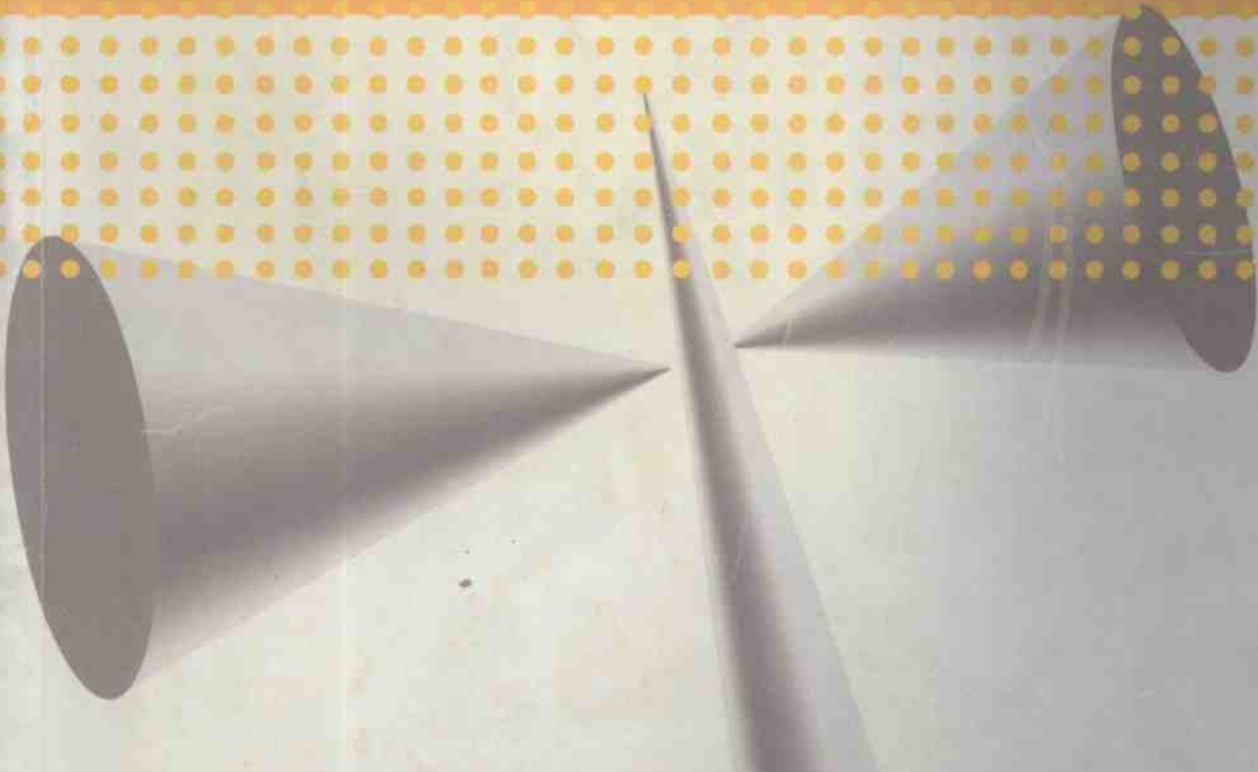
全国高校素质教育教材研究编审委员会审定

线性代数与空间解析几何

陈东升 主编



中国科学技术出版社

本书由北京久富春教育科技发展中心协助出版

线性代数与空间解析几何

崔磊 星期二 上午 10:00 教三楼 508

主　编　陈东升

副主编　黄守佳　谭瑞梅

编　委　（以姓氏笔画为序）

全允战　刘　强　李　黎

陈东升　汪远征　秦建国

郭晓丽　黄守佳　黄松奇

谭瑞梅

中国科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何/陈东升主编，一北京：中国科学技术出版社，2006.8

ISBN 7-110-06356-9/G·6

I.线…　II.陈…　III. 线性代数—空间解析几何

IV.G633.6

线性代数与空间解析几何

主　编　陈东升

责任编辑	曲廷清
装帧设计	屈传亮
出版发行	中国科学技术出版社
Email	gaojiaobian@tom.com
排　　版	新天地文印中心
印　　刷	新颖印务有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	14
字　　数	340千字
版　　次	2006年8月第1版
书　　号	ISBN 7-110-06356-9/G·6
定　　价	19.80元

