高等学校教学用書

数学分析教程

第二卷 第一分册

M. K. 格列本卡
C. И. 諾渥舍諾夫 著

高等教育出版社

高等學校教學用書

數學分析教程

第二卷 第一分册

M. K. 格列本卡 C. И. 諾渥舍諾夫著
楊從仁 郝 壽 李文琦譯

高等教育出版社

本書係根據蘇俄教育部教育出版社(Учпедгиз)出版的格列本卡(М. К. Гребенча)、諾渥舍諾夫(С. И. Новоселов)合著"數學分析教程"卷二(Курс математического анализа Том 2)1953年第二版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲師範學院數理系教學參考書，本書專供師範學院數理系一年級及二年級兩年一貫制數學分析教材或作高等數學課程的參考。

本書卷二中譯本分二個分册出版。第一分册內容爲歐幾里得空間的點集合、多變數函數、多變數函數的微分法、隱函數寫像、常數項級數、函數級數等六章。

本册係由天津師範學院數學系楊從仁、郝壽、李文琦三人合譯。

数 学 分 析 教 程

第二卷 第一分册

М. К. 格列本卡，С. И. 諾渥舍諾夫著

楊从仁 郝 寿 李文琦譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号13010·69 開本850×1168 1/32 印張11 1/16 字數297,000 印數12,001—14,000

1955年8月第1版 1958年7月北京第5次印刷 定價(8)¥1.30

序　言

當編寫"數學分析教程"第二卷時,著者們以師範學院的教學大綱爲根據並考慮到未來的數學教師的需要。爲了上述原因,我們力求將教程中基本的,原則上甚重要的問題敍述得清楚明晰,但不擬用完備的近代分析教程中的細節使敍述變得繁瑣。本書中一些定理和證明不是以最一般的形式給出的,但著者們總是盡力精確地預先說明在證明過程中所用到的條件。同時著者們也盡力選擇這樣的證明方法,通過這些證明方法,可使一切可能的推廣變得非常明顯,而在最重要的情形,盡量指出來這些推廣的途徑。

在本書中,著者們保持了在本教程第一卷第二版中所採用的敍述風格。著者們深信現今俄文教科書所特具的在敍述上有嚴格的系統性和盡可能簡潔是恰當的。爲了這種原因,著者們力求避免那種以"預備知識的插筆"及"與讀者談話"爲特徵的小說形式的敍述,這種形式的敍述(著者們相信)對於供教學用的教本是完全不適當的。

在本書藍本剛剛結束時,著者之一,米哈依爾·庫茲米奇·格列本卡教授的早亡(1948年6月21日),中斷了我們多年來共同的工作。

藉這個機會我特向以下諸學者致深厚的謝意:恩·阿·列得涅夫,阿·斯·庫班科,蒲·伊·羅曼諾夫斯基,蒲·斯·莫傑諾夫,布·吾·庫圖佐夫,他們對本書曾提出許多寶貴的意見和指示。我懷着深切的感激的心情提起已故的蘇聯科學院通訊院士維·維·斯捷潘諾夫教授,他曾對本書的編著給著者們巨大的協助。我深深感謝恩·阿·梅得亮諾夫斯基,他爲了本書進行了複

雜的製圖工作，以及科·斯·塞礎果娃，她曾對本書的抄稿工作和校對工作給與幫助。

莫斯科，1952年12月25日

斯·諾渥舍諾夫

目　　錄

第一章　歐幾里得空間的點集合

§ 1. 緒論

在一系列理論性的以及實用性的問題裏常常碰到一些量，這些量的數值，在給出了其他幾個量的數值後，就可決定。例如：

1）作等速運動的物體所通過的路程

$$s=v\cdot t$$

是由物體運動的速度 v 和所經過的時間 t 來確定。

2）動能

$$w=\frac{m\cdot v^2}{2}$$

是由運動的物體的質量和速度來確定的。

3）長方體的體積

$$V=a\cdot b\cdot c$$

是由它的各邊長度 a, b 和 c 來確定的。

從物理學、工程技術學、力學和數學裏可以隨意地找到許多相類似的例子。所有這些例子可以用一個共同的原理來概括：確定某些量的一組實數，對應於一個實數，此實數確定所考查的量的數值。這就表明，有必要把函數的概念擴充到確定函數值的變數是一組實數的情形。

