数学建模竞赛
辅导教程

邬学军　周　凯　宋军全　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学建模竞赛辅导教程

邬学军　周凯　宋军全　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学建模竞赛辅导教程 / 邬学军，周凯，宋军全编著.
杭州：浙江大学出版社，2009.8
ISBN 978-7-308-06848-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①邬…②周…③宋… Ⅲ. 数学模型—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 094330 号

数学建模竞赛辅导教程

邬学军　周　凯　宋军全 编著

责任编辑	徐素君
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社 （杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028） （网址：http://www.zjupress.com）
排　　版	杭州中大图文设计有限公司
印　　刷	杭州余杭人民印刷有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	14.25
字　　数	340 千
版 印 次	2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-06848-2
定　　价	25.00 元

前　言

本书是为帮助各类本专科院校的大学生参加全国大学生数学建模竞赛而编著的培训用书，是作者在使用多年的培训讲义基础上修订而成．内容包括：数学建模概述；预测类数学模型；评价类数学模型；优化类数学模型；方程类数学模型；概率类数学模型；多元统计分析模型以及如何准备全国大学生数学建模竞赛．它对以往在全国大学生数学建模竞赛以及其他数学建模竞赛中出现过的主要数学模型进行了归纳总结．

贯穿本书的理念是充分体现从"学会"到"会学"的学习过程．各章以涉及的数学方法作为主线进行编排，每一章讨论一种类型的模型．一般先简单介绍这一章所涉及数学方法的基本思想，以应用为原则，不做过多的理论阐述，然后通过各种例子介绍该数学方法的使用，所采用的例子大部分来自各种形式的数学建模竞赛．当然一篇完整的竞赛论文不仅仅只是一种数学方法的使用，所以在本书中一般只是给出该例子的解题思路，它往往也只是一个赛题的部分解，只涉及和这一数学方法相关的内容．而一篇优秀的竞赛论文往往是多种数学方法以及各种工具的综合运用，它是一个团队综合能力的具体展示．

数学模型的知识博大精深，希望通过本书的学习，能够让读者快速了解数学模型、建立数学模型的过程；能够掌握一些基本的数学模型以及建立数学模型的常用方法，并初步学会如何学习以及运用数学模型的方法去解决现实生活中存在的各种各样的实际问题．也希望通过本书的学习，能够对组建培养优秀的大学生团队参加每年一次的全国大学生数学建模竞赛提供有益的帮助．

限于编者水平，不妥之处敬请指正．

编　者

2009 年 5 月

于浙江工业大学理学院

目　　录

第 1 章　数学建模概述

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学，是一种普遍的思维方式，在它产生和发展的历史长河中，它一直是与各种各样的应用问题紧密相关的．培根（F. Bacon）说过："数学是进入各个科学门户的钥匙，如果没有数学知识，就不可能知晓这个世界的一切．"很多科学家也认为：造物主就是数学家，许多理论物理学者更认为他们工作的原材料就是数学．数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性、结论的明确性和体系的完整性，而且在于它应用的广泛性．控制论的创立者维纳（N. Wiener）曾经举过两个例子来说明数学的重要性，一个是氢氧混合燃烧，加氮气会对燃烧产生什么影响；另一个是传染病的传播．而用来描述这两个事物的数学模型是相同的，因此他得出一个结论："数学的优势在于数学抽象能使我们的注意力不再局限于特定的情况，而是关注解决问题的思路、方法和抽象形式的表达，它的一个好处是数学的描述可以毫无偏差地从一个领域应用于另一个领域．"这就是数学的一个重要作用，使人们忽略细枝末节，提炼出最为关键的问题，然后概括成一个数学表达式（数学模型），精确地描述研究结果．

进入 20 世纪以来，随着科学技术的迅速发展和计算机的日益普及，人们对解决各种问题的要求越来越精确，使得数学的应用越来越广泛和深入．特别是在进入 21 世纪的知识经济时代，数学科学的地位发生了巨大的变化，它正在从国家经济和科技的后台走到了前沿．经济发展的全球化、计算机技术的迅猛发展，数学理论与方法的不断扩充使得数学已经成为当代高科技的一个重要组成部分，数学已经成为一种能够普遍实施的技术．培养广大学生应用数学的意识已经成为数学教学的一个重要方面．运用数学工具去解决各种类型的实际问题时，建立数学模型是十分关键的一步．为此我们首先来初步认识何为数学模型、何为数学建模．