第二版前言

本书自 2003 年出版使用以来，经历了三年的教学实践，得到了广大师生的认可。这次的修订，除了一些勘误以外，对其中的章节进行了微调和修改，使得课程体系更趋于合理化，此外，在例题和习题的选配方面，也作了一些调整和修改，以适应各层次学生的需求。

借再版的机会，向关心本书再版的同行、各级领导表示诚挚的谢意，并再次向郑州轻工业学院教材建设委员会、教材科、信息与计算科学系的支持和帮助深表感谢。

陈东升

2006 年 6 月

序

二十世纪以来，由于科学技术的飞速发展，数学的应用范围急剧扩展，它不仅更广泛深入地应用于自然科学和工程技术中，而且已经渗透到诸如生命科学、经济与社会科学领域。尤其是计算机的广泛使用和计算机软件的高速发展，引起了科学技术的定量化分析方法迅速发展，使得各门学科之间加速相互渗透，因此数学必须以新的内容、新的理论、新的方法来适应新的形势。

线性代数是讨论有限维空间的理论课程，它是工科高等院校的一门重要的基础理论课程（属工程数学），也是工科学生考研的必考课程。而解析几何研究的是用代数方法解决几何问题，电影电视中引人入胜的动画制作，工程技术中正在日益推广的计算机辅助设计（CAD），科学计算的可视化学，它们的基本数学工具都是解析几何和线性代数。因此掌握解析几何与线性代数的基本概念和基本方法，对21世纪的各类工程科技人员来说是必需的。

但是在当前工科数学教育中，高等数学与工程数学中各部分内容自成体系，缺乏应有的相互联系、相互渗透等问题。因而原工科《线性代数》的内容须作调整和更新，以适应国民经济、科技发展和高等教育的需要。数学领域中的代数与几何两个分支有着密切的联系，我院线性代数课程体系的改革正是基于这样的考虑，将《高等数学》中"向量代数与空间解析几何"的内容与"线性代数"的内容进行整合优化，使学生既有数的概念又有形的思维，使数与形有机的融合在一起。这样既提高了学生的数学素养，又培养了学生的创新意识能力，还有效地解决了教学内容多、要求高与学时少的矛盾。线性代数课程体系改革后形成的《线性代数与空间解析几何》讲义，经过近几年的试用、修改，形成了独具特色的教材体系。

本书可作为工程和其他非数学类专业的高等院校教学用书，也可供各大专院校或成人教育学院的学生作为教材使用，还可供考研生、自学者和广大科技工作者等参考。本书的出版，必将促进线性代数课程的建设，对于激发学生学习兴趣，提高数学课程的教学质量，将发挥良好的作用。

郑州轻工业学院副院长、教授　张　鑫

2003年6月

目　录

第一章　行列式及其计算 ………………………… (1)

§1　二阶和三阶行列式 ………………………… (1)

§2　n 阶行列式 ………………………… (4)

§3　行列式的性质 ………………………… (9)

§4　行列式按行(列)展开 ………………………… (18)

§5　克莱姆(Cramer)法则 ………………………… (25)

习题一 ………………………… (30)

第二章　向量代数　平面与直线 ………………………… (35)

§1　向量及其线性运算 ………………………… (35)

§2　向量的投影及坐标表示 ………………………… (38)

§3　数量积　向量积　*混合积 ………………………… (46)

§4　空间的平面和直线 ………………………… (53)

习题二 ………………………… (64)

第三章　矩阵及其运算 ………………………… (68)

§1　矩阵的概念 ………………………… (68)

§2　矩阵的运算 ………………………… (70)

§3　几种特殊的矩阵 ………………………… (79)

§4　矩阵的初等变换 ………………………… (81)

§5　逆矩阵 ………………………… (88)

§6　矩阵的秩 ………………………… (97)

§7　线性方程组的高斯消元法 ………………………… (102)

§8　矩阵分块法 ………………………… (109)

习题三 ………………………… (115)

第四章　n 维向量与线性方程组 ………………………… (121)

§1　n 维向量 ………………………… (121)

§2　向量组的线性相关性 ………………………… (124)

