普通高等学校规划教材

复变函数与积分变换

FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

宋苏罗　主编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等学校规划教材

复变函数与积分变换

宋苏罗　主编

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是根据普通高等院校《复变函数与积分变换》课程教学基本要求的精神，并结合编者多年的教学实践经验编写而成的．本书内容包括：复变函数、导数、积分、级数、留数、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换及数学实验等．各章除配有一定数量的习题之外，还配有自测题，以便于学生及时检验、巩固所学的基本概念、基本理论．

全书内容完整，通俗易懂，对于不同层次的学生都具有可读性，可作为本科院校相关专业的教材，也可供科学技术人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/宋苏罗主编．—北京：国防工业出版社，2009.9

普通高等学校规划教材

ISBN 978-7-118-06474-2

Ⅰ．复… Ⅱ．宋… Ⅲ．①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ．O174.5 O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 124774 号

※

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048）

北京市李史山胶印厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 13¾ 字数 339 千字

2009 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 27.80 元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

《复变函数与积分变换》是高等学校理工科多个专业学生的必修课程，该科程在自然科学和工程技术的许多领域有着广泛的应用. 为了满足学生多方面需要，本教材编写过程中，力求内容、体系符合我国高等教育21世纪教学内容和课程体系改革的总体目标，体现“厚基础、宽口径、高素质”人才的培养要求. 同时，也注意适应高校扩招后的教学实际水平，在教材体系、内容和例题的选择上，编者参考了很多相关的书籍和资料，吸取了很多同仁的宝贵经验，并融进了作者多年《复变函数与积分变换》课程的教学经验.

随着计算机技术的高速发展，数学的地位也发生着巨大的变化，现代数学已不再仅仅是其他科学的基础，而是直接发挥第一生产力的作用. 为此，本教材增加了数学实验内容，实验软件采用的是 Matlab. 数学实验的增加，无疑为培养学生的创新能力、实际操作能力等综合能力搭建了一个很好的平台，使培养的学生不但有较系统的理论知识，而且有较高的实际操作水平，更符合现代高等教育的培养目标.

本书内容包括：复变函数、导数、积分、级数、留数、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换及数学实验等内容，各章除配有一定数量的习题之外，还配有自测题，以便于学生及时检验、巩固所学的基本概念、基本理论.

本书由宋苏罗任主编，并对全书进行统稿. 具体编写情况是：第 1 章、第 2 章及数学实验由宋苏罗编写；第 3 章、第 4 章由连冬艳编写；第 5 章、第 6 章由郭学军编写；第 7 章由王国欣编写；第 8 章由宋亮编写.

本教材的编写与出版得到了南阳理工学院教务处领导及应用数学系领导的大力支持和帮助，特别是许洪范、朱玉清教授对本书的编写工作提出了很多宝贵意见，在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平所限，书中疏漏和错误在所难免，欢迎读者朋友及时质疑.

编　者
2009 年 7 月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

在高等数学中,所有变量的取值范围限定为实数．在本书中,变量的取值范围被放宽到复数．函数 $f(z)$ 的自变量取复数的时候,函数值也可以取复数．作为预备内容,本章首先讨论复数的表示方法和复数的运算,以及复平面上的点集和区域等概念．稍后,依次将高等数学中的极限、连续的概念“移植”到复变函数中,以此为进一步研究解析函数的理论和方法奠定基础．

1.1　复　　数

1.1.1　复数的概念

在实数范围内,类似于 $x^2+1=0$ 的方程是没有根的．规定了虚数单位 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 之后,使得以往认为无解的方程变为可解,数的范围得到了扩充．关于复数的基本概念,一般做如下约定:

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的表达式称为复数,其中 x,y 为两个任意实数,分别称为复数 z 的实部和虚部,记为 $x=\mathrm{Re}z,y=\mathrm{Im}z$. i 称为虚数单位,满足 $\mathrm{i}^2=-1$.

当 $x=0,y\neq0$ 时,$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数;当 $y=0$ 时,$z=x$ 被视作实数 x. 当且仅当 $x=y=0$ 时,记 $z=0$.

如果某两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的实部和虚部都对应相等,即同时有 $x_1=x_2$ 和 $y_1=y_2$,则说这两个复数相等,记作 $z_1=z_2$;实部相等且虚部互为相反数的复数称为共轭复数．就是说,假若 $x_1=x_2,y_1=-y_2$,则称 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是一对共轭复数,记为 $\bar{z}_2=z_1$ 或 $\bar{z}_1=z_2$. 特别地,实数的共轭复数是它本身.

顺便指出,两个复数一般情况下是不能比较大小的.