§1.1　出入门径——认识数学模型与数学建模

现实问题往往是十分复杂的，人们在长期实践的过程中创造了解决现实问题的模型方法，即摒弃问题中的一些与本质（与你关注）无关或次要的因素，建立一个"模型"．由于模型更加突出了事物的本质，人们通过解决这个模型化的问题来获得有效解决该现实问题的方法和途径．

在现实世界的许多问题中，数、形和模式是起支配作用的，抓住问题的数量、逻辑等本质，经过简化所得的模型就是数学模型．在方法论中，所谓模型是相对原型而言的一个概念．按照《辞海》的解释："原型是指客观存在的对象客体"，也就是所考察的实际对象、

系统或者过程，而“模型是具有与原型相似特点的替代物，是实体、系统或过程的简化、抽象和类比表示”.

数学模型(Mathematical Modeling)并不是新的东西(尽管过去很长时间这一术语用得很少)，可以说有了数学并用数学去解决实际问题时，就一定要用数学的语言、方法来近似地刻画该实际问题，而这种刻画的数学表述就是一个数学模型，其过程就是数学建模的过程.因而欧几里得几何、牛顿和莱布尼兹发明的微积分都是很好的数学模型.解决问题是当一个数学模型表述出来后，就需要运用一定的技术手段(例如推理证明、计算等等)求解该数学问题，并用实际情况来验证，若检验结果偏差过大，就需要修改数学模型并重复上述过程.如果中间有一步完不成，整个数学建模过程就很难完成.大量的计算又往往是建模过程中必不可少的，过去在高性能电子计算机尚未产生之前，正是由于缺乏这一技术手段而在一定程度上限制了数学建模这一强有力方法的应用和发展.当然，由于实际应用的需要，数学建模的活动从未停止过.而计算机(特别是20世纪80年代以来)的出现使数学建模这一方法如虎添翼地得到了飞速的发展，掀起了一个高潮.

什么是数学建模呢？如果一定要下一个定义的话，可以说它是一种数学的思考方法，是“对现实的现象通过心智活动构造出能抓住其重要且有用的特征的表示，常常是形象化的或符号的表示”.从科学、工程、经济、管理等角度看数学建模就是用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学工具.顾名思义，modeling一词在英文中有“塑造艺术”的意思，从而可以理解从不同的侧面、角度去考察问题就会有不尽相同的数学模型，从而数学建模的创造又带有自身的特点.数学模型最重要的特点是要接受实践的检验，数学建模的过程就是多次修改模型使之趋于完善的过程.下面通过三个例子由浅入深让大家明白什么是数学模型与什么是数学建模.

例1.1 测量山高问题

小明站在一个小山丘上，想要测量这个山丘的高度.他站在山边，采取了最原始的方法：从山上向下丢一小石子，5s后他听到了从山下传来的回音.请各位尝试建立数学模型估计山的高度.

解题思路

数学建模的初学者一看到这个问题也许会认为数学建模并不是一件困难的事情，因为很多学生在高中时就遇到过这个问题.确实是这样！这是一个比较简单的实际问题(数学建模问题)，大家很容易得到：

$$H=\frac{1}{2}gt^2=0.5\times 9.8\times 5^2=122.5(\mathrm{m}).$$

运用自由落体公式，可以计算出山的高度.也许有人会提出疑问：上述运算是数学建模吗，这样数学建模不是很简单吗？是的，可以认为这样的运算过程就是数学建模.上述建立的模型可以称为最理想的自由落体模型，因为这是在非常理想化状态下建立的模型，它没有考虑任何其他可能影响测量的因素.数学模型就是一个解决实际问题的方法，上述方法解决了测量山的高度问题.但是在此需要说明一点：数学建模问题与其他数学问题不同，数学建模问题的结果本身没有对错之分，但有优劣之分.建立模型解决问题也许不难，但是需要所建立的数学模型或者结果能够有效地指导实际工作就比较困难了，

这也正是数学建模的难点，也是各类数学建模竞赛考察的主要内容. 下面继续通过这个例子来解释数学模型间的优劣之分.

