技工学校教材

高小毕业程度适用

数 学

下册

全国技工学校教材編审委員会編

中国工业出版社

本书是由全国技工学校教材编审委員会組織編写和审定的。

本书分上下两册出版。本书为下册。下册的主要内容有相似形、求积、整式乘除法、因式分解、分式及分式方程、一次方程組幂和方根、一元二次方程等等。

本书适用于作为高小毕业程度三年制技工学校教材。

本书系由彭梦芝、邵軸、刘立十和李賽华諸同志执笔編写的。

本书用表請参看"数学用表"一书。

数　学

下　册

全国技工学校教材編审委員会編

*

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路內10号）

（北京市书刊出版事业許可証出字第110号）

五三五 工 厂印刷

新华书店科技发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 787×1092 1/32·印張 10¼·字数 225,000

1961年10月北京第一版·1961年10月北京第一次印刷

印数 00001—94,442·定价(7-1)0.75元

統一书号: 15165·1069（一机221）

目　录

第九章　相似形

第十章　求　积

第十一章　整式乘除法、因式分解

第十二章　分式及分式方程

第十三章 一次方程組

第十四章 冪和方根

第十五章　一元二次方程

第十六章　对数

第九章　相似形

I　成比例的綫段

§92　两条綫段的比

在生产和生活中，我們常常要把一个图形放大或者縮小。例如，画一架車床的图样，制作建筑物的模型，画出一个机械零件放大的图样等等，都关系到一个图形的放大或者縮小。

为了研究图形的放大或者縮小，首先就要研究綫段的放大或縮小，也就是要研究有关比例綫段的問題。

有两条綫段 a 和 b，我們用分米作为长度单位去度量，如果 a 是 3 分米，b 是 2 分米，那么 a 和 b 的比就是 3:2，或者写成 a 比 b 是 $\frac{3}{2}$。如果以寸为单位去度量它們，那么 a 就是 9 寸，b 就是 6 寸，a 比 b 为 9 比 6，或者写成 a 比 b 是 $\frac{9}{6}$，化簡以后 a 比 b 仍旧是 $\frac{3}{2}$。又如两地的实际距离是 250 米，而画在图上的距离是 5 厘米，卽 0.05 米，那么 0.05 米比 250 米就是图与实际距离的比，这个比就表示了图距与实距的放大与縮小的关系，因 0.05 :250 化成最簡单的整数比为 1:5000。这就表明，图距是实距的 $\frac{1}{5000}$，实距是图距的 5000 倍。

我們把用同样的长度单位来度量两綫段所得的数的比叫做这两条綫段的比。由上述例題可以知道，两条綫的比与所取的长度单位沒有关系。

如果 a 和 b 是两条綫段，那么就可以写成 $a:b$ 或者写成 $\frac{a}{b}$ (这只是表示同长度单位度量得的数量的比)。

§93 成比例的綫段

把一幅矩形的图放大或者縮小时，我們总是使矩形的长和寬放大(或縮小)相同的倍数。如图 9-1 中，原来长 b，放大 2 倍后为 d。原来的寬为 a，放大两倍后为 c，这时 d 和 b 的比就等于 c 和 a 的比(都等于 2)，即:

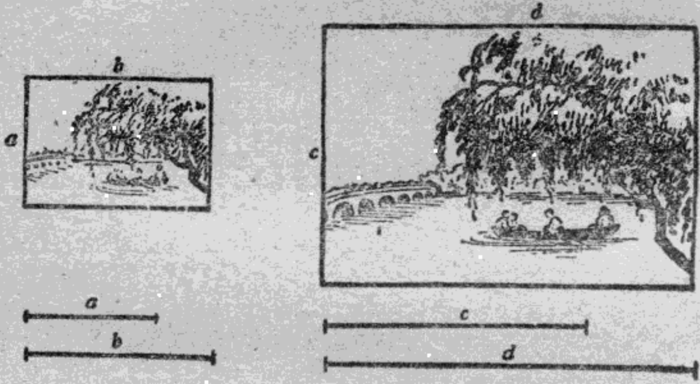


图 9-1

$$\frac{d}{b}=\frac{2}{1},\ \frac{c}{a}=\frac{2}{1}\qquad \therefore\ d:b=c:a.$$

如果两对綫段的比相等，这两对綫段就叫做成比例的綫段。如 $d:b=c:a$，那么 d、b、c、a 是成比例的綫段。

根据綫段的比的意义：两条綫段的比和由綫段組成的比例，分别都具有第一章所講过的两个数的比和由数組成比例的性质。这就是說，关于数的比和比例的性质，也完全适合于綫段的比和綫段的比例。

