

全国教育科学【十一五】教育部规划课题



# 图解 新教材

高中数学必修1

配套江苏版教材

总主编 钟山

读图时代的学习方法

总策划 薛金星

北方联合出版传媒(集团)股份有限公司



辽海出版社



## 《图解新教材》的学习与考试原理

### ——引导一场学习的新革命

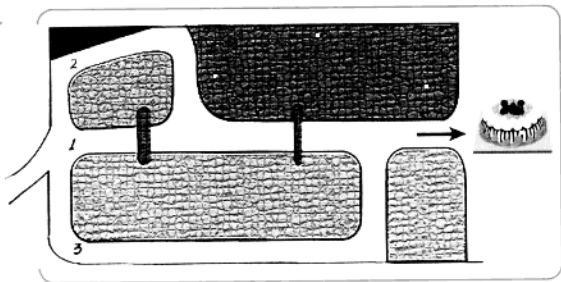
每一个孩子的成长都是在学习完成的，但是，很少有学生能够真正理解什么是学习。心理学家加涅把学习概括为学什么、为什么学和怎样学。加涅指出，只有明确了学习的原理，才能够达到预期的学习效果。

## 学什么？

### 认知地图与目标学习

心理学家托尔曼对几只小白鼠做过这样一个迷津试验

(如图) ▶



#### 试验

托尔曼把小白鼠分为三组，共同训练它们走迷津。

1. A组在正常条件下训练，每次到达目的地都能得到食物。
2. B组在训练的前期没有得到食物，到训练的后期得到食物。
3. C组始终没有得到食物。

#### 结果

1. A组学习效果稳步提升。
2. B组学习效果在获得食物的奖励后突然提升。
3. C组学习效果始终没有变化。

#### 表明

三组小白鼠的学习情境相同，差别是有没有食物强化。C组小白鼠没有受到强化的时候也在学习，但学习结果没有表现出来，是“潜在学习”。

#### 得出

强化不是学习所必需的，但目标对于学习格外重要。没有目标，学习的结果就不能明显地体现在外显的行为中。

《图解新教材》将目标作为每一章节体系的重点，帮助学生树立目标意识。

# 为什么学?

## 建构主义：我们与知识的互动关系



### 学习能够促进大脑发育

罗森茨威格(Rosenzweig, M. R)研究, 接受丰富多变的环境刺激和适当学习训练的一组幼鼠与另一组处于单调贫乏的环境而又缺乏学习训练的幼鼠相比, 在4~10周中, 前者大脑皮层的重量与厚度增加, 神经胶质细胞数量增多, 神经突触增大或增多, 乙酰胆碱酯酶含量更丰富且活性提高, 核糖核酸和脱氧核糖核酸的比率也有所改善。

关于人类学习对人类成长的影响, 瑞士著名心理学家皮亚杰(J. Piaget)认为, 学习是促进人类大脑发展最有效的方式。

### 学习是人的一种需要

建构主义的含义就是学习者通过新、旧知识经验间的反复的、双向的交互作用, 不断地调整和形成自己的新的知识经验结构。建构主义原理的一个方面就是说明: 人与知识之间是一个双向互动的关系, 即学习对于人是一种需要。

### 学习是个体生存的必要手段

每个人的一生都处在不断地学习过程之中, 不管这种学习是显性的还是隐性的。教育学家认为, 个体存在有两个基本条件: 一是个体对知识的持续积累; 二是交流。个体知识积累对个体社会关系的构建有着直接的制约作用。所以, 人要是在社会群体中生存, 必须不断学习, 只是这种学习的表现形式有所不同而已。

《图解新教材》沿用建构的学习理论, 在编写过程中, 不是单一地对学生灌输知识, 而是注重学生自身的知识经验, 注重知识的相互作用和转换的过程, 引导学生自主学习。

# 怎样学?

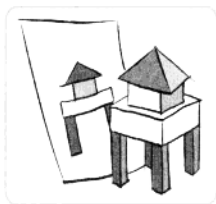
## 学习就像搭积木

### 《图解新教材》所利用的建构主义理论学习模式

1

学习是学习者主动建构知识的过程。

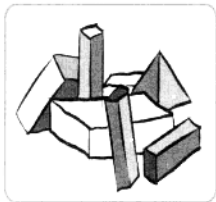
如图：我们可以按照不同的图纸搭建不同的东西。



2

学习需要按照新的目标对旧知识经验结构做出调整和改善，从而形成新的知识和经验。

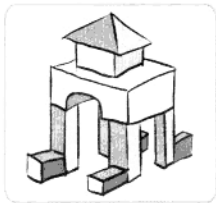
如图：面对新的图纸，我们可以搭建新的形状。



3

利用已有的知识经验，充分调动人的主观能动性，运用自己的旧知识解决新问题。

如图：我们可以灵活地利用积木搭出不同的图形。



怎样学习才能举一反三?