§ 2. 歐幾里得平面和歐幾里得空間

試討論按一定次序給出的實數對(a, b)。如我們知道，任意一個實數對可以使之對應於坐標平面上以a爲橫坐標，以b爲縱坐標的一點；反之，對於平面上的每一點，都有一對實數，即此點的橫坐標和縱坐標，與之對應。這就給了我們應用幾何學術語的可能性，也就是說：對於有序的數對(a, b)和表示它的點可採用公共的術語——“平面的點”。

對於平面上的每兩個點(即，兩個數對)$A_1(a_1, b_1)$和$A_2(a_2, b_2)$可以令實數

$$\rho(A_1, A_2)=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2} \qquad (\rho)$$

與之對應，這個實數叫做兩點間的距離。若代表已知數對的平面點，是某線段的兩端點，則其長度就用上述實數來計量。設有點(即數對)(x, y)的集合，其中兩點間的距離按照公式(ρ)來確定，則所有這些點的集合就叫做二維歐幾里得(算術)空間。用幾何的解釋，對於二維算術空間有坐標平面上所有點的集合與之對應。

每一個以實數對作元素的集合可以藉坐標平面上對應點的集合來作幾何的表示；反之，對於坐標平面上的點集合有實數對的集合與之對應。因此，對於兩個對應的集合經常採用同一個公共的幾何術語。例如，對於滿足方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

的數對$X(x, y)$的集合和對於對應的幾何的像可以採用公共的術語“圓周”來代表。同樣，滿足不等式

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2$$

的數對(x, y)的集合叫做圓面。滿足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad c\leqslant y\leqslant d$$

的數對的集合叫做矩形。

此外，所謂點 $A(a,b)$ 的 r-近傍是指滿足不等式

$$\rho(X,A)<r \text{ 或 } (x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

的所有的點 $X(x,y)$ 的集合。

在幾何學上，r-近傍可用位於以 A 爲中心，r 爲半徑的圓內的點的集合來代表。從圓的幾何性質，就可以得出下述的事實：平面上的近傍也具有近傍的三個基本性質（卷 I § 15）。近傍的基本性質的正確性可以不用幾何的解釋而僅由算術方法來確定（參考 § 3）。

如我們知道，實數組 (a, b, c) 和坐標空間中的點之間能建立一一對應的關係，由這樣的對應關係，對於有確定次序的實數組 (a,b,c)，有空間中以 a 爲橫坐標，以 b 爲縱坐標，以 c 爲直坐標的一點與之對應。設有某實數組 (a,b,c) 的集合，其中兩點 $A_1(a_1,b_1,c_1)$ 和 $A_2(a_2,b_2,c_2)$ 間的距離由公式

$$\rho(A_1,A_2)=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

來確定，則這集合就叫做三維歐幾里得（算術）空間。

歐幾里得算術空間的點集合和幾何空間的對應點的集合常用同一個幾何術語來代表。例如，滿足方程式

$$x^2+y^2+z^2=r^2; \qquad Ax+By+Cz+D=0;$$

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

的實數組 $X(x,y,z)$ 的集合依次叫做球面，平面，直線。

在算術空間中，點 $A(a,b,c)$ 的 r-近傍是由滿足不等式

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<r$$

的所有點 $X(x,y,z)$ 的集合來確定的。

用幾何來解釋，這就是以已知點作中心，以 r 作半徑的球的內部。

§ 3. n 維歐幾里得空間

定義 1° 一組按一定次序給出的 n 個實數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 叫做 n 維空間的點 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。實數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 叫做 A 點的坐標。

