

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

解 析 幾 何

С. П. ФИННКОВ 著
葉述武等譯



商 務 印 書 館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



何 幾 析 解

C. H. 芬尼可夫著
葉 述 武 等 譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯教育出版社(Учпедгиз)出版的芬尼可夫(С. П. Фиников)著“解析幾何”(Аналитическая геометрия)1932年第二版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為師範學院教學參考書。

解 析 幾 何

葉述武等譯

★版權所有★

商務印書館出版

上海河南中路二一四號

中國圖書發行公司 總經售

商務印書館上海廠印刷

(52421·1)

1953年12月初版 版面字數303,000

印數1—7,000 定價¥17,500

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

中央人民政府高等教育部推薦 高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是真正科學的和密切聯繫實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認真地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

第 二 版 序

在第二版中，爲了減去多餘的材料，圖形的度量性質放在直角坐標系裏去講。

爲使利用帶有一致的(啞的)指標的一項來記和數這種寫法不異於常用者，因此特別把一點的齊次坐標的指標升高到上面。

爲了在個別情況下修改或作不重要的補充起見，採納了俄羅斯蘇維埃聯邦社會主義共和國教育部學術委員會數學組的教科書討論會上所提出的意見：

1. 向量是作爲物理量而引入。
2. 在引入複比時強調它與點的正規化無關。
3. 在向量相乘的定義中，向量積之引入先於三向量的數性積。
4. 解析點的平直相關的幾何意義要從坐標矩陣的秩的考究中引

出。

5. 引入了第三類自極四面角的概念(小型字體的)來包括所有這四面角。

6. 引入了複點及複投射空間的概念(小型字體的)。

芬尼可夫

第 一 版 序

這一本教程是根據最近四年來我在莫斯科市立師範學院所講的初級教程編成的。

在選擇材料當中有兩種的思想曾經指導着我，第一種思想是關於教程本身的內容方面，解析幾何在它的主要部份包含二階曲線及二階曲面的理論，如果始終停留在歐幾里得空間本義點的範疇之內的話，這

個理論將無法來解說。與其違反數的本性，在涉及漸近線時來說無窮遠點，我覺得就不如系統地利用齊次坐標，來更加簡單地引入廣義的點。

第二種思想就是關於解析幾何的特殊困難性，它的複雜的計算與麻煩的公式的衆多，我個人相信，很大部份這都是由於坐標系的不適當的使用而來。圖形的投射性質應該在關於坐標四面角的投射坐標裏來研究，仿射的性質應該在關於任意不同面的三個向量的仿射坐標系裏來研究，而度量的性質應該在關於直角三面角的卡氏坐標裏來研究，在這個計劃內卡氏斜角坐標系是沒有位置的，我相信，它之所以在解析幾何的教程內仍然能夠保留，只是因為傳統的關係而已。爲着尊重這個傳統，在解析幾何的第一篇裏我保留了一系列的斜角坐標的公式，可是即使略去了它們也不會有任何的害處的。

這本書基本上只包含那些在講壇上所講的材料，然而，由於聽講人及另外一些原因，可能有必要把它精簡一下，所以對於那些可以略去但不致破壞本教程的一般結構而又有着不同價值的項目及問題，我都附以星點，在某些情況下，在星點下的是那些作爲參考的項目，例如愛拉角，它們在基礎的教本裏只有參考的價值的。

最後在這裏我謹對皮列皮爾金教授致以深厚的謝意，他曾經讀完這本書的全部手稿，並且交給我滿滿一冊子的大小意見，其中有些是極其重要的。他又曾告訴我一些關於自極四面角頂點的意見。

芬尼可夫

目 錄

第一篇 平面解析幾何 1

第一章 直線上的幾何學 1

- §1 向量的概念 1
- §2 用數量來乘向量 4
- §3 在直線上的向量 7
- §4 直線上的坐標法 9
- §5 兩點間的距離 10
- §6 分線段成給與的比 11

第二章 平面上坐標法 13

- §1 平面上的向量 13
- §2 在平面上的卡氏坐標及仿射坐標 16
- §3 分線段成給與的比 18
- §4 向量的數性積 19
- §5 兩點間的距離 22
- §6 坐標變換 22
- §7 原點變換 23
- §8 坐標向量的變換 25
- §9 一般的坐標變換 28

第三章 點的幾何軌跡的方程式 29

- §1 方程式的幾何意義 29
- §2 圓的方程式 30
- §3 直線 32
- §4 橢圓 34
- §5 橢圓的典式 37
- §6 按照點作橢圓的圖形 40
- §7 橢圓可視為圓的投影 42
- §8 雙曲線 43
- §9 雙曲線的典式 45
- §10 拋物線 47
- §11 按照點作拋物線的圖形 49