要达到举一反三的学习效果，需要满足五个条件。



## 学习要举一反三

### 学习迁移发生的主要条件

#### ① 条件：智力水平

如：把一些比较困难的复合题变换分解成几个简单题做，不太难，单独解决这些复合题，难度就大。

#### ② 条件：旧经验的泛化水平

如：学习除法时引入分数的形式，则有利于正迁移，而学习加减法会对学习乘除法产生干扰。

#### ③ 条件：学习对象的共同因素

如：英语和法语在词性、读音和语法结构上有相同或相似之处，学习两门外语容易产生正迁移，学共同因素很少的英语与汉语容易产生负迁移。

#### ④ 条件：学习的理解和巩固程度

如：在学习语文时，深刻理解字、词、句的含义，才能更顺畅地阅读和写作。

#### ⑤ 条件：定势的影响

如：练习某类课题有助于类似课题的学习，但碰到与先前的作业不是同类的作业时，定势就可能干扰后面的学习，限制创造性地解决问题。

## 突破学习的瓶颈——高原现象

目标是影响练习效率最重要的因素。练习与机械重复的本质区别在于，机械重复没有目标，是为了重复而重复，而目标具有指向性功能，并可以改进练习的方式方法。

激发练习的动机和热情  
使练习者对结果充满期待  
为检测练习结果提供参照  
提高学习成绩

最终目标：

目标

练习成绩

### 局部练习和整体练习

整体练习法是把学习内容作为整体来掌握，从一开始就着手强化内容各元素之间的联系。局部练习法是把学习内容分解为若干个元素或部分，并逐个练习，再完成所有的学习内容。通常，学习的内容容易被分解，则采用局部练习法，或者在学习的前期采用局部练习法。

### 集中练习和分散练习

练习时间的安排可以分为集中练习和分散练习。集中练习是长期不断地进行练习，在练习中间不安排休息时间；分散练习是每隔一段时间进行练习，每次练习之间有休息间隔。分散练习利于整体的提高，但集中练习有时可以达到突击的效果。

### 及时收集反馈信息

对练习的反馈可以提高练习的积极性和纠正练习过程中出现的偏差，从而改善学习者的行为。反馈既可以来自内部，即“感觉”自己的练习方式是否有问题，也可以是来自外界的评价。

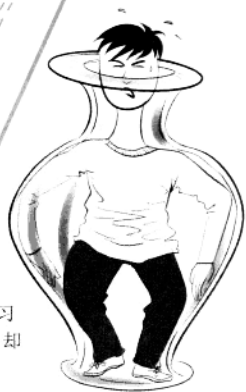
学习压力过大；  
学习热情下降；  
身体过分疲劳；  
旧的知识经验  
结构不适用……

现状

### 高原现象

高原现象 (plateau phenomenon) 是练习成绩出现暂时性的停顿，虽十分常见，却不是普遍存在的。

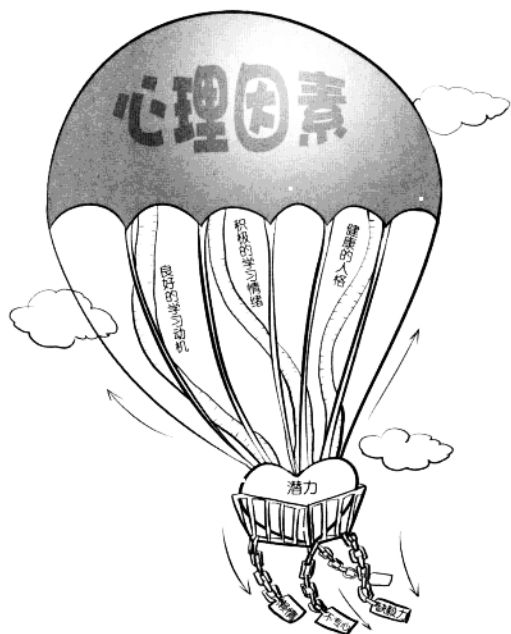
练习时间



## 发掘学习潜力

### 学习潜力——心理因素的无限可能性

研究表明，心理因素对人们的学习有着重要的影响，起着引导、维持、调节和强化等作用。如下图：



心理因素中的某些条件可以发掘学习者无限的潜力，但也有某些条件会对学习者的学习效果产生不利的影响。

《图解新教材》的魅力就在于能够在学习思路上挖掘学习者心理因素中对学习有利的因素，而排除那些对学习不利的因素，在最大程度上保证学习效果。



## 学习新革命的引领者

全球权威心理学家、物理学家、生物学家及教育学家联合研究表明，图解的学习方法是最简单、最实用、最科学、最高效的学习方法。《图解新教材》丛书历经三年研发与打造，以图解的方式方法，创造性解决了目前学生陈旧低效的学习方式和繁杂抽象的学习内容问题。《图解新教材》丛书将带领广大学子运用最便捷的方法思考问题，站在更高的层面上分析问题，运用最恰当的方式解决问题。