2° n 維空間的兩點 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 叫做相等,即 $A=B$, 當而且僅當這兩點的對應的坐標相等的時候:

$$a_1=b_1; \quad a_2=b_2; \quad \cdots; \quad a_n=b_n;$$

在相反的情形下,我們就認爲 A 點和 B 點不相等: $A \neq B$。

3° n 維空間的所有點的集合叫做 n 維歐幾里得空間, 假如其中兩點間的距離是按照下述的方法確定的: 實數

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$

叫做兩點 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 間的距離。

這個實數常表示爲:

$$\rho(A, B)=\sqrt{\sum(a_i-b_i)^2}. \tag{1}$$

n 維歐幾里得空間常用符號 E_n 來代表。

歐幾里得空間的特殊形式, 我們在前面已討論過; 例如, 當 $n=1$ 時,空間 E_1 就是所有實數的集合,其中 a, b 兩點間的距離是

$$\sqrt{(b-a)^2}=|b-a|.$$

用幾何的解释, 空間 E_1 可以看做數軸上所有點的集合。由於研究單變數函數(卷 I, § 2, 3, 15, 16)我們曾討論過空間 E_1。空間 E_2 和 E_3 以及對應的幾何解釋在上節裏也討論過。但當 $n>3$ 時,空間 E_n 就不能使人產生直覺的概念。

假若某一點 A, 除它的第 i 個坐標可能不等於零外,所有其餘的坐標都等於零時:

$$a_1=a_2=\cdots=a_{i-1}=a_{i+1}=\cdots=a_n=0,$$

我們就說，點 A 位於坐標軸 OX_i 上。位於坐標軸 OX_i 上所有點的集合叫做 OX_i 軸。所有的坐標都等於零的點 $O(0, 0, \cdots, 0)$ 叫做坐標的原點。顯然，坐標的原點屬於每一個坐標軸。

一些有關任意維空間 E_n 的普遍的命題只能由算術的方法來建立。特別，這些命題對於空間 E_1, E_2 和 E_3 是適用的，並且，在這時候才有直覺的幾何解釋。

空間 E_n 中兩點 A 和 B 之間的距離 $\rho(A, B)$ 具有下述的性質:

I $_\rho$. $\rho(A, B)\geqslant 0$。事實上，根據定義

$$\rho(A, B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}\geqslant 0;$$

當而且僅當 A 點和 B 點重合的時候，才有 $\rho(A, B)=0$。事實上，若 $\rho(A, B)=0$，則

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2=0,$$

而上式僅在 $a_1=b_1$; $a_2=b_2$; $\cdots$; $a_n=b_n$ 的時候才能成立。反之，若 $A=B$，則 $a_i=b_i$，因而 $\rho(A, B)=0$。

II $_\rho$. $\rho(A, B)=\rho(B, A)$（對稱性質）是從距離的定義推出來的。

III $_\rho$. 不論 A, B 和 C 是怎樣的三點，

$$\rho(A, C)\leqslant\rho(A, B)+\rho(B, C)\text{（三角形不等式）}$$

證明。設

$$A(a_1, a_2, \cdots, a_n),\ B(b_1, b_2, \cdots, b_n),\ C(c_1, c_2, \cdots c_n)$$

爲已知三點；於是

$$\sum(a_i-c_i)^2=\sum[(a_i-b_i)+(b_i-c_i)]^2=$$

$$=\sum(a_i-b_i)^2+2\sum(a_i-b_i)(b_i-c_i)+\sum(b_i-c_i)^2.$$

由布僚可夫斯基不等式①

---

① 不等式

$$(p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n)^2\leqslant(p_1^2+p_2^2+\cdots+p_n^2)(q_1^2+q_2^2+\cdots q_n^2)$$

$$[\sum(a_i-b_i)(b_i-c_i)]^2\leqslant\sum(a_i-b_i)^2\cdot\sum(b_i-c_i)^2$$

就得到

$$\sum(a_i-c_i)^2\leqslant\sum(a_i-b_i)^2+2\sqrt{\sum(a_i-b_i)^2\cdot\sum(b_i-c_i)^2}+$$
$$+\sum(b_i-c_i)^2,$$

這就是說

$$\rho^2(A,C)\leqslant\rho^2(A,B)+2\rho(A,B)\rho(B,C)+\rho^2(B,C),$$

也就是說 $\rho(A,C)\leqslant\rho(A,B)+\rho(B,C)$.