虽然上述理想的自由落体模型可以计算出山的高度，但计算所得到的结果可能存在较大的误差. 122.5m 山高在高中考试中应该是一个标准答案，不会认为这个答案是错误的. 但是测量队在测量山高时绝对不会采用上述计算得到的结果，因为它可能存在较大的误差，所以它是不能被接受的. 在研究这个问题的同时请各位不要忘记：现在我们在这里研究的不再是一个抽象的理论问题而是具体的实际问题，各位所建立的数学模型得到的结果应该能对实际工作有较强的指导意义，应该尽力使求得的答案贴近事实.

那么在这个问题中我们还需要考虑哪些因素？例如人的反应时间，在现实中这是一个需要考虑的因素. 通过查找资料（查阅资料在数学建模中很重要，也是现代大学生必须具备的基本素质），可以知道人的反应时间约为 0.1s 左右，那么计算式子在结果上能够得到改善.

$$H = \frac{1}{2}gt^2 = 0.5 \times 9.8 \times (5 - 0.1)^2 = 117.649(\mathrm{m}).$$

数学建模竞赛是一种开放性的比赛，竞赛过程中允许查找相关资料来帮助求解. 通过上面的分析可以发现 117.649m 比 122.5m 更加接近实际情况. 相比理想的自由落体模型，以上的数学建模过程可以称为修正的自由落体模型. 对实际而言，修正的自由落体模型比理想的自由落体模型更加优秀，因为得到的结果更加接近实际. 两种模型得到的答案也可以说都是正确的，两种答案都是基于不同的假设前提得到的. 理想自由落体模型假设不考虑人的反应时间，如果你作为数学建模竞赛的评委，相信你会选择修正自由落体模型，因为它得到的答案更加接近实际情况.

一个优秀的队伍往往能够做得更多！在考虑人的反应时间这一因素后，还有没有其他因素需要考虑，例如空气阻力？各位有了大学生的思维外，还有了大学生的手段——微积分. 通过查阅相关资料，可以发现石头所受空气阻力和速度成正比，阻力系数与质量之比为 0.2. 由此我们又可以建立以下微分方程模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{f}{m} = g - \dfrac{k}{m}v, \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

解微分方程得

$$v(t) = \frac{g \times m}{k}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k \times t}{m}}).$$

积分得

$$H = \int_0^{4.9} v(t)\,\mathrm{d}t = 87.05(\mathrm{m}).$$

在竞赛培训中很多学生可能认为自己的数学能力不够好，因此打退堂鼓. 然而他们不知道现在已经有很多数学软件可以帮助他们完成编程任务，这样使得所有专业的学生站在同一起跑线参加竞赛. 如果大家不能够解决上述的微分方程，那么就交给软件去做吧. 上述常微分方程，通过数学软件 MATLAB 的编程计算一点也不困难，仅仅一行代码即可得到答案. MATLAB 的人机交互界面做得很好，大家可以上机训练.

```
Dsolve('Dv=g-b*v','t')
```

数学建模竞赛是一个开放式的竞赛，大家可以借助一切手段（数学软件、图书资料

等）得到你想要的结果.正是因为这一点，可以使所有参赛的学生站在同一起跑线上.整体上来说数学软件 MATLAB 是一个非常庞大的软件，要全部掌握它是很困难的，而数学建模竞赛仅仅用到其中的部分知识.MATLAB 在数学建模中的应用，本书将结合例子做一些讲解.

通过以上计算可以发现，计算结果得到了很大的改善，理想自由落体模型计算方法得到的山高 122.5m 的确存在着较大的误差.如果用心，大家可以做得更好.在实际生活中，回音（声音的传播）是另一个不可忽略的因素.因此我们在上述模型的基础上引入回音传播时间 t_2，对模型进行修改：

$$\begin{cases} H = \int_0^{t_1} v(t)\mathrm{d}t = 340 \times t_2, \\ t_1 + t_2 = 4.9. \end{cases}$$

得：$H=79(\mathrm{m})$.