1.1.2　复数的四则运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数，则 z_1 和 z_2 的和、差与乘积定义如下:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2),$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).$$

从复数定义知道,实数是复数的特例．根据和、差和乘积的定义,如果 $z=x+\mathrm{i}y$,则显然有

$$z-z=0,z+\bar{z}=2x,z\bar{z}=x^2+y^2.$$

当 $z_2\neq0$ 时,满足 $z_2z=z_1$ 的复数 z 称为 z_1 与 z_2 的商,记为

$$z=\frac{z_1}{z_2}.$$

由复数乘积运算的定义容易得到

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

复数的除法运算一般都要通过上述将分子、分母同时乘以分母的共轭复数之后进行整理. 具体地,复数 $5+6\mathrm{i}$ 与 $4-3\mathrm{i}$ 之商应该等于

$$\frac{5+6\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=\frac{(5+6\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}{4^2+3^2}=\frac{2}{5^2}+\frac{39}{5^2}\mathrm{i}.$$

由定义可以证明,复数满足以下运算规律:

(1) $z+0=z,0\cdot z=0$;

(2) $z\cdot 1=z,z\cdot\frac{1}{z}=1$;

(3) $\frac{z_1+z_2}{z_3}=\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}$;

(4) $z_1+z_2=z_2+z_1,z_1z_2=z_2z_1$;

(5) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

(6) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$;

(7) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;

(8) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$;

(9) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(10) $\bar{\bar{z}}=z$.

此外,若 $z_1\cdot z_2=0$,则 z_1 与 z_2 至少有一个为零,反之亦然. 实数的乘法公式也可以推广到复数. 例如

$$(z_1\pm z_2)^2=z_1^2\pm 2z_1z_2+z_2^2,\ z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2)$$

等.

例 1.1 证明: $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

证 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则

$$\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{(x+\mathrm{i}y)+(x-\mathrm{i}y)}{2}=x=\mathrm{Re}(z);$$

$$\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}=\frac{(x+\mathrm{i}y)-(x-\mathrm{i}y)}{2\mathrm{i}}=y=\mathrm{Im}(z).$$

1.1.3 复数的几种常见表示法

在中学数学中,引进了数轴之后,每个实数都对应着数轴上一个确定的点. 为了对复数作

出几何解释,人们常用以下几种方法直观地表示复数.

1. 点表示法

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x,y) 所唯一确定,在建立平面直角坐标系 Oxy 之后,所有的复数都可以用它的实部 x 和虚部 y 构成一组直角坐标 (x,y),由此便对应着坐标平面上一个确定的点,显然这是一一对应的关系. 可见,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用平面上坐标为 (x,y) 的点来表示,这是复数的一个常用表示法,称之为点表示法. 用来表示复数的坐标平面称为复平面(或 z 平面).

在复平面上,x 轴上的点 $(x,0)$ 与实数 $z=x$ 对应,因此 x 轴称为实轴;而 y 轴上的点 $(0,y)$ 与纯虚数 $z=\mathrm{i}y$ 对应,因此 y 轴称为虚轴. 在以后的叙述过程中,"复数 $z=x+\mathrm{i}y$"与"点 $x+\mathrm{i}y$"被认为具有相同的含义.

2. 向量表示法

在复平面上,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还与从坐标原点指向点 $P(x,y)$ 的平面向量一一对应,因此,复数 z 也能用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示(图 1.1). 这种表示法称为复数 z 的向量表示法. 向量的长度称为复数 z 的模或绝对值,记作 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$.

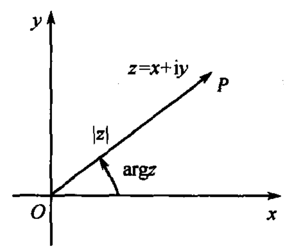

图 1.1

在 $z\neq0$ 的情况下,以正实轴为始边,以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角 θ(弧度)称为复数 z 的辐角,记作 $\mathrm{Arg}z=\theta$.

显然 $\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值,其中每两个值相差 2π 的整数倍. 但 $\mathrm{Arg}z$ 只有一个值 θ_0 满足条件 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$,它叫做 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,记作 $\arg z$. 显然 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$($k$ 为任意整数).

当 $z=0$ 时,规定其辐角为任意值.

在上述定义下,一个非零复数的辐角主值是唯一的,并且它与反正切主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 有如下关系:

$$
\arg z=\begin{cases}
\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0\\
\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0\\
-\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0\\
\arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant0\\
\arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0
\end{cases}.
$$

根据复数的四则运算法则可知,两个复数的加、减运算与相应向量的加、减运算一致(图 1.2).

