



技 工 学 校 教 材

高小毕业程度适用

数 学

下 册

全国技工学校教材编审委员会编

中 国 工 业 出 版 社

410-73

266

380734



本书是由全国技工学校教材编审委员会組織編写和审定的。

本书分上下两册出版。本书为下册。下册的主要内容有相似形、求积、整式乘除法、因式分解、分式及分式方程、一次方程組和方根、一元二次方程等等。

本书适用于作为高小毕业程度三年制技工学校教材。

本书系由彭梦芝、邵軸、刘立十和李賽华諸同志执笔編写的。

本书用表請参看“数学用表”一书。

数 学

下 册

全国技工学校教材编审委员会編

*

中国工业出版社出版(北京德胜门内10号)

(北京市书刊出版事业許可証出字第110号)

五三五 工厂印刷

新华书店科技发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ · 印張 $10\frac{1}{4}$ · 字数 225,000

1961年10月北京第一版·1961年10月北京第一次印刷

印数 00001—94,442 · 定价(7-1)0.75元

統一书号: 15165 · 1069 (一机221)

目 录

第九章 相似形

I 成比例的綫段	1
§ 92 两条綫段的比	1
§ 93 成比例的綫段	2
§ 94 平行綫截得比例綫段的定理	8
§ 95 相交的两条直綫截两条平行綫的定理	10
II 相似形	18
§ 96 相似形的概念	18
§ 97 三角形相似的判定	20
§ 98 三角形相似的性质	26
§ 99 相似多边形的性质	29
§ 100 相似多边形的画法	30

第十章 求 积

I 周长与面积	39
§ 101 正多边形的周长与面积	39
§ 102 圓周长及扇形弧长	45
§ 103 圓面积及扇形面积	50
§ 104 弓形的面积	52
II 表面积与体积	59
§ 105 体积与体积的单位	59
§ 106 长方体、立方体的表面积与体积	60
§ 107 直棱柱、正棱柱的表面积与体积	61
§ 108 正棱錐的表面积与体积	63
§ 109 正棱台的表面积与体积	65
§ 110 直圓柱的表面积与体积	71
§ 111 圓錐的表面积与体积	74
§ 112 圓台的表面积与体积	76
§ 113 球的表面积与体积	78

第十一章 整式乘除法、因式分解

I 整式的乘法	84
§ 114 单项式乘法 同底数幂的乘法	84
§ 115 单项式乘法	85
§ 116 单项式与多项式相乘	87
§ 117 多项式的乘法	90
II 整式的除法	93
§ 118 单项式的除法	93
§ 119 多项式除以单项式	95
§ 120 多项式除以多项式	95
III 乘法公式	99
§ 121 平方差	99
§ 122 二项式平方	101
§ 123 二项式立方	106
§ 124 立方和与立方差	107
IV 因式分解	109
§ 125 因式和因式分解	109
§ 126 提取公因式法	109
§ 127 分组分解法	112
§ 128 应用公式分解法	115
§ 129 十字相乘法	120
§ 130 多项式因式分解的步骤	125

第十二章 分式及分式方程

§ 131 分式	128
§ 132 分式的基本性质	128
§ 133 改变分式的分子和分母的符号	129
§ 134 约分	129
§ 135 通分	135
§ 136 分式的加法和减法	137
§ 137 分式的乘法	142
§ 138 分式的除法	143

§ 139 分式方程	146
§ 140 一元一次不等式	157

第十三章 一次方程組

I 二元一次方程	164
§ 141 二元一次方程	164
§ 142 直角坐标系	165
§ 143 二元一次方程的图象	167
II 二元一次方程組	173
§ 144 二元一次方程組	173
§ 145 用消元法解二元一次方程組	175
§ 146 用行列式法解二元一次方程組	181
§ 147 用图象法解二元一次方程組	186
§ 148 二元一次方程組的解的組数	187
§ 149 可以化为二元一次方程組的方程組的解法	190
§ 150 列出方程組来解应用問題	193
III 三元一次方程組	200
§ 151 三元一次方程組	200
§ 152 用消元法解三元一次方程組	201
§ 153 用行列式法解三元一次方程組	205
§ 154 列出方程組来解应用問題	211