在这个例题中，先后呈现了四种不同的解题方法，也可以说四种不同的数学模型.希望大家能够通过这个例子体会到数学模型的真谛：能够解决问题的方法就是数学模型，其本身没有对错之分，以上四种模型计算得到的答案应该说都是正确的，但是其本身有优劣之分，问题在于思考的角度.它是一种新的思维方法，从上面的例子可以得到，数学模型往往是以下两个方面的权衡：

1. 数学模型是用以解决实际问题的，所建立的模型不能太理想、太简单，过于理想化的模型往往脱离实际情况，这就违背了建模的目的；

2. 数学建模必须是以能够求解为前提的，建立的模型一定要能够求出解，所建立的模型不能过于实际，过于实际的模型往往难以求解，因此做适当的简化假设是十分重要的.

例 1.2 教室光照问题

现有一间教室长为 15 米，宽为 12 米，在距离地面 2.5 米高的位置均匀地安放 4 个光源，假设横向（纵向）墙壁与光源、光源与光源、光源与墙壁之间的距离是相等的，各个光源的光照强度均为一个单位.要求：

（1）如何计算教室内任意一点处距离地面 1 米处的光照强度？（光源对目标点的光照强度与该光源到目标点距离的平方成反比，与该光源的强度成正比.）

（2）画出距离地面 1 米各个点的光照强度与位置（横纵坐标）之间的函数关系曲面图，同时给出一个近似的函数关系式.

解题思路

假设光源对目标点的光照强度与该光源到目标点距离的平方成反比，并且各个光源的光照强度符合独立作用与叠加原理.在光源点的光照强度为“1”，并且在整个空间中反射情况可以忽略不计.

取地面所在的平面为 xOy 平面，x 轴与教室的宽边平行，y 轴与教室的长边平行，坐标原点在地面的中心，如图 1.1 所示.在空间中任意取一点 i，它的坐标可以表示为 (x_i, y_i, z_i)，那么空间点 i 的光照强度 E_i 应该满足以下公式：

$$E_i = \frac{1}{(x_i-2)^2+(y_i-2.5)^2+(z_i-2.5)^2} + \frac{1}{(x_i-2)^2+(y_i+2.5)^2+(z_i-2.5)^2}$$

$$+\frac{1}{(x_i+2)^2+(y_i-2.5)^2+(z_i-2.5)^2}+\frac{1}{(x_i+2)^2+(y_i+2.5)^2+(z_i-2.5)^2}.$$

将空间点 i 的竖坐标设定为 1，就可以计算距离地面高 1m 处各点的光照强度. 在 MATLAB 计算中都是对离散点进行操作的，因此将距离地面高 1m 处的 12m×15m 的平面离散为网格，每隔 0.25m 取一个点，而点与点之间采用插值算法，可以得到这个平面的光照强度，如图 1.2 所示.