我們已經知道，在任何比例里都具有性质“两外項之积等于两內項之积”。用式子表示为(1)如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$。除了这条性质以外，还常用到下面的性质:

(2) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 那么$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, 如$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, 则$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$;

(3) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 那么$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, 如$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$, 则$\frac{12}{3}=\frac{4}{1}$;

(4) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 那么$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, 如$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$, 则$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$;

(5) 如果 $a:b=c:d$, 或者 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

那么$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$(合比定理)。

証: $\because$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 等式两边同加上 1 得,

$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$, 通分后相加得,

$\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d}$, 即$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

(6) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 那么 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$(分比定理)。

証: $\because$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 等式两边同减去整数 1 得,

$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$, 通分后相减得,

$\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{c}{d}-\frac{d}{d}$, 即 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

(7) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k$,

那么$\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$(等比定理)。

証: $\because$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k$,

$\therefore$ $a=bk$, $c=dk$ $e=fk\cdots$,

就有 $a+c+e\cdots=bk+dk+fk+\cdots$

根据乘法分配律就有 $a+c+e=k(b+d+f+\cdots)$.

$$\therefore\ \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{k(b+d+f+\cdots)}{b+d+f+\cdots}=k.$$

例 1. $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}+\frac{3}{6}=\cdots=0.5,$

$$\frac{1+2+3+\cdots}{2+4+6+\cdots}=\frac{1+2+3+\cdots}{2(1+2+3+\cdots)}=\frac{1}{2}=0.5.$$

例 2. 証明高相等的两个三角形的面积的比等于底的比。

証： 如图 9-2, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，

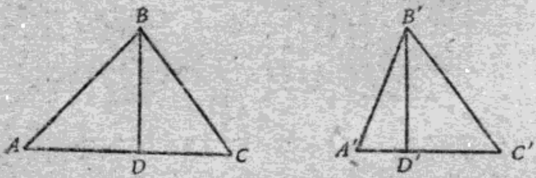


图 9-2

$BD\perp AC$, $B'D'\perp A'C'$, $BD=B'D'$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$, $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'C'\cdot BD$,

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}ACBD}{\frac{1}{2}A'C'B'D'},\ \text{因}\ BD=B'D',$$

就有 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{AC}{A'C'}$.

例 3. 如果 a、b、c、d 是四条綫段。它們的長

① $a=24$ 分米, $b=8$ 分米, $c=36$ 分米, $d=12$ 分米;

② $a=75$ 厘米, $b=21$ 厘米, $c=3$ 厘米, $d=10$ 厘米;

判定 a、b、c、d 是否成比例。

解：① 因 $ad=24\times12=288$,

$bc=8\times36=288$,

$\therefore$ $ad=bc$，故 a、b、c、d 成比例，卽

$a:b=c:d$.

② 因 $ad=7\times10=70$,

$bc=21\times3=63$,

$ad\neq bc$，$\therefore$ a、b、c、d 不成比例。

或者 因 $\frac{a}{b}=\frac{7}{21}=\frac{1}{7}$,

$\frac{c}{d}=\frac{3}{10}$, $\frac{1}{7}\neq\frac{3}{10}$,

卽 $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$，$\therefore$ a、b、c、d 不成比例。

例 4. 在綫段 a、b、c、d 中，有 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

如果 $a=7$, $b=5$, $c+d=10$, 求 d。

解：按合比定理有 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

令 $a=7$, $b=5$, $c+d=10$ 代入上式中，

$$\frac{7+5}{5}=\frac{10}{x},\ \therefore x=\frac{10\times5}{12}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6},$$

卽 $d=4\frac{1}{6}$.