§3　向量组的秩 …………………………………………………… (133)
§4　齐次线性方程组解的结构 ………………………………………… (141)
§5　非齐次线性方程组解的结构 ……………………………………… (149)
习题四 ……………………………………………………………… (157)

第五章　矩阵的特征值与特征向量 ………………………………… (162)
§1　n 维向量的内积 ………………………………………………… (162)
§2　矩阵的特征值与特征向量 ………………………………………… (170)
§3　相似矩阵 ………………………………………………………… (174)
§4　实对称矩阵的对角化 ……………………………………………… (177)
习题五 ……………………………………………………………… (181)

第六章　二次型与二次曲面 ……………………………………… (185)
§1　二次型及其标准型 ……………………………………………… (185)
§2　正定二次型 ……………………………………………………… (192)
§3　二次曲面 ………………………………………………………… (195)
§4　二次型在二次曲面研究中的应用 ………………………………… (209)
习题六 ……………………………………………………………… (213)

习题答案 ………………………………………………………… (216)

第一章　行列式及其计算

行列式起源于解 n 元线性方程组，它是研究线性代数的一个重要工具，近代它又被广泛地运用到物理、工程技术等多个领域. 本章从解二元与三元线性方程组入手引进二阶与三阶行列式的概念，进而用排列的奇偶性把行列式的概念推广到 n 阶，讨论了行列式的基本性质，并介绍了 n 阶行列式的计算方法与一些技巧.

§1　二阶和三阶行列式

1.二阶．2!项．每项是元素之积．
两元素位于不同行不同列．
三阶：3!项．每项是三个元素的乘积
每一项的元素都位于不同行不同列．
2、行列式可以计算
对角线法则只适用于二三阶行列式．

一、二阶行列式

对二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 .\end{cases} \tag{1-1}$$

利用消元法，可得

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} .\end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，可得方程组(1-1) 的唯一解

$$\begin{cases}x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} .\end{cases} \tag{1-2}$$

为了便于记忆这些解的公式，引入记号

行　列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1-3}$$

称为**二阶行列式**. 其中数 $a_{ij}(i = 1,2;j = 1,2)$ 称为行列式(1-3) 的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

利用二阶行列式，(1-2) 式可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中分母是由方程组(1-1) 中未知数的系数按原来的位置排列成的行列式，称为方程组

(1-1) 的**系数行列式**;分子则分别是将系数行列式的第一列和第二列换成方程组(1-1) 右端的常数列所得到的行列式. 于是,若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时,方程组(1-1) 有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad .$$

二阶行列式(1-3) 中,等号右端的表示式又称为**行列式的展开式**,二阶行列式的展开式可以用所谓的**对角线法**则得到,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

图 1.1

其中,实线上两个元素的乘积带正号,虚线上两个元素的乘积带负号,所得两项的代数和就是二阶行列式的展开式.

称上式中的实线为**主对角线**,虚线为**副对角线**. 于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2 \quad , \\ x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \quad ,$$

所以,方程组有唯一解,又由于

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad ,$$

因此方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{10} = 0.2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{7}{10} = 0.7.$$

二、三阶行列式

为了得出三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad , \end{cases} \tag{1-4}$$

的类似解法,我们引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad ,$$

这是一个包括六项的代数和，每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积，其中有三项前面带正号，另三项前面带负号.

三阶行列式也可用对角线法则得到. 三阶行列式的对角线法则如下图所示：

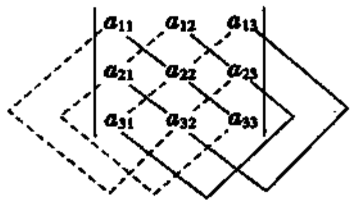


图 1.2

其中每一条实线上三个元素的乘积带正号，每一条虚线上的三个元素的乘积带负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的展开式.

通过对类似于方程组(1-1) 所作的讨论，可以得到方程组(1-4) 的下述解法. 若线性方程组(1-4) 的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \tag{1-5}$$

则方程组(1-4) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad , \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

它们是将系数行列式(1-5) 中的第 1,2,3 列分别换成方程组(1-4) 中的常数项所得到的行列式.