第四章 平面上關於曲線方程式的一般定理 50

§1 祇含一個流動坐標的方程式	50
§2 二曲線的交點	52
§3 坐標變換的不變性	53
§4 平面上曲線的分類	56
§5 曲線的階的幾何意義	57
§6 左端能分解為因式的方程式	58
§7 曲線束	59
§8 極坐標系	61
第五章 一階曲線	62
§1 直線的法線方程式	62
§2 將一般的直線方程式化為法線式	64
§3 有角係數的直線方程式	66
§4 直線方程式的截距式	68
§5 直線方程式的研究	68
§6 按照給與的方程式作直線的圖形	69
§7 點至直線的距離	71
§8 二直線的文角	73
§9 平行的條件	74
§10 垂直的條件	75
§11 按照給與的方向通過給與點的直線方程式	76
§12 通過兩點的直線方程式	77
§13 三點在一直線上的條件	78
§14 二直線的交點	79
第六章 在投射平面上的直線	80
§1 齊次坐標	80
§2 投射平面	81
§3 廣義平面的廣義元素	83
§4 直線方程式的研究	85
§5 二直線的交點	87
§6 通過兩個給與點的直線方程式	88
§7 直線束	90
§8 解析點以及它們的運算法	93
§9 在平面上的投射坐標	95
§10 在廣義平面上的投射坐標	99
第七章 關於二階曲線的一般知識	101
§1 二階曲線的一般方程式	101

§2 五點確定二階曲線	102
§3 二階曲線與直線的交點·切線	103
§4 二階曲線與直線的交點·漸近線	105
§5 二階曲線的廣義點	108
§6 平面的虛點	110
第八章 二階曲線的投射性質	113
§1 直線上四點的複比	113
§2 一線束的四條直線的複比	116
§3 調和四點集	120
§4 關於二階曲線的點的極共軛性	122
§5 極形式	124
§6 極線	126
§7 切線	127
§8 外點和內點的極線	129
§9 一對極共軛的直線	130
§10 極對應的變態	132
§11 判別式 Δ 的秩降低到單位時極對應的變態	135
§12 在廣義平面上二階曲線的變態	136
第九章 二階曲線的仿射性質	137
§1 幾何圖形的投射仿射及度量的性質	137
§2 二階曲線的中心	139
§3 不定中心的二階曲線	142
§4 二階曲線的直徑	142
§5 共軛直徑	144
§6 k 及 k' 二指向有共軛性的條件	146
§7 漸近線	148
§8 按照一對給與的漸近線來作曲線	150
§9* 二階曲線束	161
§10* 一對漸近線的方程式	165
第十章 二階曲線的度量性質	167
§1 主向	167
§2 不定主向的曲線	168
§3 特徵方程式	169
§4 特徵方程式的根的不變性	161
§5 二階曲線的不變式	163
第十一章 二階曲線的典式	165

§1 自極三角形	165
§2 投射坐標的二階曲線的典式	167
§3 在仿射坐標系裏二階曲線的典式	168
§4 在卡氏坐標系裏二階曲線的典式	170
§5 化二階曲線方程式爲典式	172
§6* 不同型的二階曲線的不變性的特徵	174
第十二章 二階曲線的焦點性質	174
§1 直線束的極共軛的正交互應	174
§2 由焦點向曲線所作的虛切線	175
§3 連繫到焦點上去的二階曲線方程式	176
§4 二階曲線的離心率	177
§5 二階曲線焦點的個數	177
§6 有心二階曲線的焦點	178
§7 拋物線的焦點	179
第二篇 空間解析幾何	181
第一章 空間的坐標方法	181
§1 向量的坐標	181
§2 仿射坐標系及卡氏(直角)坐標系	182
§3 兩向量間的角	184
§4 兩點間的距離	185
§5 分一個線段成給定的比	185
§6 三向量的坐向	186
§7 向量積	188
§8 分配性的定理	189
§9 按照頂點的坐標來求三角形的面積	191
§10 三個向量的數性積	192
§11 四面體的體積	195
第二章 坐標變換	196
§1 原點變換	196
§2 坐標向量的變換	197
§3 直角變換的行列式	198
§4* 受拉角	199
§5 仿射坐標變換的不變式	200
第三章 關於點的幾何軌跡的方程式的一般定理	201
§1 點的幾何軌跡的方程式	201