第十四章 幂和方根

I 整指数幂的概念及其运算	217
§ 155 正整指数幂的定义及其运算	217
§ 156 零指数幂及整指数幂的定义	218
§ 157 整指数幂的运算	220
§ 158 立方数表的用法	221
II 方根的概念及其运算	225
§ 159 方根的概念	225
§ 160 积、公式、幂的开方	227
§ 161 开平方	231
III 实数	239

§ 162	无理数	239
§ 163	近似值的誤差	241
§ 164	无理数在数軸上的位置	242
IV	根式	244
§ 165	根式及其基本性質	244
§ 166	根式的化簡	246
V	根式的运算	247
§ 167	根式加減法	247
§ 168	根式乘除法	249
§ 169	根式的乘方与开方	250
§ 170	分母有理化	251
VI	分指数幂的概念及其运算	258
§ 171	分指数幂	258
§ 172	分指数幂的运算	260

第十五章 一元二次方程

§ 173	一元二次方程	265
§ 174	一元二次方程的解法	266
§ 175	一元二次方程的根与系数的关系	278
§ 176	二次方程的根的判別式	283

第十六章 对数

I	对数的概念	290
§ 177	对数的定义	290
§ 178	对数的性質	291
II	常用对数	296
§ 179	常用对数的意义及性質	296
§ 180	对数尾数表的结构和应用	300
§ 181	反对数表(真数表)	303
§ 182	三角函数的对数	305
§ 183	对数的变形	307
§ 184	对数的运算	308
§ 185	应用对数作計算的例子	313
§ 186	用計算尺求对数、真数、三角函数的对数	318

第九章 相似形

I 成比例的綫段

§ 92 两条綫段的比

在生产和生活中，我們常常要把一个图形放大或者縮小。例如，画一架車床的图样，制作建筑物的模型，画出一个机械零件放大的图样等等，都关系到一个图形的放大或者縮小。

为了研究图形的放大或者縮小，首先就要研究綫段的放大或縮小，也就是要研究有关比例綫段的問題。

有两条綫段 a 和 b ，我們用分米作为长度单位去度量，如果 a 是 3 分米， b 是 2 分米，那么 a 和 b 的比就是 3:2，或者写成 a 比 b 是 $\frac{3}{2}$ 。如果以寸为单位去度量它們，那么 a 就是 9 寸， b 就是 6 寸， a 比 b 为 9 比 6，或者写成 a 比 b 是 $\frac{9}{6}$ ，化簡以后 a 比 b 仍旧是 $\frac{3}{2}$ 。又如两地的实际距离是 250 米，而画在图上的距离是 5 厘米，即 0.05 米，那么 0.05 米比 250 米就是图与实际距离的比，这个比就表示了图距与实距的放大与縮小的关系，因 0.05:250 化成最簡單的整数比为 1:5000。这就表明，图距是实距的 $\frac{1}{5000}$ ，实距是图距的 5000 倍。

我們把用同样的长度单位来度量两綫段所得的数的比叫做这两条綫段的比。由上述例題可以知道，两条綫的比与所取的长度单位没有关系。

如果 a 和 b 是两条綫段，那么就可以写成 $a:b$ 或者写成 $\frac{a}{b}$ (这只是表示同长度单位度量得的数量的比)。

§ 93 成比例的綫段

把一幅矩形的图放大或者縮小时，我們总是使矩形的长和寬放大(或縮小)相同的倍数。如图 9-1 中，原来长 b ，放大 2 倍后为 d 。原来的寬为 a ，放大两倍后为 c ，这时 d 和 b 的比就等于 c 和 a 的比(都等于 2)，即：