例 2　解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \quad , \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \quad , \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

解　利用三阶行列式的对角线法则可求得

$$D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-8\quad,\quad D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11\quad,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=9\quad,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6.$$

于是,所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8}\quad,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8}\quad,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{6}{8}.$$

从上面的例子可以看出,对于未知量个数与方程个数相等的线性方程组(1-1)和(1-4),如果它们的系数行列式不等于零,用行列式求解是方便的.

在实际应用中,遇到的线性方程组所包含的未知量常常是多于三个,而且在某些理论研究中往往需要考虑 n 个未知量的线性方程组的求解问题. 我们自然希望能把上面二元和三元线性方程组的解法推广到包括 n 个未知量 n 个方程的线性方程组. 为此首先把二阶和三阶行列式加以推广,引入 n 阶行列式的概念.

排列与反(逆)序数

1.排列:由n个不同的元素排成一行.(n≥2),称这n个元素的一个排列.

2.n级排列:是由1,2,…,n构成的有序数组称为这n个数的一个n阶排列. 用j1 j2 … jn表示.

§2 n 阶行列式

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,下面先介绍有关排列的知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

一、排列与反序数

把 n 个不同的元素按一定的顺序排成一行($n\geqslant 2$),称为这 n 个元素的一个**排列**,为了方便起见,这里只用到前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的排列.

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n **阶排列**. 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

如 2341 是一个四阶排列,25134 是一个五阶排列.

n 个不同元素的所有排列的种数,通常用 P_n 表示,从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上,有 n 种取法;又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上,有 $n-1$ 种取法;这样继续下去,直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上,只有一种取法. 于是 $P_n=n(n-1)\cdots 321=n!$. 如 1,2,3 这三个自然数组成的所有三阶排列:123,231,312,132,213,321,其种数 $P_n=6=3!=3\times2\times1$. $12\cdots n$ 是一个 n 阶排列,它具有自然顺序,称为**自然排列**(**或标准排列**),在这个排列中的任何两个数,小的数总排在大的数前面.

定义 2 一个排列中,如果一个大的数排在小的数之前,就称这两个数构成一个**反序**. 一个排列的反序总数称为这个排列的**反序数**. 以后用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数.

反序数为奇数的排列叫做**奇排列**，反序数为偶数的排列叫做**偶排列**.

例3 在四阶排列2341中，共有反序21,31,41，即$\tau(2341)=3$，所以2341是奇排列.

在五阶排列25134中，共有反序21,51,53,54，即$\tau(25134)=4$，所以25134是偶排列.

例4 自然排列$12\cdots n$的反序数$\tau(123\cdots n)=0$，所以$12\cdots n$是偶排列；而n阶排列$n(n-1)\cdots 321$的反序数$\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$，所以，当$n=4k$或$4k+1$时，$n(n-1)\cdots 21$是偶排列，而当$n=4k+2$或$4k+3$时，$n(n-1)\cdots 21$是奇排列.

在一个排列中，交换其中某两个数的位置，而其余各数的位置不动，就得到另一个同阶的新排列. 对排列施行的这样一个交换称为一个**对换**，将相邻两个数对换，叫做**相邻对换**. 如例3中五阶偶排列25134经过2,5对换变成排列52134，容易计算$\tau(52134)=5$，所以52134是奇排列. 一般地，我们有如下结论：

定理1 对换改变排列的奇偶性. 即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证 先证相邻对换的情形，即考虑对换排列中相邻的两数l和m，即排列

$$\cdots lm\cdots \tag{1-6}$$

经对换l和m变成了

$$\cdots ml\cdots\quad, \tag{1-7}$$

其中“$\cdots$”表示在对换下保持不动的数，容易看出，m与这些数和l与这些数以及这些数之间构成的反序在(1－6)与(1－7)中并未改变，故计算(1－6)与(1－7)的反序数只需考虑l与m的次序. 显然(1－6)与(1－7)的反序数相差1，故排列的奇偶性改变.