§2 球的方程式	203
§3 兩個坐標間的方程式	204
§4 曲線的方程式	205
§5 曲面的分類	206
§6 曲面的變態	207
§7 曲面束	208
§8 曲面簇	209
第四章 歐氏空間的平面	210
§1 通過給與的點而垂直於給與的向量的平面的方程式	210
§2 平面的法線式	212
§3 把一個平面的方程式導向法線形式	213
§4 從平面到一點的距離	215
§5 平面的截距方程式	217
§6 按照方程式來作平面	217
§7 兩平面間的角	219
§8 通過三個給與點的平面的方程式	221
第五章 歐氏空間的直線	222
§1 直線的方程式	222
§2 通過兩點的直線	224
§3 把直線的方程式組化做典式的形狀	224
§4 兩直線間的角	227
§5 直線及平面間的角	228
§6 直線在平面上的條件	230
§7 通過一點及一線的平面	231
§8 兩直線相交的條件	232
§9* 三向量的二重向量積	232
§10* 拉普拉斯定理	233
§11* 兩交叉直線間的距離	234
§12* 從一點引向一直線的垂線	235
第六章 投射空間	236
§1 一點的齊次坐標	236
§2 投射空間	237
§3 擴大的歐氏空間	237
§4 三個平面的交點	240
§5 四點同在一平面上的條件	242
§6 解析點	243

§7 投射坐標	245
§8 在廣大空間內的投射坐標	246
§9 投射坐標系的變換	247
§10 錐面	248
§11 平面的束及環	249
§12 複投射空間	250
第七章* 空間的投射變換及仿射變換	253
§1 空間的投射變換	253
§2 投射變換的解析表達式	254
§3 投射變換的羣	255
§4 投射幾何	257
§5 仿射變換的羣	259
§6 仿射幾何	261
§7 空間移位的羣	262
第八章 投射空間內二階曲面的一般性質	263
§1 二階曲面的一般方程式	263
§2 曲面與直線的相交	263
§3 曲面與平面的相交	264
§4 曲面上橢圓的、雙曲的及拋物的點	267
第九章 極點及極面的理論	270
§1 一對極共軛的點	270
§2 極形式	272
§3 極面	273
§4 切面	273
§5 極對應的變態	274
§6 判別式的秩等於二的時候極對應的變態	276
§7 判別式的秩等於一的時候極對應的變態	276
第十章 自極四面角	277
§1 平面及直線的極共軛性	277
§2 I 類自極四面角	278
§3 II 類自極四面角	279
§4 III 類自極四面角	280
§5* 錐面的自極四面角	281
第十一章 投射空間內二階曲面的典式	282
§1 二階曲面對於 I 類自極四面角的方程式	282

§2 投射空間二階曲面方程式的典形	282
§3 投射空間內二階曲面的分類	284
§4* 形式的標數	285
§5* 曲面的外點及內點	286
§6* 變態曲面的分類	287
§7* 第二及第三次方的變態	288
§8 投射坐標變換的相對不變式	288

第十二章 二階曲面的仿射理論 291

§1 二階曲面的廣義曲線	291
§2 二階曲面的分類	291
§3 二階曲面的中心	293
§4 中心的坐標	294
§5 不定中心的曲面	295
§6 中心面	296
§7 直徑面	297
§8 直徑面的方程式及給與指向的共軛弦	297
§9 二階曲面的直徑	298
§10 共軛直徑	299
§11 兩指向的共軛性的條件	300
§12 三共軛直徑組	300

第十三章 在仿射空間內二階曲面的典式 301

§1 在仿射幾何內二階有心曲面的典式	301
§2 卡氏斜角坐標系內的二階有心曲面	304
§3 連繫到 II 類自極四面角上去的二階曲面的方程式	306
§4 仿射幾何內拋物面的典式	307
§5 在卡氏斜角坐標系內的拋物面方程式	309
§6 在仿射幾何內變態二階曲面的分類	309
§7 二階曲面的平截痕	311
§8 二階曲面的平行的平截痕	313
§9* 漸近錐面	314
§10* 關於仿射坐標系變換的二階曲面的不變式	315
§11* 直母線	316

第十四章 在歐氏空間內二階曲面的典式 318

§1 特徵方程式	318
§2 特徵方程式的根的不變性	320
§3 關於特徵方程式有三個單根的情況下的存在定理	322

§4 在特徵方程式有兩根相等的情況下的存在定理	325
§5 特徵方程式三根的相等	327
§6 歐氏空間內二階曲面的典式	328
§7 卡氏直角坐標變換的不變式	330
§8 二階曲面方程式的導向典式形狀	332
§9* 曲面自身許可運動的曲面的不變式	334
§10* 二階曲面的不變特徵	336
第十五章 二階曲面的平截痕	339
§1* 任意平面截二階曲面所得的截痕	339
§2 平行於主向的平面交橢圓面所得的截痕	339
§3 單葉雙曲面給平行於主面的平面所截得的截痕	341
§4 兩葉雙曲面給平行於主面的平面所截得的截痕	343
§5 有主向的平面交橢圓拋物面所得的截痕	344
§6 有主向的平面交雙曲拋物面所得的截痕	345
§7* 二階曲面的圓截痕及環點	347
§8* 二階有心曲面的截痕	349
§9* 橢圓拋物面的圓截痕	350