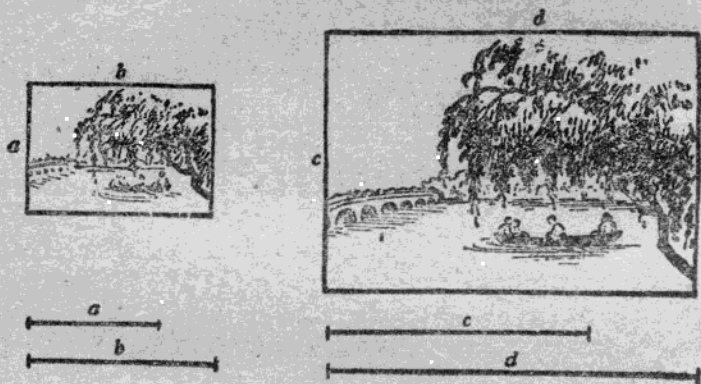


图 9-1

$$\frac{d}{b} = \frac{2}{1}, \frac{c}{a} = \frac{2}{1} \quad \therefore d:b = c:a.$$

如果两对綫段的比相等，这两对綫段就叫做成比例的綫段。如 $d:b = c:a$ ，那么 d, b, c, a 是成比例的綫段。

根据綫段的比的意义：两条綫段的比和由綫段組成的比例，分别都具有第一章所讲过的两个数的比和由数組成比例的性質。这就是說，关于数的比和比例的性質，也完全适合于綫段的比和綫段的比例。

我們已經知道，在任何比例里都具有性質“两外項之积等于两內項之积”。用式子表示为(1)如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那么 $ad = bc$ 。除了这条性質以外，还常用到下面的性質：

(2) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, 如 $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, 则 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$;

(3) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那么 $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, 如 $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, 则 $\frac{12}{3} = \frac{4}{1}$;

(4) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那么 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, 如 $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, 则 $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$;

(5) 如果 $a:b=c:d$, 或者 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

那么 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (合比定理)。

証: $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 等式两边同加上 1 得,

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1, \text{通分后相加得,}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}, \text{即 } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};$$

(6) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那么 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (分比定理)。

証: $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 等式两边同减去整数 1 得,

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1, \text{通分后相减得,}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d}, \text{即 } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

(7) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = k$,

那么 $\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ (等比定理)。

証: $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = k$,

$$\therefore a=bk, \quad c=dk, \quad e=fk, \dots,$$

就有 $a+c+e+\dots=bk+dk+fk+\dots$

根据乘法分配律就有 $a+c+e=k(b+d+f+\dots)$.

$$\therefore \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{k(b+d+f+\dots)}{b+d+f+\dots} = k.$$

例 1. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{3}{6} = \dots = 0.5,$

$$\frac{1+2+3+\dots}{2+4+6+\dots} = \frac{1+2+3+\dots}{2(1+2+3+\dots)} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

例 2. 证明高相等的两个三角形的面积的比等于底的比。

証: 如图 9-2, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中,

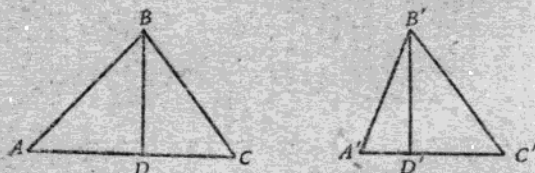


图 9-2

$BD \perp AC, B'D' \perp A'C', BD = B'D',$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD, S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} A'C' \cdot BD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BD}{\frac{1}{2} A'C' \cdot B'D'}, \text{ 因 } BD = B'D',$$

$$\text{就有 } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AC}{A'C'}.$$

例 3. 如果 a, b, c, d 是四条线段。它们的长

① $a=24$ 分米, $b=8$ 分米, $c=36$ 分米, $d=12$ 分米;

② $a=75$ 厘米, $b=21$ 厘米, $c=3$ 厘米, $d=10$ 厘米;

判定 a, b, c, d 是否成比例。

解: ① 因 $ad = 24 \times 12 = 288$,

$$bc = 8 \times 36 = 288,$$

$\therefore ad = bc$, 故 a, b, c, d 成比例, 即

$$a:b=c:d.$$

② 因 $ad = 7 \times 10 = 70$,

$$bc = 21 \times 3 = 63,$$

$ad \neq bc$, $\therefore a, b, c, d$ 不成比例。

或者 因 $\frac{a}{b} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$,

$$\frac{c}{d} = \frac{3}{10}, \quad \frac{1}{3} \neq \frac{3}{10},$$

即 $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, $\therefore a, b, c, d$ 不成比例。

例 4. 在线段 a, b, c, d 中, 有 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

如果 $a=7, b=5, c+d=10$, 求 d 。

解: 按合比定理有 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

令 $a=7, b=5, c+d=10$ 代入上式中,

$$\frac{7+5}{5} = \frac{10}{x}, \quad \therefore x = \frac{10 \times 5}{12} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6},$$

即 $d = 4\frac{1}{6}$.