再证一般对换的情形，即考虑对换排列中不相邻的两数l和m，即排列

$$\cdots lj_1j_2\cdots j_sm\cdots \tag{1-8}$$

经对换l和m变成了

$$\cdots mj_1j_2\cdots j_sl\cdots. \tag{1-9}$$

不难看出这种对换可以通过$2s+1$次相邻的对换来实现. 如在(1-8)中将mj_s对换，再与j_{s-1}对换，…，逐步将m向左方移动，经$s+1$次相邻的对换变成

$$\cdots mlj_1j_2\cdots j_s\cdots\quad, \tag{1-10}$$

接着又在(1-10)中将l与j_1对换，再与j_2对换，…，逐步将l向右方移动，经s次相邻对换变成了

$$\cdots mj_1j_2\cdots j_sl\cdots.$$

由于对换相邻两数改变排列的奇偶性，故通过奇数$2s+1$次相邻对换使排列奇偶性改变.

推论 在全部n阶排列中($n\geqslant 2$)，奇、偶排列各占一半，即各有$\frac{n!}{2}$个.

证 设奇、偶排列各有p、q个，则$p+q=n!$. 对每一个奇排列对换数码1与2，依定

理 1 必变成偶排列，p 个不同的奇排列变成 p 个不同的偶排列，但总共只有 q 个偶排列，因此 $p \leqslant q$；同样可得 $q \leqslant p$，所以 $p = q = \frac{n!}{2}$.

定理 2 任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成标准排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

证 对排列的阶数 n 作数学归纳法。当 $n = 1$ 时，结论显然成立. 设对 $n-1$ 阶排列结论成立，现在考虑 n 阶排列的情形.

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是任意一个 n 阶排列，若 $j_n = n$，则 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 是一个 $n-1$ 阶排列. 根据归纳假设，排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可经过一系列对换变为自然排列；若 $j_n \neq n$，则在排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中先对换 j_n 和 n，使排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成 $j_1'j_2'\cdots j_{n-1}'n$，这就归结为前面的情形. 由前面的结论可知，排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 也可经过一系列对换变成自然排列.

根据归纳法原理，对任意自然数 n，结论成立.

由于 $12\cdots n$ 是偶排列，且对换改变排列的奇偶性，所以将一个偶（奇）排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变为自然排列需作偶（奇）数次对换. 即将排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成自然排列所作对换次数的奇偶性与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性相同.

例如 $32154 \xrightarrow{1,3\text{ 对换}} 12354 \xrightarrow{5,4\text{ 对换}} 12345$，对换两次成为标准排列，因此 32154 是偶排列. 事实上，经计算知 $\tau(32154) = 4$. 对换的方法不唯一，$32154 \xrightarrow{2,1\text{ 对换}} 31254 \xrightarrow{1,3\text{ 对换}} 13254 \xrightarrow{3,2\text{ 对换}} 12354 \xrightarrow{5,4\text{ 对换}} 12345$，还是偶数次互换.

二、n 阶行列式的定义

在给出 n 阶行列式的定义之前，先观察三阶行列式的结构，在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

的展开式中，可以发现：

(1) 它的每一项都是 3 个元素的乘积，并且这三个元素位于三阶行列式的不同行、不同列，所以，除符号外，每一项可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，而 $j_1j_2j_3$ 是一个三阶排列.

(2) 当 $j_1j_2j_3$ 取遍了三阶排列（123，231，312，321，213，132）时，即得到三阶行列式的所有项（符号除外），共 $3! = 6$ 项.

(3) 每一项的符号，是每一项中元素的行标按自然顺序排列时，如果对应的列标构成偶排列时取正号，为奇排列时取负号.

综上所述，作为三阶行列式的展开式中的一般项可表示为：$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$. 从而，三阶行列式可简写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \quad ,$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 是对所有的三阶排列求和. 类似地，二阶行列式可写成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum\limits_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{1j_2}$,其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 是对所有的二阶排列求和.

由此,我们归纳出一般 n 阶行列式的定义.

定义 3 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots n)$ 排成的 n 行 n 列的算式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 其中横排称行,纵排称列. 它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和. 其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,每项前面带有符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项带正号,否则带负号,共有 $n!$ 项. 记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1-11}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. n 阶行列式简记为 $|a_{ij}|$.

由上述定义可知,$n=2$ 时,即二阶行列式,$n=3$ 时,即三阶行列式. 一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$,注意不要与数的绝对值相混淆. 显然如果行列式有一行(列)元素全为零,则行列式等于零. 主对角线以下(上)的元素都为零的行列式叫做**上(下)三角形行列式**(主对角线是指从左上角到右下角的对角线).