例 5. 把下列各式改写成比例。

① $xy=KL$; ② $b^2=ac$.

解：① $xy=KL$,

按两内項之积＝两外項之积，有

$K:x=y:L$.

② $b^2=ac$, 因 $b^2=b\cdot b$,

$\therefore$得 $a:b=b:c.$

象二，三項相等的比例中，我們叫二，三項(b)是一，四項(ac)的比例中項。如 $2:4=4:8$, 4 是 2 与 8 的比例中項。

例 6. 已知綫段 DB 和 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 AC 分别相交于 D、E 两点，并且$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，求証$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

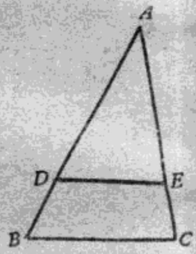


图 9-3

証：$\because$ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，根据比例的性質有，

$\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$(反比定理)。

再根据合比定理就有，

$\frac{DB+AD}{AD}=\frac{EC+AE}{EC}$，即$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

例 7. $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{4}{5}$. 如果 $\triangle ABC$ 的周长为 18 厘米，求 $\triangle A'B'C'$ 的周长。

解：因 $\triangle ABC$ 的周长$=AB+BC+AC=18$ 厘米，

$\triangle A'B'C'$ 的周长$=A'B'+B'C'+A'C'$，

根据等比定理有$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'}=\frac{4}{5}$，即$\frac{\triangle ABC\text{ 的周长}}{\triangle A'B'C'\text{ 的周长}}=\frac{4}{5}$。$\frac{18}{x}=\frac{4}{5}$，$\therefore$ $x=\frac{18\times5}{4}=22.5$.

答 $\triangle A'B'C'$ 的周长为 22.5 厘米。

习題三十五

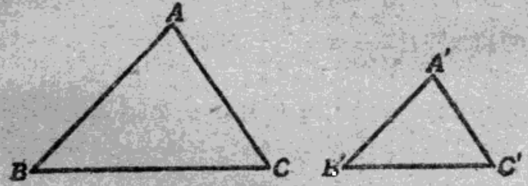
1. 举出把图形放大或者縮小的实际例子。

2. 画$\triangle ABC$，使$AB=15$厘米，$BC=18$ 厘米，$CA=10$ 厘米，延长 AB 到 D，使 $BD=30$ 厘米，从D作 $DE\parallel BC$，交 AC 的延长綫于 E，量 DE 和

AE 的长，并且計算下列各比：

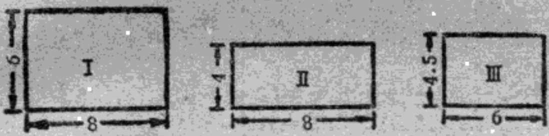
(1) $\frac{AD}{AB}$.$\frac{AE}{AC}$.$\frac{DE}{BC}$;　　　　(2) $\frac{AB}{BD}$.$\frac{AC}{CE}$.

3. 量图中两个三角形的各边和各角，并且計算 $\frac{AB}{A'B'}$，$\frac{AC}{A'C'}$ 和 $\frac{BC}{B'C'}$。



（第 3 題）

4. 下面三个矩形中，哪两个的长和寬成比例？



（第 4 題）

5. (1) 塔高 9 米，影长 6 米。同时竿高 6 分米，影长 4 分米。物高和影长是不是成比例的綫段？

(2) 举出一些成比例綫段的例子。

6. 証明：底相等的三角形，其面积的比等于高的比。

7. 如果 a、b、c、d 是四条綫段，它們的长度如下：

(1) $a=12$ 厘米，$b=8$ 厘米，$c=15$ 厘米，$d=10$ 厘米；

(2) $a=7$ 米，$b=14$ 米，$c=19.6$ 米，$d=5$ 米；

(3) $a=5$ 米，$d=2$ 米，$c=7$ 米，$d=3$ 米；

(4) $a=1.2$ 米，$b=4$ 分米，$c=9$ 分米，$d=0.3$ 米；

判定 a、b、c、d 是不是成比例的綫段。

8. 在綫段 a、b、c、d 中，已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

(1) $a=7$ 厘米，$b=4$ 厘米，$d=11$ 厘米，求 c；

(2) $a=5$ 分米, $b=2.6$ 分米, $c-d=6$ 分米, 求 d.