例 5. 把下列各式改写成比例。

① $xy = KL$; ② $b^2 = ac$.

解: ① $xy = KL$,

按两内项之积 = 两外项之积, 有

$$K:x=y:L.$$

② $b^2 = ac$, 因 $b^2 = b \cdot b$,

∴得 $a:b=b:c$.

象二, 三項相等的比例中, 我們叫二, 三項(b)是一, 四項(ac)的比例中項。如 $2:4=4:8$, 4 是 2 与 8 的比例中項。

例 6. 已知綫段 DB 和 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 AC 分别相交于 D, E 两点, 并且 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, 求証 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

証: $\because \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, 根据比例的性質有,

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} \text{ (反比定理).}$$

再根据合比定理就有,

$$\frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC+AE}{EC}, \text{ 即 } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

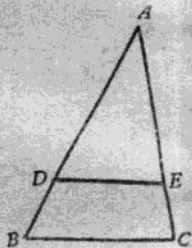


图 9-3

例 7. $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{4}{5}$. 如果 $\triangle ABC$ 的周长为 18 厘米, 求 $\triangle A'B'C'$ 的周长。

解: 因 $\triangle ABC$ 的周长 $= AB + BC + AC = 18$ 厘米,

$$\triangle A'B'C' \text{ 的周长} = A'B' + B'C' + A'C',$$

根据等比定理有 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'} =$

$$\frac{4}{5}, \text{ 即 } \frac{\triangle ABC \text{ 的周长}}{\triangle A'B'C' \text{ 的周长}} = \frac{4}{5}. \quad \frac{18}{x} = \frac{4}{5}, \quad \therefore x = \frac{18 \times 5}{4} = 22.5.$$

答 $\triangle A'B'C'$ 的周长为 22.5 厘米。

习题三十五

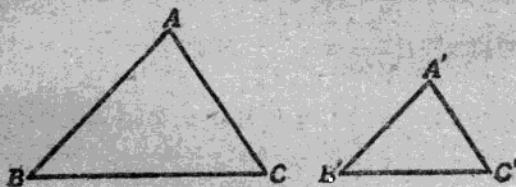
1. 举出把图形放大或者缩小的实际例子。
2. 画 $\triangle ABC$, 使 $AB = 15$ 厘米, $BC = 18$ 厘米, $CA = 10$ 厘米, 延长 AB 到 D , 使 $BD = 30$ 厘米, 从 D 作 $DE \parallel BC$, 交 AC 的延长綫于 E , 量 DE 和

AE 的长, 并且计算下列各比:

$$(1) \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} \cdot \frac{DE}{BC};$$

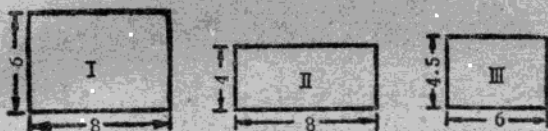
$$(2) \frac{AB}{BD} \cdot \frac{AC}{CE}.$$

3. 量图中两个三角形的各边和各角, 并且计算 $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{AC}{A'C'}$ 和 $\frac{BC}{B'C'}$.



(第3题)

4. 下面三个矩形中, 哪两个的长和宽成比例?



(第4题)

5. (1) 塔高 9 米, 影长 6 米。同时竿高 6 分米, 影长 4 分米。物高和影长是不是成比例的线段?