### 本丛书将会使您轻松成为学习高手

本书讲解与呈现方式引入风靡欧美数十年的被誉为“打开大脑潜能的万能钥匙”和“21世纪风靡全球的学习方法与思维工具——概念地图与思维导图”，以图解方式科学地实现了知识的可视化，化深为浅、化繁为简、化抽象为形象、化理论为实例，实现基于脑神经生理特性的左右半球互动学习模式，将高效的、可视化的学习策略、方法、技巧融入到日常学习中去，帮助你释放出难以置信的学习潜能，让你的学习、记忆、理解、应试更轻松、更快捷。

### 本丛书将会使您真正成为学考专家

本书立足于解决“如何学好、如何考好”两个学生最关心的问题，同步新课标教材，落实新课标学习与考试理念。内容讲解上知识与考点融为一体，突出深入浅出的学习特点；全面挖掘历年考题在教材中的典型原型和影子，与考例直线链接，达到快速融会贯通；总结学法与考法清晰明确，助学助考事半功倍；例题与习题突出方法总结，实现授之以渔，举一反三；学生能力与素质分阶段培养落实，全程循序渐进，系统提升。

### 本丛书将会使您体验到学习的轻松快捷

人类80%以上的信息是通过视觉获得的，常言道“百闻不如一见”“一图胜过千言”就是这个意思。本书采用轻松直观的图文并茂的编排形式，各类图示变繁杂抽象为直观快捷，各种插画变深奥冗烦为浅显愉悦，各种表格变枯燥乏味为清晰明了，充分开拓学生与生俱来的放射性思考能力和多感官学习潜能。

**全球超过2.5亿人使用的高效的学习方法，  
你不想试一试吗？**



# 目 录

|                      |      |                      |       |
|----------------------|------|----------------------|-------|
| <b>第1章 集 合</b> ..... | (1)  | 综合拓展 专题专项 .....      | (47)  |
| 1.1 集合的含义及其表示 .....  | (2)  | 面向高考 阶段总结 .....      | (54)  |
| 知识方法能力图解 .....       | (3)  | 自主限时 章末精练 .....      | (56)  |
| 多元智能 知识点击 .....      | (3)  | 教材问题 详尽答案 .....      | (58)  |
| 发散思维 题型方法 .....      | (6)  | <b>第2章 函数概念与基本初等</b> |       |
| 知识激活 学考相联 .....      | (10) | <b>函数 I</b> .....    | (60)  |
| 考场报告 误区警示 .....      | (11) | 2.1 函数的概念和图象 .....   | (61)  |
| 自主限时 精题精练 .....      | (12) | 2.1.1 函数的概念和图象 ..... | (62)  |
| 练后反思/答案详解 .....      | (12) | 知识方法能力图解 .....       | (62)  |
| 教材问题 详尽答案 .....      | (13) | 多元智能 知识点击 .....      | (62)  |
| 附精品专题 .....          | (13) | 发散思维 题型方法 .....      | (67)  |
| 1.2 子集、全集、补集 .....   | (15) | 知识激活 学考相联 .....      | (73)  |
| 知识方法能力图解 .....       | (15) | 考场报告 误区警示 .....      | (74)  |
| 多元智能 知识点击 .....      | (15) | 自主限时 精题精练 .....      | (74)  |
| 发散思维 题型方法 .....      | (17) | 练后反思/答案详解 .....      | (75)  |
| 知识激活 学考相联 .....      | (23) | 教材问题 详尽答案 .....      | (75)  |
| 考场报告 误区警示 .....      | (24) | 附精品专题 .....          | (78)  |
| 自主限时 精题精练 .....      | (25) | 2.1.2 函数的表示方法 .....  | (80)  |
| 练后反思/答案详解 .....      | (26) | 知识方法能力图解 .....       | (80)  |
| 教材问题 详尽答案 .....      | (27) | 第1课时 函数的表示方法         |       |
| 附精品专题 .....          | (27) | .....                | (80)  |
| 1.3 交集、并集 .....      | (29) | 多元智能 知识点击 .....      | (80)  |
| 知识方法能力图解 .....       | (29) | 发散思维 题型方法 .....      | (84)  |
| 多元智能 知识点击 .....      | (30) | 知识激活 学考相联 .....      | (92)  |
| 发散思维 题型方法 .....      | (34) | 考场报告 误区警示 .....      | (93)  |
| 知识激活 学考相联 .....      | (40) | 自主限时 精题精练 .....      | (93)  |
| 考场报告 误区警示 .....      | (41) | 练后反思/答案详解 .....      | (94)  |
| 自主限时 精题精练 .....      | (42) | 教材问题 详尽答案 .....      | (96)  |
| 练后反思/答案详解 .....      | (42) | 第2课时 函数及其表示          |       |
| 教材问题 详尽答案 .....      | (43) | 习题课 .....            | (97)  |
| 附精品专题 .....          | (45) | 发散思维 题型方法 .....      | (97)  |
| 章末复习 .....           | (47) | 自主限时 精题精练 .....      | (103) |
| 构建体系 知识网格 .....      | (47) | 练后反思/答案详解 .....      | (103) |