(3) $a:b=5:3$, $c=2\frac{2}{3}$米, 求 d.

9. 把下列各式改写成比例:

(1) $pq=m\cdot n$;

(2) $a^2=bc$;

(3) $x=\frac{bc}{a}$.

10. 在$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$中, 如果 $a=c$, 試証明 $b=d$.

11. 已知綫段 DZ和$\triangle ABC$ 的两边 AB 和 AC 分别相交于 D、E 两点, 并且$\frac{AD}{DB}=\frac{AZ}{ZC}$。求証$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{ZC}$.

12. 在第 11 題中, 如果$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AZ}=\frac{BC}{DZ}=\frac{3}{2}$, 并且 $\triangle ABC$ 的周长为 6 厘米, 求$\triangle ADE$ 的周长。

13. (1) 求 9 与 16 的比例中項;

(2) 若 $4:x=x:9$, 求 x.

§94 平行綫截得比例綫段的定理

这一节我們是研究平行綫截得比例綫段的定理。如果一組平行綫在直綫 AB 上截得 EF、FG 分别含有 3 个和 2 个相等綫段 (图 9-4), 那么在其他任何一条直綫 CD 上所截得的 LM、MN 也分别含有 3 个和 2 个相等綫段。因此 $EF:FG=LM:MN$ (都等于 3:2)。这样我們可以得到下面的定理:

三条平行綫截两条直綫, 截得的綫段成比例。

如图 9-4 这条定理, 我們很容易从第七章 § 86 的定理来証明。如果在 FG 上不是恰好截得 2 个相等的綫段, 而是两个多一些(例如 2.6), 那么, 我們就观察一下图 9-5。只要把 EF 和 FG 上的每一等分分为十个等分, 过各分点作平行綫, 就可以看到 $EF:FG$ 仍等于 $LM:MN$(都等于 30:26, 即 3:2.6)。

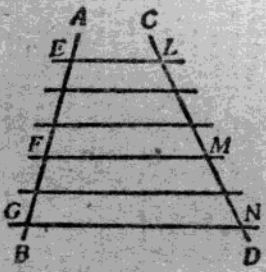


图 9-4

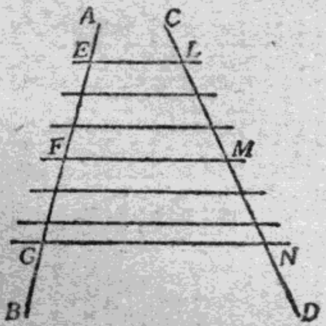


图 9-5

一角的两边 AB 和 AC 被两条平行綫 DE、BC 所截（图 9-6)，就可以看成是上面定理的一种特殊情况(看作是过頂点 A 再作一条平行綫)。$\therefore AD:DB=AE:EC.$

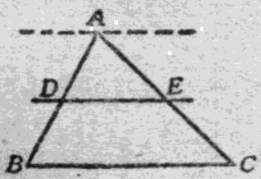


图 9-6

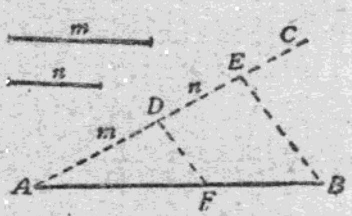


图 9-7

例 1. 把綫段 AB 分为两部分，使它的比等于 $m:n$.

画法: 过 A 点任意引一条射綫 AC(图 9-7)。在 AC 上截 $AD=m$, $DE=n$, 然后連結 EB, 过 D 画 $DF \parallel EB$, 交 AB 得 F 点，那么 F 点就将 AB 分为两部分，并且 $AF:FB=m:n$.

証: 因 $DF \parallel EB$, 且 $AD:DE=m:n$,

根据上述定理 $AD:DE=AF:FB$,

$\therefore \quad AF:FB=m:n.$

例 2. 已知 a、b、c 三条綫段。画一条綫段 x, 使 $a:b=c:x$.