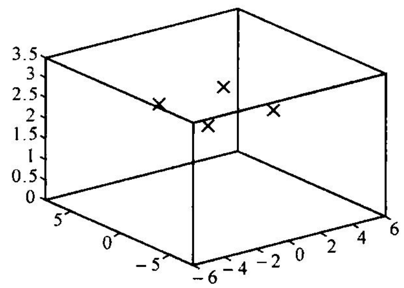

图 1.1　教室坐标示意图

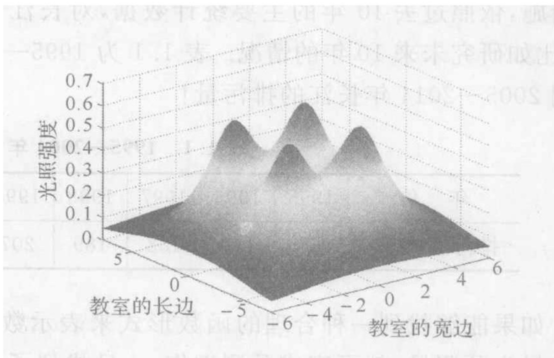

图 1.2　无反射情况下教室光照强度示意图

通过示意图可以发现：在这个距离地面为 1m 的平面中，四个灯下的光照强度是最强的. 上述模型是建立在不考虑墙面反射基础上的. 那么忽略反射的想法是否正确呢？考虑墙面反射对于平面各点光照强度会带来怎样的影响？为方便求解，首先假设墙面反射满足镜面反射原理，这也是最简单的假设. 重新计算可以得到在距离地面为 1m 的平面中各点的光照强度如图 1.3 所示. 对比有无一次镜面反射，平面光照强度的改善情况如图 1.4 所示. 从图中可以发现：墙边附近的光照强度改善最大，墙角和墙边的改善最小，因为墙角和墙边的反射是最少的，这些都与实际情况符合.

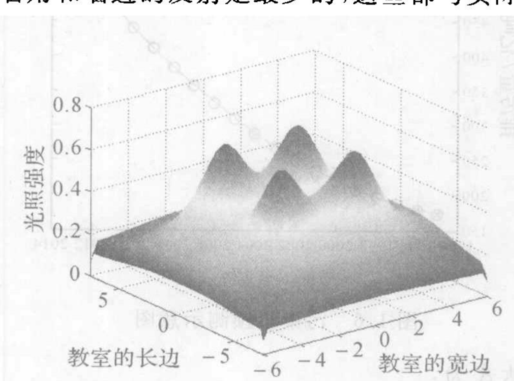

图 1.3　反射情况下教室光照强度示意图

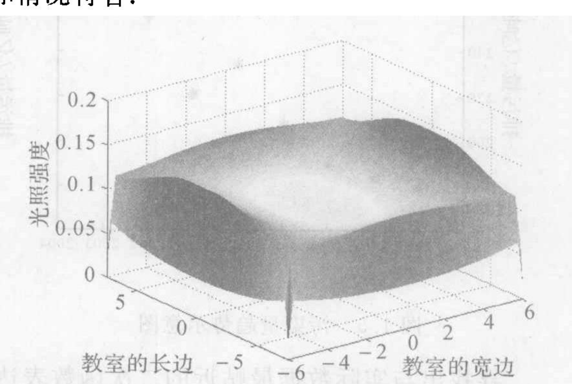

图 1.4　两种情况下教室光照强度对比示意图

图 1.4 显示：通过一次镜面反射光照强度最大可以提高 0.1 左右. 那么如果考虑二次反射，二次反射所能增加的光照强度将更加小，因此可以忽略不计. 需要注意的是在实际生活中，墙面的反射并不是镜面反射，光源也不是点光源，光照强度也并非简单叠加. 这样建立的模型将更为复杂，有兴趣的同学可以阅读 2002 年全国大学生数学建模竞赛

(CUMCM2002)的车灯线光源的优化设计问题,设计更为合理的光照强度模型.

例 1.3 污染预测问题——CUMCM2005(部分)

长江是我国第一、世界第三大河流,长江水质的污染程度日趋严重,已引起了相关政府部门和专家们的高度重视. 2004 年 10 月,由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长江万里行”考察团,从长江上游宜宾到下游上海,对沿线 21 个重点城市做了实地考察,揭示了一幅长江污染的真实画面,其污染程度让人触目惊心. 假如不采取更有效的治理措施,依照过去 10 年的主要统计数据,对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析,比如研究未来 10 年的情况. 表 1.1 为 1995—2004 年长江的排污量,根据以下数据,预测 2005—2014 年长江的排污量!

表 1.1 1995—2004 年长江排污量

年 份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
排污量/亿吨	174	179	183	189	207	234	220.5	256	270	285

如果能够找到一种合理的函数形式来表示数据的增长趋势,函数的自变量为年份,因变量为预测量,就可完成预测工作. 一旦找到了这样的函数,只需要将预测的年份代入函数表达式,就可以做预测了. 根据实际数据,运用最小二乘拟合方式,便可以确定函数的系数. 预测过程如下所示:首先将 1995—2004 年的数据以图形的方式表现出来,如图 1.5所示,这样可以观察数据所蕴含的内在关系. 通过观察,可以发现数据以类似二次函数形式增长. 因此可以假定数据以二次函数的形式增长,通过最小二乘拟合确定二次函数的系数(可用 MATLAB 来实现),并预测 2005—2014 年的污染量数据,如图 1.6 所示.