左脑+右脑>>左脑

学会用大脑的语言思考，图解是一种高效的方法，更是一种成功的习惯。



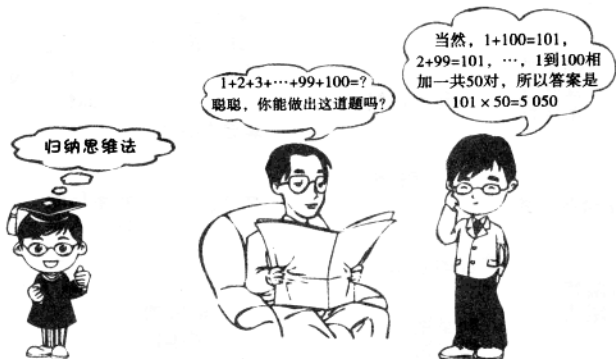
|               |       |       |
|---------------|-------|-------|
| 教材问题 详尽答案     | ····· | (105) |
| 附精品专题         | ····· | (106) |
| 2.1.3 函数的简单性质 | ····· | (108) |
| 知识方法能力图解      | ····· | (108) |
| 第1课时 函数的单调性   | ····· | (108) |
| 多元智能 知识点击     | ····· | (108) |
| 发散思维 题型方法     | ····· | (113) |
| 知识激活 学考相联     | ····· | (118) |
| 考场报告 误区警示     | ····· | (118) |
| 自主限时 精题精练     | ····· | (119) |
| 练后反思/答案详解     | ····· | (120) |
| 教材问题 详尽答案     | ····· | (121) |
| 附精品专题         | ····· | (122) |
| 第2课时 函数的奇偶性   | ····· | (124) |
| 多元智能 知识点击     | ····· | (124) |
| 发散思维 题型方法     | ····· | (125) |
| 知识激活 学考相联     | ····· | (130) |
| 考场报告 误区警示     | ····· | (131) |
| 自主限时 精题精练     | ····· | (131) |
| 练后反思/答案详解     | ····· | (132) |
| 教材问题 详尽答案     | ····· | (133) |
| 第3课时 函数的性质习题课 | ····· | (133) |
| 发散思维 题型方法     | ····· | (133) |
| 考场报告 误区警示     | ····· | (137) |
| 自主限时 精题精练     | ····· | (138) |
| 练后反思/答案详解     | ····· | (138) |
| 2.1.4 映射的概念   | ····· | (140) |
| 知识方法能力图解      | ····· | (140) |
| 多元智能 知识点击     | ····· | (140) |
| 发散思维 题型方法     | ····· | (142) |
| 知识激活 学考相联     | ····· | (145) |
| 考场报告 误区警示     | ····· | (146) |
| 自主限时 精题精练     | ····· | (147) |
| 练后反思/答案详解     | ····· | (147) |

|             |       |       |
|-------------|-------|-------|
| 教材问题 详尽答案   | ····· | (148) |
| 附精品专题       | ····· | (151) |
| 2.2 指数函数    | ····· | (151) |
| 2.2.1 分数指数幂 | ····· | (152) |
| 知识方法能力图解    | ····· | (152) |
| 多元智能 知识点击   | ····· | (153) |
| 发散思维 题型方法   | ····· | (155) |
| 知识激活 学考相联   | ····· | (158) |
| 考场报告 误区警示   | ····· | (159) |
| 自主限时 精题精练   | ····· | (159) |
| 练后反思/答案详解   | ····· | (160) |
| 教材问题 详尽答案   | ····· | (160) |
| 附精品专题       | ····· | (162) |
| 2.2.2 指数函数  | ····· | (164) |
| 知识方法能力图解    | ····· | (164) |
| 多元智能 知识点击   | ····· | (164) |
| 发散思维 题型方法   | ····· | (168) |
| 知识激活 学考相联   | ····· | (176) |
| 考场报告 误区警示   | ····· | (177) |
| 自主限时 精题精练   | ····· | (178) |
| 练后反思/答案详解   | ····· | (178) |
| 教材问题 详尽答案   | ····· | (180) |
| 附精品专题       | ····· | (182) |
| 2.3 对数函数    | ····· | (184) |
| 2.3.1 对数    | ····· | (185) |
| 知识方法能力图解    | ····· | (185) |
| 多元智能 知识点击   | ····· | (185) |
| 发散思维 题型方法   | ····· | (188) |
| 知识激活 学考相联   | ····· | (192) |
| 考场报告 误区警示   | ····· | (193) |
| 自主限时 精题精练   | ····· | (194) |
| 练后反思/答案详解   | ····· | (194) |
| 教材问题 详尽答案   | ····· | (195) |