(2) 举出一些成比例线段的例子。

6. 证明: 底相等的三角形, 其面积的比等于高的比。

7. 如果 a, b, c, d 是四条线段, 它们的长度如下:

(1) $a=12$ 厘米, $b=8$ 厘米, $c=15$ 厘米, $d=10$ 厘米;

(2) $a=7$ 米, $b=14$ 米, $c=19.6$ 米, $d=5$ 米;

(3) $a=5$ 米, $d=2$ 米, $c=7$ 米, $d=3$ 米;

(4) $a=1.2$ 米, $b=4$ 分米, $c=9$ 分米, $d=0.3$ 米;

判定 a, b, c, d 是不是成比例的线段。

8. 在线段 a, b, c, d 中, 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

(1) $a=7$ 厘米, $b=4$ 厘米, $d=11$ 厘米, 求 c ;

(2) $a=5$ 分米, $b=2.6$ 分米, $c-d=6$ 分米, 求 d .

(3) $a:b=5:3$, $c=2\frac{2}{3}$ 米, 求 d .

9. 把下列各式改写成比例:

(1) $pq=m \cdot n$;

(2) $a^2=bc$;

(3) $x=\frac{bc}{a}$.

10. 在 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 中, 如果 $a=c$, 試証明 $b=d$.

11. 已知綫段 DZ 和 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 AC 分別相交于 D 、 E 两点, 并且 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. 求証 $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$.

12. 在第 11 題中, 如果 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{3}{2}$, 并且 $\triangle ABC$ 的周长为 6 厘米, 求 $\triangle ADE$ 的周长.

13. (1) 求 9 与 16 的比例中項;

(2) 若 $4:x=x:9$, 求 x .

§94 平行綫截得比例綫段的定理

这一节我們是研究平行綫截得比例綫段的定理。如果一組平行綫在直綫 AB 上截得 EF 、 FG 分別含有 3 个和 2 个相等綫段 (图 9-4), 那么在其他任何一条直綫 CD 上所截得的 LM 、 MN 也分別含有 3 个和 2 个相等綫段。因此 $EF:FG=LM:MN$ (都等于 3:2)。这样我們可以得到下面的定理:

三条平行綫截两条直綫, 截得的綫段成比例。

如图 9-4 这条定理, 我們很容易从第七章 §86 的定理来証明。如果在 FG 上不是恰好截得 2 个相等的綫段, 而是两个多一些 (例如 2.6), 那么, 我們就观察一下图 9-5。只要把 EF 和 FG 上的每一等分分为十个等分, 过各分点作平行綫, 就可以看到 $EF:FG$ 仍等于 $LM:MN$ (都等于 30:26, 即 3:2.6)。

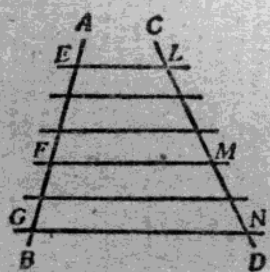


图 9-4

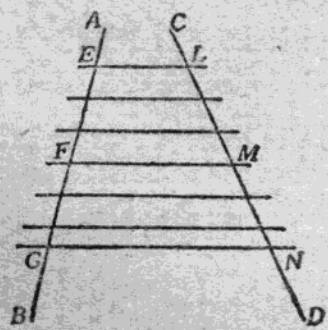


图 9-5

一角的两边 AB 和 AC 被两条平行线 DE 、 BC 所截 (图 9-6), 就可以看成是上面定理的一种特殊情况 (看作是过顶点 A 再作一条平行线)。∴ $AD:DB = AE:EC$ 。

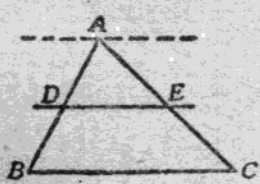


图 9-6

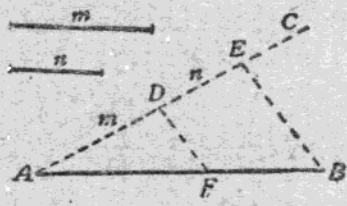


图 9-7

例 1. 把线段 AB 分为两部分, 使它的比等于 $m:n$ 。

画法: 过 A 点任意引一条射线 AC (图 9-7)。在 AC 上截 $AD=m$, $DE=n$, 然后连结 EB , 过 D 画 $DF \parallel EB$, 交 AB 得 F 点, 那么 F 点就将 AB 分为两部分, 并且 $AF:FB = m:n$ 。

证: 因 $DF \parallel EB$, 且 $AD:DE = m:n$,
根据上述定理 $AD:DE = AF:FB$,
∴ $AF:FB = m:n$ 。

