数,或称它与原函数互为反函数.

注:① 习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此往往将 $x=f^{-1}(y)$ 写为 $y=f^{-1}(x)$ 来表示 $y=f(x)$ 的反函数;

② 一个函数如果有反函数,它必定与原函数呈一一对应的函数关系;

③ 在同一个坐标平面内,互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$,若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$,当 $Z(\varphi)\cap D(f)\neq\varnothing$ 时,称 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数,x 称为自变量,y 称为因变量,u 称为中间变量.

注：两个函数复合的条件 $Z(\varphi) \cap D(f) \neq \varnothing$ 很重要，如不满足，则不能复合.

(五) 初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常量函数：$y = c$ （C 为常数）

$D = (-\infty, +\infty)$，图形为平行于 x 轴、截距为 c 的直线.

(2) 幂函数：$y = x^{\alpha}$ （α 为任何实数）.

它的定义域随 α 而异，但不论 α 为何值，在 $(0, +\infty)$ 内总有定义，且图形恒经过 $(1,1)$ 点. 如 $y = x^2, D = (-\infty, +\infty)$；$y = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, D = (0, +\infty)$.

(3) 指数函数：$y = a^x$ （$a > 0, a \neq 1$）.

$D = (-\infty, +\infty), Z = (0, +\infty)$，图形恒经过 $(0,1)$ 点. 当 $a > 1$ 时，函数单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，函数单调减少.

(4) 对数函数：$y = \log_a x$，$(a > 0, a \neq 1)$.

$D = (0, +\infty)$，图形恒经过 $(1,0)$ 点. 当 $a > 1$ 时，函数单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，函数单调减少.

(5) 三角函数：

①$y = \sin x, y = \cos x, D = (-\infty, +\infty), Z = [-1, 1]$，都是有界函数；

②$y = \tan x, D = \left\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq \dfrac{2n+1}{2}\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}$；

③$y = \cot x, D = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$；

④$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$；

⑤$y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数：

①$y = \arcsin x, D = [-1, 1], Z = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$；

②$y = \arccos x, D = [-1, 1], Z = [0, \pi]$；

③$y = \arctan x, D = (-\infty, +\infty), Z = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$；

④$y = \operatorname{arccot} x, D = (-\infty, +\infty), Z = (0, \pi)$.

注：反三角函数均为有界函数.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的并可用一个式子表示

的一切函数，统称为初等函数.

初等函数的基本特征为：在函数有定义的区间内，函数的图形是不间断的.

注：分段函数，如符号函数、取整函数等均不是初等函数.

二、典型例题与同步练习

(一) 求函数的定义域

例 1-1 求下列函数的定义域.

(1) $y=f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

(2) $y=f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$

(3) $y=f(x)=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$

【解题思路】 在求函数的定义域时，记住以下几点：

① 分式的分母不能为 0；

② 根式中，偶次方根号下不能是负数；

③ 对数的真数必须大于 0；

④ 三角函数和反三角函数中，要符合它们定义域的特殊要求，例如 $y=\arcsin x$ 中，要满足 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

求较复杂函数的定义域，就是求解各个简单函数的定义域所应满足的不等式组的解集.

解：(1) 要使函数有意义，显然 x 要满足：

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}，即\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases}，$$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $D(f)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 要使 $f(x)$ 有意义，显然 x 要满足：

$$\begin{cases}3-x>0\\ \sin x\neq 0\\ 5+4x-x^2\geqslant 0\end{cases}，即\begin{cases}x<3\\ x\neq k\pi\\ -1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}\quad (k\text{ 为整数})，$$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $D(f)=\{x\mid -1\leqslant x<3, x\neq 0\}=[-1,0)\cup(0,3)$.

(3) 要使 $f(x)$ 有意义，显然 x 要满足：

$$\begin{cases}-1 \leqslant \dfrac{2x-1}{7} \leqslant 1 \\ x^2-x-6>0\end{cases}, \text{即} \begin{cases}-3 \leqslant x \leqslant 4 \\ x>3 \text{ 或 } x<-2\end{cases},$$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $D(f)=[-3,-2) \cup (3,4]$.

例 1-2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -2, & 1<x \leqslant 2\end{cases}$,求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

【解题思路】 $y=f(x)$ 的定义域是指 x 的变化范围,$y=f(\varphi(x))$ 的定义域也是指 x 的变化范围. 已知 $y=f(x)$ 的定义域,求 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域的一般方法是令 $t=\varphi(x)$,解出 x 的变化范围.