|                   |       |                             |       |
|-------------------|-------|-----------------------------|-------|
| 附精品专题 .....       | (197) | 2.5.2 用二分法求方程的<br>近似解 ..... | (242) |
| 2.3.2 对数函数 .....  | (198) | 知识方法能力图解 .....              | (242) |
| 知识方法能力图解 .....    | (198) | 多元智能 知识点击 .....             | (242) |
| 多元智能 知识点击 .....   | (198) | 发散思维 题型方法 .....             | (244) |
| 发散思维 题型方法 .....   | (202) | 知识激活 学考相联 .....             | (246) |
| 知识激活 学考相联 .....   | (208) | 考场报告 误区警示 .....             | (246) |
| 考场报告 误区警示 .....   | (208) | 自主限时 精题精练 .....             | (247) |
| 自主限时 精题精练 .....   | (209) | 练后反思/答案详解 .....             | (248) |
| 练后反思/答案详解 .....   | (210) | 教材问题 详尽答案 .....             | (249) |
| 教材问题 详尽答案 .....   | (211) | 附精品专题 .....                 | (252) |
| 附精品专题 .....       | (214) | 2.6 函数模型及其应用 .....          | (253) |
| 2.4 幂函数 .....     | (216) | 知识方法能力图解 .....              | (254) |
| 知识方法能力图解 .....    | (216) | 多元智能 知识点击 .....             | (254) |
| 多元智能 知识点击 .....   | (216) | 发散思维 题型方法 .....             | (255) |
| 发散思维 题型方法 .....   | (219) | 知识激活 学考相联 .....             | (259) |
| 知识激活 学考相联 .....   | (221) | 考场报告 误区警示 .....             | (260) |
| 考场报告 误区警示 .....   | (222) | 自主限时 精题精练 .....             | (261) |
| 自主限时 精题精练 .....   | (222) | 练后反思/答案详解 .....             | (262) |
| 练后反思/答案详解 .....   | (223) | 教材问题 详尽答案 .....             | (263) |
| 教材问题 详尽答案 .....   | (224) | 附精品专题 .....                 | (264) |
| 附精品专题 .....       | (225) | 章末复习 .....                  | (266) |
| 2.5 函数与方程 .....   | (227) | 构建体系 知识网格 .....             | (266) |
| 2.5.1 函数的零点 ..... | (227) | 综合拓展 专题专项 .....             | (266) |
| 知识方法能力图解 .....    | (227) | 面向高考 阶段总结 .....             | (277) |
| 多元智能 知识点击 .....   | (228) | 自主限时 章末精练 .....             | (283) |
| 发散思维 题型方法 .....   | (232) | 教材问题 详尽答案 .....             | (285) |
| 知识激活 学考相联 .....   | (236) | <b>本册重点大归纳</b> .....        | (291) |
| 考场报告 误区警示 .....   | (237) | 本册必记知识完全表解 .....            | (291) |
| 自主限时 精题精练 .....   | (238) | 本册易错易混的 10 个问题归纳<br>.....   | (293) |
| 练后反思/答案详解 .....   | (239) | 本册热点常考综合问题归纳<br>.....       | (294) |
| 教材问题 详尽答案 .....   | (240) |                             |       |
| 附精品专题 .....       | (241) |                             |       |





# 走进

## 第1章 集合

同学们,从图 1-0-1 中我们可以看到:一棵棵的树矗立在远方;一群大象在茫茫的草原上悠闲地走动……

树、象群……都是“同一类对象汇集在一起”,这就是本章我们将要学习的集合。也就是说,所有的树在一起构成了一个集合,所有的象在一起构成了另一个集合……



图 1-0-1



## 1.1 集合的含义及其表示

一位渔民非常喜欢数学,但他怎么也想不明白集合的含义,于是,他请教数学家:“尊敬的先生,请您告诉我,集合是什么?”