例 5 计算下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii} \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 由 n 阶行列式的定义

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$
显然,这个代数和中必有很多项为零.根据 n 阶行列式的定义不难分析出 D 中不为零的项,即一般项中 a_{1j_1} 必取自第一行,而第一行中只有 a_{11} 不为零,所以 $j_1=1$. 一般项中 a_{2j_2} 必取自第二行,而第二行中只有 a_{21}, a_{22} 可能不为零,然而,a_{11} 已取自第一列,所以 a_{2j_2} 不能再取第一列,这样,只能取第二列元素 a_{22},故 $j_2=2$. 依此类推,可得 $j_3=3$, $j_4=4$, $\cdots$, $j_n=n$. 因此,D 中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外,其余各项均为零,于是
$$D=(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$
同理,可计算上三角形行列式
$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$
其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

这个例子说明下(上)三角形行列式等于主对角线上元素的乘积.

作为上三角形行列式的特例,有**对角行列式**(除主对角线上的元素外其余元素全为零)
$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$
与例 5 相仿,根据行列式的定义
$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$
$$=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$
作为本节的结束,给出 n 阶行列式的等价定义:
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \qquad (1\text{-}12)$$
实际上,(1-11) 和(1-12) 式右端都有 $n!$ 项,根据数的乘法交换律,(1-11) 式右端的任一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 总可以通过因子的有限次交换写成列标是标准排列 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ 的形

式. 在每一次交换因子时,行标所成排列及列标所成排列都经历了一个对换,因此行标排列的反序数与列标排列的反序数之和的奇偶性不变. 所以经历有限次的因子交换后,上述反序数之和的奇偶性不变. 于是有

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$$

所以我们断定(1-11)式右端任一项总对应着(1-12)式右端的某一项. 类似地,(1-12)式右端的任一项也对应着(1-11)式右端某一项,所以(1-12)式成立.

例 6 确定 4 阶行列式中 $a_{23}a_{42}a_{14}a_{31}$ 前面所带的符号.

解 由于 $a_{23}a_{42}a_{14}a_{31}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$,所以这一项前面所带的符号是 $(-1)^{\tau(4312)}=(-1)^5=-1$. 即这项前面带负号.

§3 行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可知,当 n 较大时,用定义计算行列式运算量很大. 下面介绍行列式的基本性质,运用这些性质,不仅可以简化行列式的计算,而且对行列式的理论研究也很重要.

一、行列式的性质

设 n 阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 中的行与列互换,所得的 n 阶行列式记为 D^{T},即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

性质 1 行列互换,行列式的值不变,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证 设 $D^{\mathrm{T}}=|b_{ij}|$,其中 $b_{ij}=a_{ji}$,然后把 D^{T} 的列标取作自然排列,则由(1-12)式得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}b_{i_11}b_{i_22}\cdots b_{i_nn} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \end{aligned}$$

这正是 D 按(1-11)式的展开式,故 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的. 因之凡是有关行的性质，对列也同样成立. 以后我们讨论行列式仅对行讨论，当然对列也同样成立，就不重复了.

性质 2 对换行列式中两行(列) 的位置，行列式反号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } p \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } q \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

证 左端 $= \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$($12\cdots p\cdots q\cdots n$ 为自然排列).

显然，上面展开式中的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$ 也是右端行列式的完全展开式中的项，反之亦然，因而左、右两端行列式的展开式具有相同的项.

现在来看 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$ 作为右端展开式的项前面应带的符号. 注意到 a_{pj_p} 在右端行列式中位于第 q 行，a_{qj_q} 在右端行列式中位于第 p 行，所以 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$ 的行指标和列指标所成的排列分别是

$$1\cdots q\cdots p\cdots n \text{ 和 } j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n$$

于是 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$ 作为右端行列式展开的项，它的前面应带的符号是

$$(-1)^{\tau(1\cdots q\cdots p\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)} = -(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}$$

所以，左端 = 右端.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，c_i 表示第 i 列. 交换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 若一个行列式中有两行(列) 的对应元素(指列(行) 指标相同的元素) 相同，则这个行列式为零.

事实上，交换这两行(列)，则 $D = -D$. 故 $D = 0$.

性质 3 行列式的某一行(列) 中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{p1} & ka_{p2} & \cdots & ka_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$