當 $n=1,2,3$ 時，距離的性質有下述的幾何解釋：

I_ρ.（直線上，平面上或空間的）兩點之間的距離不是負的，在 $A\neq B$ 的情形下，它等於線段 AB 的長度。

II_ρ. 計算從 A 點到 B 點的距離，或從計算 B 點到 A 點的距離，兩者是沒有區別的。

III_ρ. 條件 $\rho(A,C)\leqslant\rho(A,B)+\rho(B,C)$ 表示了三角形的性質：邊 AC 的長度不大於另外兩邊的長度的和 $AB+BC$。僅在三角形退縮為直線段且 B 點位於 A 點和 C 點之間的時候（圖1），在上式中才用到等號。

叫做布僚可夫斯基不等式。

這個不等式對於任意的實數

$$p_1,p_2,\cdots,p_n \text{ 和 } q_1,q_2,\cdots,q_n$$

都成立。

證明。讓我們討論 x 的二次三項式

$$f(x)=(p_1-xq_1)^2+(p_2-xq_2)^2+\cdots+(p_n-xq_n)^2=$$
$$=(q_1^2+q_2^2+\cdots+q_n^2)x^2-2(p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n)x+(p_1^2+p_2^2+\cdots+p_n^2).$$

因為 $f(x)\geqslant0$，三項式的判別式就不能是正數；這就是說，

$$(p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n)^2-(p_1^2+p_2^2+\cdots+p_n^2)(q_1^2+q_2^2+\cdots+q_n^2)\leqslant0,$$

也就是說 $(\Sigma p_iq_i)^2\leqslant\Sigma p_i\cdot\Sigma q_i$.

布僚可夫斯基不等式變為等式，當而且僅當判別式等於零的時候，也就是三項式有重根的時候。但 $f(x)$ 變為零，僅在每一括弧都分別等於零，即 $p_i-xq_i=0$ 的時候；也就是說

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\cdots=\frac{p_n}{q_n}.$$

因此，布僚可夫斯基不等式變為等式，僅在 q_i 和 p_i 成比例的時候。

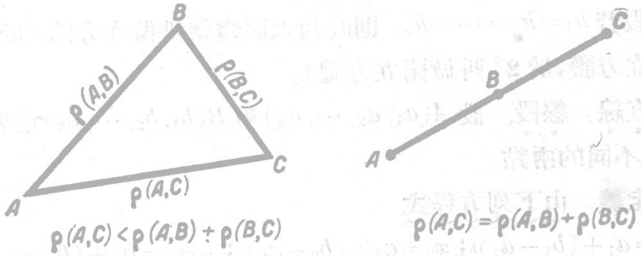

圖 1.

§ 4. 最簡單的 n 維空間 E_n 的點集合

球,球體,球面。

定義 與點 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的距離小於 r 的所有點 $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合叫做以 A 爲中心,以 r 爲半徑的 n 維球:

$$\rho(X, A) < r \text{ 或 } \sum (x_i - a_i)^2 < r^2.$$

與點 A 的距離等於 r 的所有點的集合叫做已知球的球面:

$$\rho(X, A) = r \text{ 或 } \sum (x_i - a_i)^2 = r^2.$$

屬於球及其球面的所有點的集合叫做 n 維球體:

$$\rho(X, A) \leqslant r \text{ 或 } \sum (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2.$$

直角六面體。

定義 1° 滿足下列一組不等式

$$|x_1 - a_1| < h_1; \quad |x_2 - a_2| < h_2; \cdots; |x_n - a_n| < h_n$$

的所有點 $X(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 的集合叫做以點 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 爲中心,以 $2h_1, 2h_2, \cdots, 2h_n$ 爲邊長的 n 維開直角六面體。