集合是不好定义的概念,数学家很难回答那位渔民。

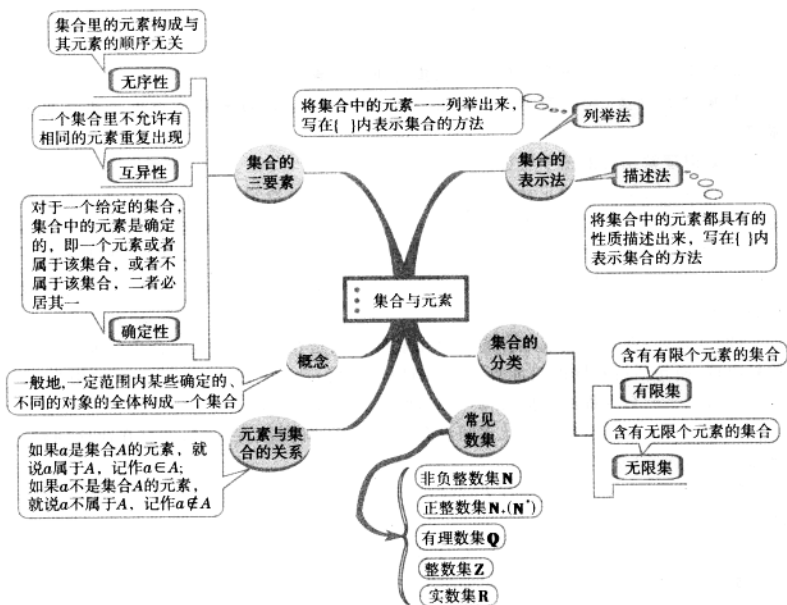
有一天,数学家来到渔民的船上,看到渔民撒下鱼网,轻轻一拉,许多鱼虾在网中跳动,数学家非常激动,高兴地告诉渔民:“这就是集合!”

同学们,你能理解数学家的话吗?



图 1-1-1

## 知识方法能力图解



## 多元智能 知识点击

●重点 难点 疑点 方法……

## 探究一 集合的概念与分类

## 智能导航



## 各个击破

1. **集合**: 一般地, 一定范围内某些确定的、不同的对象的全体构成一个集合.

(1) 集合中的每个对象叫做这个集合的元素(或成员).

(2) 如果  $a$  是集合  $A$  的元素, 就说  $a$  属于  $A$  (记作  $a \in A$ ); 如果  $a$  不是集合  $A$  的元



素,就说 $a$ 不属于 $A$ (记作 $a \notin A$ ). $a \in A$ 和 $a \notin A$ 取决于 $a$ 是不是集合 $A$ 中的元素,根据集合中元素的确定性可知,对任意 $a$ 和 $A$ , $a \in A$ 和 $a \notin A$ 这两种情况,必有一种且只有一种成立.

(3)符号 $\in$ 和 $\notin$ 是用来表示元素和集合之间的从属关系的,不能用来表示集合与集合之间的关系.

2. **空集**:一般地,把不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$ .

3. **集合的分类**:含有有限个元素的集合是有限集,含有无限个元素的集合是无限集.

4. 如何理解集合的三个特征?

(1) **确定性**:集合中的元素必须是确定的,这就是说,给定一个集合,任意一个元素是不是这个集合中的元素是确定的,或者在这个集合中,或者不在这个集合中,二者必居其一.例如给出集合“地球上的四大洋”,它只是太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋四个元素,其他对象都不是它的元素.又如,“我国的小河流”就不能组成一个集合,因为组成它的对象不是确定的.

(2) **互异性**:就是指组成集合的每个元素都应该是互不相同的,集合中的元素不能重复出现,换句话说相同的只能算一个,例如,方程 $(x^2 - 4x + 4)(x + 3) = 0$ 的根为 $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -3$ ,方程的解集为 $\{2, -3\}$ ,而不能写成 $\{2, 2, -3\}$ .

(3) **无序性**:就是指集合的元素间没有顺序关系,只要放在一起,不存在次序问题,例如 $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ .

**例** (期中统考·潍坊)集合 $P = \{1, m, m^2 - 3m - 1\}$ ,若 $3 \in P$ 且 $-1 \notin P$ ,则实数 $m$ 的值为( )

- A. 4      B. 3      C. 4 或 3      D. -1 或 4

**解析**:由 $3 \in P$ 且 $-1 \notin P$ 易知, $m = 3$ 时, $P = \{1, 3, -1\}$ ,与 $-1 \notin P$ 矛盾, $\therefore m^2 - 3m - 1 = 3, \therefore m = 4$ 或 $m = -1$ (舍去).可知 $m = 4$ . **答案**:A

5. 常用的数集及其记法

(1) **全体非负整数**组成的集合称为非负整数集,记作 $\mathbf{N}$ .

(2) **全体正整数**组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{N}_+$ .