画法: 过 A 点画射綫 AB、AC(图 9-8)。在 AB 上取 $AD=a$, $DE=b$, 又在 AC 上取 $AF=c$, 連 DF, 然后过 E 点画 $EG \parallel DF$,

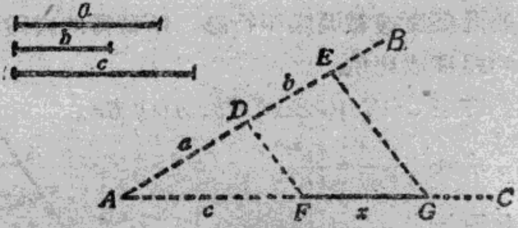


图 9-8

交 AC 于 G, FG 就是所要画的第四比例綫段 x(若比例綫段 $a:b=c:d$, 則 a 叫第一比例綫段, b 叫第二比例綫段, c 叫第三比例綫段, d 叫第四比例綫段)。

§95 相交的两条直綫截两条平行綫的定理

相交于 A 点的两条直綫, 截两条平行綫于 B、D 和 C、E, 那么, $BC:DE=AB:AD$.

在图 9-9 中, 过 D 点画 $DF \parallel AC$, 根据平行綫截得比例綫段的定理得:

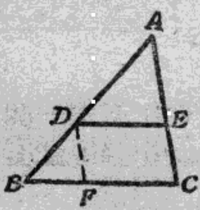


图 9-9

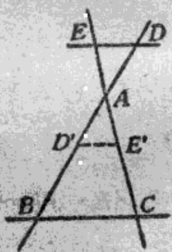


图 9-10

$\frac{BF}{FC}=\frac{BD}{DA}$, 应用合比定理可得 $\frac{BC}{FC}=\frac{AB}{AD}$. 因 $FC=DE$, 就是 $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$.

若两条平行綫不在两相交直綫交点 A 的同侧, 如图 9-10,

就只要在 AB 和 AC（或它們的延長綫）上，分別取 $AD'=AD$、$AE'=AE$，連結 DE，就可以得到同样的結果。所以，

相交的两条直綫截两条平行綫，所截得的綫段和从交点到相应截点的距离成比例。

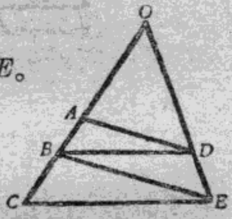


图 9-11

例 3. 在 $\triangle OCE$ 中，$BD \parallel CE$，$AD \parallel BE$。

求証 $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OB}{OC}$

証：如图 9-11，

$\because\ BD \parallel CE$，$\therefore\ \dfrac{OB}{BC}=\dfrac{OD}{DE}$

据反比定理及合比定理有，$\dfrac{BC}{OB}=\dfrac{DE}{OD}$，$\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{OE}{OD}$，即 $\dfrac{OB}{OC}=\dfrac{OD}{OE}$。

$\because\ AD \parallel BE$，$\therefore\ \dfrac{OA}{AB}=\dfrac{OD}{DE}$

据反比定理及合比定理有 $\dfrac{AB}{OA}=\dfrac{DE}{OD}$，$\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{OE}{OD}$，即 $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OD}{OE}$。

$\therefore\ \dfrac{OA}{DB}=\dfrac{OD}{OE}=\dfrac{OB}{OC}$，$\therefore\ \dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OB}{OC}$

例 4. 在 $\angle A$ 的一边上有 B 和 C 两点，在另一边上有 D 和 E 两点，如果 $AB=5$ 厘米，$BC=6$ 厘米，$AE=4.4$ 厘米，$DE=2.4$ 厘米，問 BD、CE 是否平行？

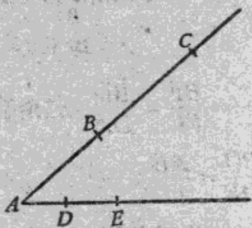


图 9-12

解：如图 9-12，因 $AB=5$，$BC=6$，

$\therefore\ \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{5}{6}$

因 $DE=2.4$，$AE=4.4$，$\therefore AD=2$.

$\therefore\ \dfrac{AD}{DE}=\dfrac{2}{2.4}=\dfrac{20}{24}=\dfrac{5}{6}$.