例 2. 已知 a, b, c 三条线段。画一条线段 x , 使 $a:b = c:x$ 。

画法：过A点画射线AB、AC(图9-8)。在AB上取 $AD=a$ ， $DE=b$ ，又在AC上取 $AF=c$ ，连DF，然后过E点画 $EG \parallel DF$ ，

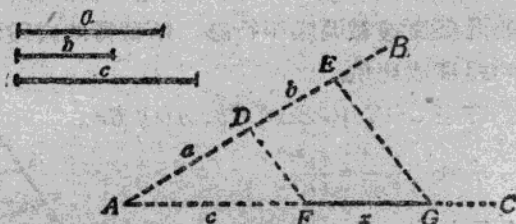


图 9-8

交AC于G，FG就是所要画的第四比例线段x(若比例线段 $a:b=c:d$ ，则a叫第一比例线段，b叫第二比例线段，c叫第三比例线段，d叫第四比例线段)。

§ 95 相交的两条直线截两条平行线的定理

相交于A点的两条直线，截两条平行线于B、D和C、E，那么， $BC:DE=AB:AD$ 。

在图9-9中，过D点画 $DF \parallel AC$ ，根据平行线截得比例线段的定理得：

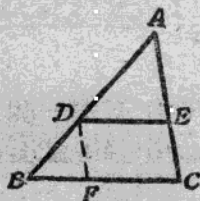


图 9-9

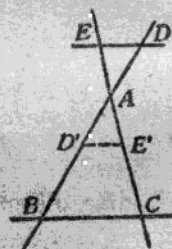


图 9-10

$\frac{BF}{FC} = \frac{BD}{DA}$ ，应用合比定理可得 $\frac{BC}{FC} = \frac{AB}{AD}$ 。因 $FC = DE$ ，就是

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$$

若两条平行线不在两相交直线交点A的同侧，如图9-10，

就只要在 AB 和 AC (或它们的延长线) 上, 分别取 $AD' = AD$, $AE' = AE$, 連結 DE , 就可以得到同样的结果。所以,

相交的两条直线截两条平行线, 所截得的线段和从交点到相应截点的距离成比例。

例 3. 在 $\triangle OCE$ 中, $BD \parallel CE$, $AD \parallel BE$ 。

求証 $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC}$

証: 如图 9-11,

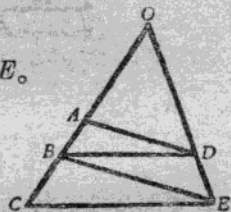


图 9-11

$$\because BD \parallel CE, \therefore \frac{OB}{BC} = \frac{OD}{DE}$$

据反比定理及合比定理有, $\frac{BC}{OB} = \frac{DE}{OD}$, $\frac{OC}{OB} = \frac{OE}{OD}$, 即 $\frac{OB}{OC} =$

$$\frac{OD}{OE}$$

$$\because AD \parallel BE, \therefore \frac{OA}{AB} = \frac{OD}{DE}$$

据反比定理及合比定理有 $\frac{AB}{OA} = \frac{DE}{OD}$, $\frac{OB}{OA} = \frac{OE}{OD}$, 即 $\frac{OA}{OB} =$

$$\frac{OD}{OE}$$

$$\therefore \frac{OA}{DB} = \frac{OD}{OE} = \frac{OB}{OC}, \therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC}$$

例 4. 在 $\angle A$ 的一边上有 B 和 C 两点, 在另一边上有 D 和 E 两点, 如果 $AB = 5$ 厘米, $BC = 6$ 厘米, $AE = 4.4$ 厘米, $DE = 2.4$ 厘米, 问 BD 、 CE 是否平行?

解: 如图 9-12, 因 $AB = 5$, $BC = 6$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{5}{6}$$

因 $DE = 2.4$, $AE = 4.4$, $\therefore AD = 2$

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{2}{2.4} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

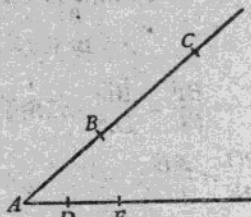


图 9-12