解析幾何

第一篇 平面解析幾何

第一章 直線上的幾何學

爲了決定直線上任意點 M 的位置，可以給出這點到同一直線上任意一定點 O (原點) 的距離。可是不難見到，直線上有兩個與 O 等距離，而且在 O 的兩側的點 M 及 M' (圖 1)：



圖 1

$$OM = OM',$$

因此，直線上一點位置的決定，不祇與 OM 線段的數量有關，而且與它的方向有關。

這種有方向的線段叫做向量。現在再轉回來引入向量的概念。

§1 向量的概念

當研究自然界時所遇到的量，可以分爲兩類。其中一類可以完全用數來決定。例如在物理學中所遇到的物體的質量，物體上一點的溫度，電位或磁位等等就是這樣的量。另一類量彼此間不僅是數值上有不同，而且指向上亦不同(張力，模數)。物理的量中可以作爲這種量的例子的有：力，速度，運動的加速度。前者由一個數來決定的叫做數量，後者叫做向量。幾何的向量可以用有指向的線段 $\overrightarrow{AB}$ 來表示，其中 A 及 B 是空間兩個依一定次序所取的點： A 是向量的始點， B 是向量的終點。線段 AB 的長(本質上是正數)叫做向量的長或模。這就是力，

速度或加速度的大小。直線 $\overrightarrow{AB}$ 與及由 A 至 B 的移動一齊決定向量的指向(力, 速度, 加速度等等)。

由於下列向量相等及向量之和的定義, 可以見到向量概念的內涵。

這意味着, 任何物理的量, 如果能滿足這相等的定義並且能遵照向量相加的規則來決定它的和的, 都可以被承認為向量。

定義 1. 二向量叫做相等

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

當它們適合下列三條件的時候:

(1) 線段 AB 與線段 CD (向量之模) 相等

$$AB = CD,$$

(2) 直線 AB 平行於直線 CD

$$AB \parallel CD,$$

(3) 在這些直線上的向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$, 有相同的指向。

在條件(1)及(2)之下^①, 如果可以移動線 AB , 使始點 A 與始點 C 重合, 而終點 B 與終點 D 重合, 這時, 二向量算是有相同的指向。

推論 1. 二向量中有一向量在空間移動, 但移動時保留着它的長度及方向, 那麼它們的相等不會受到破壞。

因此, 所有的向量的始點, 可以移到坐標軸的原點更準確地來說, 則在所有拿坐標軸原點為始點的向量中, 可以找出一個向量, 等於空間任意已知向量。

以原點為始點的向量 $\overrightarrow{OM}$ 稱為 M 點(向量的終點)的半徑向量, 以一字母 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{M}$ 來表示。 M 向量之長(它的模)以同一個字母來表示, 但用輕體字 M 。

定義 2. 幾個向量之和仍為一向量, 它是從第一向量的始點出發去封閉以這些向量做邊的折線的向量。

例如圖 2 中, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ 三向量之和就是 $\overrightarrow{AD}$ 向量

^① (1)及(2)是譯者為了使原文更加清楚起見而附加的。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

這定義給出了求和的法則：

爲了得到向量的和，要在第一向量的終點作一向量等於第二向量，又在這向量之終點，作一向量等於第三向量等等，那個連結第一向量的始點到最後一向量的終點的向量就是這些向量的和（圖 2）。

這法則對於二向量來說，與平行四邊形法則相同。

推論 2. 二向量的和是以它們爲邊的平行四邊形的對角線。

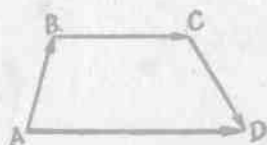


圖 2

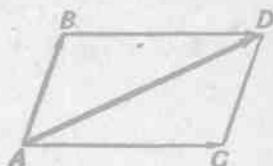


圖 3

實際上，由於平行四邊形之對邊平行而且相等，得到向量的等式（圖 3）

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

這意味着

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

結合定理 若干個向量相加，其中任意兩個向量（或多個）可以它們的和來代替。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}). \quad (2)$$

實際上，如果在折線 ABCD 內，用直線連結 B 和 D（圖 4），則和

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$

很顯然，因爲

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD},$$

故等所求的等式（2）。

這個定理的證明，可以用一系列的相加，即將

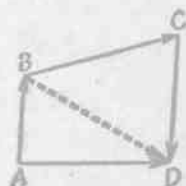


圖 4