2° 滿足下列一組不等式

$$|x_i - a_i| \leqslant h_i (i = 1, 2, \cdots n)$$

的空間 E_n 的所有點集合叫做以 $A(a_1, a_2, \cdots a_n)$ 爲中心, 以 $2h_1$,

$2h_2, \cdots 2h_n$, 爲邊長的閉直角六面體。

假若 $h_1 = h_2 = \cdots = h_n$, 則直角六面體就叫做立方體（於 1° 叫做開立方體，於 2° 叫做閉立方體）。

直線，線段。設 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 代表空間 E_n 中不同的兩點。

定義 由下列方程式

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t;\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t;\ \cdots x_n = a_n + (b_n - a_n)t$$

所確定的所有點 $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合（式中 t 爲任意實數）叫做過 A 和 B 兩點的直線。

顯然，A 點和 B 點屬於這一條直線，因爲當 $t=0$ 時，$x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \cdots, x_n = a_n$; $t=1$ 時 $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \cdots, x_n = b_n$.

特別，在 $n=2 (n=3)$ 的情況下，我們得到平面上（空間中）直線的參變數表示式

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t,$$

$$x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t, \ (x_3 = a_3 + (b_3 - a_3)t \ n=3 \text{ 時}).$$

消去參變數 t, 我們又得到過 A 和 B 的直線的兩點式：

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

定義 由下列方程式

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t, x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t, \cdots, x_n = a_n + (b_n - a_n)t$$

所確定的所有點 $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合（式中 $0 \leqslant t \leqslant 1$）叫做端點爲 A 和 B 的線段。

和 $0 \leqslant t < +\infty$ 對應的部分直線叫做射線 AB。

假若 A, B 兩點按照一定的次序給出，換句話說，就是以二者中的一個作爲線段的起點，而另一個作爲線段的終點，則這一線段叫做 n 維空間的向量。以 A 爲起點，B 爲終點的向量用記號 $\overline{AB}$ 來代表。實數 $\rho(A, B)$ 叫做向量的長度。諸實數 $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$,

$\cdots, b_n-a_n$(仿照幾何向量)叫做向量在坐標軸上的射影。因爲

$$|b_i-a_i|\leqslant\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2},$$

即 $|b_i-a_i|\leqslant\rho(A,B)$，於是，$n$ 維向量在 Ox_i 軸上射影長度的絕對值不大於向量本身的長度。

比值

$$\alpha_1=\frac{b_1-a_1}{\rho(A,B)};\quad \alpha_2=\frac{b_2-a_2}{\rho(A,B)};\quad \cdots;\quad \alpha_n=\frac{b_n-a_n}{\rho(A,B)}$$

叫做向量 $\overline{AB}$(射線 AB)的方向餘弦。

不難看出，$b_1=a_1+\rho\alpha_1,\ b_2=a_2+\rho\alpha_2, \cdots,\ b_n=a_n+\rho\alpha_n$，以及 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2=1$.

諾當曲線　同時定義在數集合 $\mathfrak{M}_t$ 上的函數組

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ \cdots,\ x_n=x_n(t) \tag{1}$$

確定一個寫像。在這寫像中，對於每一個值 $t\in\mathfrak{M}_t$，有空間 E_n 的一點(t 的像)$X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$與之對應，而點的集合(像)$\mathfrak{M}_X$ 就與集合 $\mathfrak{M}_t$ 對應。

定義　假如空間 E_n 中的點集合 $\mathfrak{M}_X$ 是利用在線段 $a\leqslant t\leqslant b$ 上連續的函數組(1)把這線段 $a\leqslant t\leqslant b$ 寫像的結果而得到的，並且對於兩個不同的參變數值 t，集合 $\mathfrak{M}_X$ 中有兩個不同的點與之對應，$\mathfrak{M}_X$ 就叫做諾當簡單弧。

假若遵守其他的一切條件，線段 $[a, b]$ 兩端點的像又重合時，則我們就叫這曲線爲簡單閉曲線。

我們可以把簡單弧看做線段的一一對應的連續的像；把簡單閉曲線看做圓周的一一對應的連續的像。

例

1. 聯接 A, B 兩點的線段是一個簡單弧。
2. 點(t, t^2, t^3, t^4)的集合(其中 $0\leqslant t\leqslant 1$)是一個簡單弧。

34551