(3) **全体整数**组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$ .

(4) **全体有理数**组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$ .

(5) **全体实数**组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$ .

**探究二** 集合的表示方法

**智能导航**



## 各个击破

## 1. 集合的表示方法

(1) 列举法: ①把集合中的所有元素都放到  $\{ \}$  内; ②元素之间必须用逗号隔开; ③  $\{ \}$  内的元素与顺序无关, 如  $\{1, 2, 3\}$ 、 $\{2, 1, 3\}$ 、 $\{3, 2, 1\}$  都是同一集合; ④表示含有较多元素的集合时, 必须把元素间的规律显示清楚后方能用省略号.

(2) 描述法: ①将集合的所有元素都具有的特征(满足的条件)表示出来, 写成  $\{x|p(x)\}$  的形式; ②  $x$  叫做代表元素,  $p(x)$  指  $x$  适合的条件, 此条件应满足: 所有属于此集合的元素都具有此性质, 而不属于此集合的元素都不具有此性质.

(3) 图示法: ①Venn图法; ②数轴法.

## 2. 用列举法和描述法表示集合应注意些什么?

(1) 列举法表示集合的优点是可以明确集合中具体的元素及元素的个数, 但是使用列举法表示集合, 往往不能直接反映集合中元素满足的条件, 特别是当集合中元素无限多时, 用列举法就很不方便了, 因为不能将这无限多个元素一一列举出来.

(2) 用描述法表示集合, 要特别注意这个集合中的元素是什么, 它应该符合什么条件, 从而准确理解集合的意义, 例如:

1) 集合  $\{(x, y)|y=\sqrt{x}\}$  中的元素是  $(x, y)$ , 这个集合表示方程  $y=\sqrt{x}$  的解集, 或者理解为表示曲线  $y=\sqrt{x}$  上的点组成的点集.

2) 集合  $\{x|y=\sqrt{x}\}$  中的元素是  $x$ , 这个集合表示函数  $y=\sqrt{x}$  中自变量  $x$  的取值范围, 即  $\{x|x \geq 0\}$ .

3) 集合  $\{y|y=\sqrt{x}\}$  中的元素是  $y$ , 这个集合表示函数  $y=\sqrt{x}$  中函数值  $y$  的取值范围, 即  $\{y|y \geq 0\}$ .

4) 集合  $\{y=\sqrt{x}\}$  中的元素只有一个(方程  $y=\sqrt{x}$ ), 它是用列举法表示的单元集合.

在使用描述法时应注意以下几点: ①写清元素代号; ②说清集合中元素的特性; ③不能出现未被说明的字母; ④所有描述的内容都写在集合括号内; ⑤语句力求简明、确切, 字句逐一说明.

3. 你能说出“ $a$ ”与“ $\{a\}$ ”及“ $\emptyset$ ”与“ $\{0\}$ ”的不同之处吗?

(1)  $a$  与  $\{a\}$  意义不同,  $a$  表示一个元素, 而  $\{a\}$  表示只含一个元素  $a$  的集合,  $a \in \{a\}$ .

(2)  $\emptyset = \{0\}$  成立吗?  $\{0\}$  是一个含有元素“0”的集合, 而  $\emptyset$  不含任何元素, 所以不成立.

## 4. 你能体会出同一集合可以分别用三种表示方法给出吗?

列举法、描述法、图示法各有优点, 应该根据具体问题确定采用哪种表示法, 有的集合可以分别用这三种表示法表示, 例如“大于3且小于7的自然数组成的集合”可以表示为列举法  $\{4, 5, 6\}$ 、描述法  $\{x \in \mathbf{N} | 3 < x < 7\}$ 、图示法(图 1-1-2)三种形式.



图 1-1-2



5. 你对图示法表示集合理解透了吗?

用一条封闭的曲线的内部(或数轴)表示一个集合,我们称为图示法.例如集合  $A = \{a, b, c, d\}$  可表示为图 1-1-3;集合  $B = \{x | 0 < x \leq 4\}$  可表示为图 1-1-4,注意在  $x=0$  处要用空心圆圈,体现以形代数、数形结合的思想.

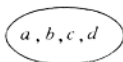


图 1-1-3

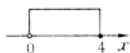


图 1-1-4

## 发散思维 题型方法

●思路 步骤 方法 技巧……

### 题型一 利用集合的三个特征解决问题

**题型揭秘:**此题型主要是对集合的三个特征,即确定性、互异性、无序性,特别是对集合的互异性进行考查,解答的关键是看构成集合的元素是否有明确的标准,并且要注意检验是否违背了互异性这一特性.

**例 1** (山东调研) 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 集合  $\{1, a+b, a\} = \left\{0, \frac{b}{a}, b\right\}$ , 则  $a-b =$  \_\_\_\_\_.