注意到 $|z|$ 表示向量 $\overrightarrow{oz}$ 的长度,$|z_1-z_2|$ 表示 z_1 点与 z_2 点之间的距离. 这样,由图 1.2 立即得到

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{1-1}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{1-2}$$

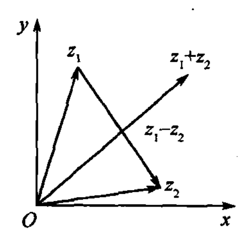

图 1.2

式(1 - 1)和式(1 - 2)称为复数的三角不等式.

同样能够得出关于复数模的一些结论：

(1) $|z| = |\bar{z}|, z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

(2) $|z| \leqslant |x| + |y|, |x| \leqslant |z|, |y| \leqslant |z|$.

3. 三角表示法

利用直角坐标与极坐标的关系式

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (r = |z|, \theta = \mathrm{Arg} z),$$

还可以把 $z = x + \mathrm{i}y$ 表示成下面的形式

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

这个式子称为 z 的三角表示式.

应用复数的三角表示式,可以得到,若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) \neq 0, z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)], \tag{1-3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{1-4}$$

从而有下面的定理.

定理 1.1 对于任意两个非零复数,其乘积的模等于它们模的乘积,乘积的辐角等于它们辐角的和. 即当 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ 时,有

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2.$$

对于任意两个非零复数,其商的模等于它们模的商;商的辐角等于被除数与除数的辐角差. 即当 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ 时,有

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2.$$

上面关于辐角的等式应该理解为集合的相等. 也就是说,对于等式左端的任一值,等式右端必有一值和它相等,反之亦然.

例如,设 $z_1 = -1, z_2 = \mathrm{i}$,则

$$\mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2 = \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 2k'\pi, \ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2 = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2k'\pi, \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

这里 k', k 分别为 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 可见,集合

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2, \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2.$$

例 1.2 求 $\mathrm{i}, -2, 1-\sqrt{3}\mathrm{i}, -2(1-\sqrt{3}\mathrm{i})$ 及 $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}$ 的三角表示式.

解 因为 $|\mathrm{i}|=1, \mathrm{Arg}\,\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，所以

$$\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2};$$

因为 $|-2|=2, \mathrm{Arg}(-2)=\pi+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，所以

$$-2=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi);$$

因为 $|1-\sqrt{3}\mathrm{i}|=2, \mathrm{Arg}(1-\sqrt{3}\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，所以

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right];$$

利用已求得的 -2 和 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的模和辐角及式(1-3)，得

$$-2(1-\sqrt{3}\mathrm{i})=4\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right);$$

同样，利用已求得的 i 和 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的模和辐角及式(1-4)，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}&=\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]+\mathrm{i}\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right).\end{aligned}$$

4. 指数表示法

由复数的三角表示式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，再利用欧拉(Euler)公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

这种表示形式称为 z 的指数表示式.

如果设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}(z_1\neq0, z_2\neq0)$，则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{1}{\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2}=\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2=\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2},$$

所以

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

这刚好与定理 1.1 的结论一致.

例 1.3 将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

(1) $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$；　(2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解 (1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$, z 在第三象限,因此

$$\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi,$$

则

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]=4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}.$$

(2) $r=|z|=1$,又

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3}{10}\pi,$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3}{10}\pi,$$

因此

$$z=\cos\frac{3}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{10}\pi=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}.$$

根据复数三角表示式与指数表示式的关系

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}=r[\cos(\theta+2k\pi)+\mathrm{i}\sin(\theta+2k\pi)],$$

得

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

从几何上看,当 θ 增加或减少 2π 时,z 点沿圆周移动一圈回到出发点,因此 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 与 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 表示的是同一个复数.

5. 复数的球面表示

如图 1.3 所示,设线段 ON 为某球体的直径,球面与复平面相切于坐标原点 O. 则 ON 垂直于复平面. 这里,设 N 点为球面的北极,O 为球面的南极.

显然,对于复平面上的任一点 z,连线 zN 与球面有唯一的交点 P;反之,对于球面上除 N 点外的任一点 P,NP 的延长线也必然与复平面有唯一的交点 z. 这样,复平面上的点与球面上除 N 外的点建立了一一对应的关系. 可以用球面上的点 P 表示复数 z,称为复数的球面表示.