解:令 $t=x+3$,由题意知定义域为$[0,2]$,

即 $0 \leqslant x+3 \leqslant 2$,解得 $-3 \leqslant x \leqslant -1$.

$\therefore$ 函数 $f(x+3)$ 的定义域为$[-3,-1]$.

【习题 1-1】

1. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\ln(1-\ln x)$　　(2)$y=\arcsin \dfrac{2x+1}{2}$

(3)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

2. 若函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,求下列函数的定义域.

(1)$f(\ln x)$　(2)$f(x^2)$　(3)$f(\sqrt{1-x^2})$

(二) 判断给定的两个函数是否相同

例 1-3 判断下面函数是否相同,并说明理由.

(1)$y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

(2)$y=2x+1$ 与 $x=2y+1$

(3)$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

【解题思路】 构成函数的两个要素是定义域和对应规则. 如果两个函数的定义域和对应规则都相同,则称这两个函数是相同的函数,因此,这类题目只需分别求出两个函数的定义域与表达式即可得解.

解:(1) 虽然这两个函数的表现形式不同,但它们的定义域$(-\infty,+\infty)$与对应规则均相同,所以这两个函数相同.

(2) 虽然它们的自变量与因变量所用的字母不同,但它们的定义域$(-\infty,+\infty)$和对应规则均相同,所以这两个函数相同.

(3) 两个函数的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,但是它们的对应规则不同,其实 $y=\sqrt{x^2}$

相当于 $y=|x|$. 所以这两个函数不是相同函数.

【习题 1-2】

判断下列各组函数是否为相同函数.

(1) $f(x)=x$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$

(2) $f(x)=\sin(\arcsin x)$ 与 $g(x)=\arcsin(\sin x)$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

(三) 判断函数的几种特性

例 1-4 证明:(1) 函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的;

(2) 函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的.

【解题思路】 用定义证明函数的有界性的关键是证明存在一个 M, 使得 $|f(x)|\leqslant M$ 恒成立.

证: (1) 因为 $(1-|x|)^2\geqslant 0$, 所以 $|1+x^2|\geqslant 2|x|$, 故对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$, 均有 $|f(x)|=\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|=\dfrac{2|x|}{2|1+x^2|}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

故题设函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

(2) 对于任意大的 $M>0$, 总可在 $(0,1)$ 内找到相应的 x, 使 $|f(x)|>M$ 成立. 例如取 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{M+1}}$, 则 $|f(x_0)|=\dfrac{1}{x_0^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{M+1}}\right)^2}=M+1>M$, 所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的.

例 1-5 证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增加的函数.

【解题思路】 用定义证明函数单调时, 常用 $f(x_1)-f(x_2)$ 与 0 比较, 或者 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 与 1 比较.

证: 在 $(-1,+\infty)$ 内任取两点 x_1,x_2, 且 $x_1<x_2$, 则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

因为 x_1,x_2 是 $(-1,+\infty)$ 内任意两点, 所以 $1+x_1>0, 1+x_2>0$.

又因为 $x_1-x_2<0$, 故 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}<0$, 即

$$f(x_1) < f(x_2).$$

所以 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 在$(-1, +\infty)$内是单调增加的函数.

例 1-6 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y = f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$

(2) $y = f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

【解题思路】 函数奇偶性的判定一般从 $f(-x)$ 出发.但首先需确定函数定义域是关于原点对称的.

解:(1) $D = (-\infty, +\infty)$

由函数关系式得:$f(-x) = \dfrac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \dfrac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -f(x)$,

所以函数 $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 为奇函数.

(2) $D = (-\infty, +\infty)$

由函数关系式得:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \ln \frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

所以函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

例 1-7 设函数 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数,试求函数 $f(ax+b)$ 的周期,其中 a,b 为常数,且 $a > 0$.

【解题思路】 判断一个函数是否为周期函数以及求函数周期的步骤如下:

① 列出方程 $f(x+T) - f(x) = 0$;

② 由上述方程解出 T;

③ 若 $T > 0$,且为满足方程的最小值时,则 $f(x)$ 是周期函数,且函数的周期等于 T;若 $T \leqslant 0$,或 T 与 x 有关,则 $f(x)$ 不是周期函数.

解:设 $f[a(x+t)+b] - f(ax+b) = 0$,

即 $f[a(x+t)+b] = f(ax+b) = f(ax+b+T)$,

解得 $t = \dfrac{T}{a}$,

代入验证得 $f\left[a\left(x+\dfrac{T}{a}\right)+b\right] = f(ax+T+b) = f[(ax+b)+T] = f(ax+b)$,