**解析:** 由  $\frac{b}{a}$  的写法知,  $a \neq 0$ , 而  $0 \in \left\{0, \frac{b}{a}, b\right\}$ ,

$$\therefore 0 \in \{1, a+b, a\}, \therefore a+b=0,$$

$$\therefore a = -b, \frac{b}{a} = -1, \therefore -1 \in \{1, a+b, a\},$$

$$\therefore a = -1, b = 1, \text{故 } a-b = -2.$$

**答案:** -2

两集合相等, 则  
两集合中的元素相同.

### 题后小结

在求解有关集合概念的问题时,首先要明确集合的元素是什么,都有哪些元素,其次要根据集合中元素的三个重要性质:无序性、互异性、确定性进行检验,另外集合的相等决定了本题  $a, b$  的惟一性,并通过列方程(组)求解.

**例 2** (探究题) 由实数  $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$

所组成的集合中,最多含有元素的个数为 \_\_\_\_\_.

**解析:** 因为  $\sqrt{x^2} = |x|$ ,  $-\sqrt[3]{x^3} = -x$ , 所以当  $x=0$  时,这几个实数均为 0; 当  $x > 0$  时,它们分别是  $x, -x, x, x, -x$ ; 当  $x < 0$  时,它们分别是  $x, -x, -x, -x, -x$ . 故集合中元素的个数最多为 2, 故填 2.

**答案:** 2

利用互异性求解.



## 题后小结

(1) 本题易混淆  $|x|$  与  $x$  及  $-x$ , 实际上  $|x|$  只能为  $x$  与  $-x$  其中之一.

(2) 集合中元素的三个特征: 确定性、无序性、互异性, 要予以重视, 特别是互异性, 最易忽略, 常用它来检验解的正确与否.

## 题型二 元素与集合的关系问题

例3 (教材习题变式) 用  $\in$  或  $\notin$  填空.

(1)  $0$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\mathbf{N}^*$ ,  $\sqrt{2}$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\mathbf{Z}$ ,  $(-1)^0$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\mathbf{N}^*$ ;

(2)  $2\sqrt{3}$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\{x|x < \sqrt{11}\}$ ,  $3\sqrt{2}$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\{x|x > 4\}$ ,  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\{x|x \leq 2 + \sqrt{3}\}$ ;

(3)  $3$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\{x|x = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}^*\}$ ,  $5$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\{x|x = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}^*\}$ ;

(4)  $(-1, 1)$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\{y|y = x^2\}$ ,  $(-1, 1)$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $\{(x, y)|y = x^2\}$ .

解析: (1) 填  $\notin, \notin, \in$ .

(2)  $\because 2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{11}$ ,  $3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{16} = 4$ . 又  $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{10} < 7 + 2\sqrt{12} = (2 + \sqrt{3})^2$ .  $\therefore \sqrt{2} + \sqrt{5} < 2 + \sqrt{3}$ .  $\therefore$  填  $\notin, \in, \in$ .

(3)  $\because n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\therefore n^2 + 1 \neq 3$ . 又  $\because n = 2$  时,  $n^2 + 1 = 5$ ,  $\therefore$  填  $\notin, \in$ .

(4)  $\because \{y|y = x^2\}$  中元素是数, 而  $(-1, 1)$  代表一组有序实数对或代表一个点,  $\therefore (-1, 1) \notin \{y|y = x^2\}$ .  $\therefore$  填  $\notin, \in$ .

答案: (1)  $\notin, \notin, \in$  (2)  $\notin, \in, \in$  (3)  $\notin, \in$  (4)  $\notin, \in$

## 题后小结

元素与集合之间的关系用  $\in$  或  $\notin$  表示, 判定一个对象是不是某个集合的元素, 就是判断这个对象是否具有集合元素所具有的属性. 由于集合多种多样, 因此判断方法也多种多样, 因题而异. 本解中比较  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  与  $2 + \sqrt{3}$  的大小时, 就用到了平方法.

## 题型三 集合的表示方法

例4 下列各集合是用描述法表示的, 请读懂各集合中的元素, 并用列举法表示

下列集合:

(1)  $\{x|(2x-1)(x+2)(x^2+1)=0, x \in \mathbf{Z}\}$ ; (2)  $\{\text{不大于 } 10 \text{ 的非负偶数}\}$ ;

(3)  $A = \left\{x \mid x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, a, b \text{ 为非零实数}\right\}$ ; (4)  $\{(x, y) \mid \begin{cases} 2x+y=8, \\ x-y=1 \end{cases}\}$ ;

(5)  $A = \left\{x \mid \frac{6}{3-x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{N}^*\right\}$ .

## 思路图解