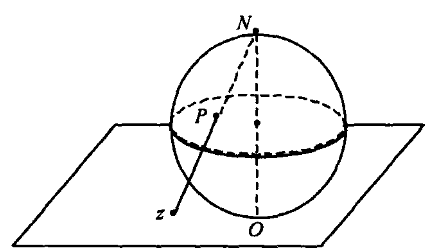

图 1.3

用以上方法,复平面上的任何一个有限点都不可能与球面上的北极点 N 对应. 但显然,随着球面上 P 点逐渐接近于 N 点,复平面上相应的点 z 逐渐远离原点 O. 作为极限情形,规定与北极点 N 对应的是复平面上的无穷远点,它所代表的复数被称为无穷大,记为 ∞. 复平面加上无穷远点后称为扩充复平面. 不包括无穷远点的复平面称为有限复平面.

对于 ∞ 这一特殊的复数而言,实部、虚部、辐角都是没有意义的,唯一能刻画它的量是其模为正无穷大,即 $|\infty|=+\infty$. 另外,在扩充复平面上,∞ 可像普通的有限复数一样参加运算. 关于 ∞ 的四则运算规定如下:

$$\infty\cdot\infty=\infty,z\pm\infty=\infty\pm z=\infty,\frac{z}{\infty}=0,\frac{\infty}{z}=\infty.$$

其中 z 为任意有限复数．若 $z\neq0$,还有

$$z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty,\frac{z}{0}=\infty.$$

如无特殊声明,本书所考虑的“复平面”一般是指有限复平面.

1.2 复数的乘幂与开方

1.2.1 复数的乘幂

对任意正整数 $n,z^n=z\cdot z\cdots z$ 表示 n 个相同复数 z 的乘积,称为 z 的 n 次幂．当 $z\neq0$ 时,规定 $z^{-n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n,n\in\mathbf{N}$;并规定 $z^0=1$. 这样,当 $z\neq0$ 时,对任何整数 n,z^n 都有意义．再反复使用定理 1.1,可得 z^n 的指数形式

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

和三角形式

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

特别地,当 $r=1$ 时,上述公式成为

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

此公式称为棣莫弗(DeMoivre)公式.

例 1.4 计算 $\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}$ 的值.

解 先将括号中作为分子和分母的两个复数分别改写为三角表示式

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

于是

$$\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3},$$

根据幂的计算公式,得

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{10}=\cos\frac{20\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{20\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

1.2.2 复数的开方

设 $z\neq0$,n 是自然数,满足 $\omega^n=z$ 的 ω 称为 z 的 n 次方根,记作$\sqrt[n]{z}$,即

$$\omega=\sqrt[n]{z}\text{或 }\omega=z^{\frac{1}{n}}.$$

现在来推导 $z^{\frac{1}{n}}$ 的表达式. 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$\omega=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,则由方程 $\omega^n=z$ 得到

$$(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\text{即 }\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

比较等式两边模和辐角,可知

$$\rho^n=r,n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

解得

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

于是

$$\omega=r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

这说明

$$\omega=z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

为方程 $\omega^n=z$ 的全部的根.

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,可以得到方程 $\omega^n=z$ 的 n 个单根. 在几何上,这 n 个单根表示以原点为中心、$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点. 当 k 取其他整数值时,方程 $\omega^n=z$ 的根必与这 n 个单根中的某个根相同.

例如,方程 $\omega^n=1(n=2,3,\cdots,\omega\neq0)$ 在复数范围内有 n 个单根

$$\omega=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

若设 $\omega_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$,方程 $\omega^n=1$ 的 n 个单根可记为 $1,\omega_n,\omega_n^2,\omega_n^3,\cdots,\omega_n^{n-1}$,它们是单位圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

具体地,以 $n=3$ 为例,方程 $\omega^3=1$ 的 3 个单根可记为

$$\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}\ (k=0,1,2).$$

它们是圆的内接正三角形的 3 个顶点(图 1.4).

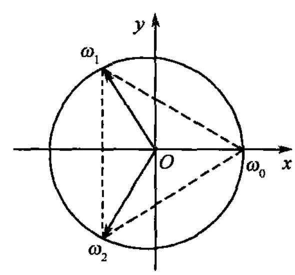

图 1.4

例 1.5 计算 $\sqrt{-8\mathrm{i}}$.

解 因为 $-8\mathrm{i}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

所以

$$\sqrt{-8\mathrm{i}}=\sqrt{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}{2}}\quad(k=0,1).$$

由此可知方程 $\omega^2=-8\mathrm{i}$ 的两个单根分别为 $2-2\mathrm{i}$ 和 $-2+2\mathrm{i}$. 其几何意义是,$2-2\mathrm{i}$ 和 $-2+2\mathrm{i}$ 刚好是以原点为圆心半径为 $2\sqrt{2}$圆直径的两个端点.