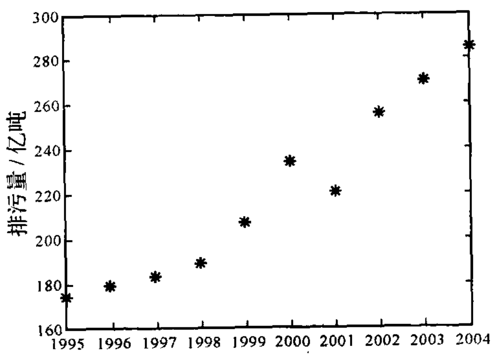

图 1.5 污染量趋势示意图

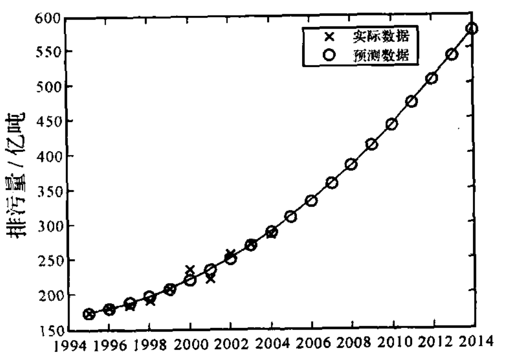

图 1.6 污染量预测示意图

寻找出与实际数据最贴近的二次函数表达式为:

$$P = 0.84 \times Year^2 - 3300 \times Year + 3300000.$$

通过图 1.6 可以发现拟合效果还是比较好的,通过代入 2005—2014,就可以得到那些年份的污染量数据如表 1.2 所示.

表 1.2　2005—2014 年污染量预测图

年　份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
排污量/亿吨	309	332	356	383	410	440	471	504	539	575

以上三题虽然涉及的内容各不相同，但是作为数学建模问题有着以下的共同之处：

1. 都是通过建立数学模型解决实际问题，可以看出数学模型不是特指的哪一块数学知识内容，而是指一种解决问题的思想. 数学模型的很多内容对大家来说并不是全新的，本书的目的就在于帮助大家整理所学过的数学知识，用所学的知识来解决实际问题.

2. 数学模型本身没有对错之分，只是在方法、结果上有优劣之分. 解决一个实际问题的方法也许有很多，所建立的数学模型也会有很多，但是大家要学会分析和思考. 数学建模竞赛通常没有一个预设的标准答案，它考察的是数学创新能力与应用能力.

通过以上三个例子的简单介绍，希望大家初步明白什么是数学模型和对数学建模的过程有一个大致的了解. 下面我们将比较系统地介绍数学建模的一般步骤，明白如何建立一个数学模型.

§1.2　数学模型的分类以及建立模型的一般步骤

定期总结数学模型的分类以及建立数学模型的一般步骤对于初学者而言是非常重要的. 虽然数学模型多种多样，但是其中有着内在的相似之处. 经常总结经验有助于初学者尽快掌握各类模型，灵活处理不同的数学建模题目.

数学模型可以按照不同方式来分类. 按照模型的应用领域可以分为数量经济模型、医学模型、地质模型、社会模型等等；更具体的有人口模型、交通模型、生态模型等等；按照建立模型的数学方法可以分为几何模型、微分方程模型、图论模型等等. 数学建模的初衷是洞察源于数学之外的事物或系统；通过选择数学系统，建立原系统的各部分与描述其行为的数学部分之间的对应，达到发现事物运行的基本过程的目的. 因此，人们通常也用如下的方法分类：

观察模型与决策模型　基于对问题状态的观察、研究，所提出的数学模型可能有几种不同的数学结构. 例如，决策模型是针对一些特定目标而设计的. 典型的情况是，某个实际问题需要作出某种决策或采取某种行动以达到某种目的. 决策模型常常是为了使技术的发展达到顶峰而设计，它包括算法和由计算机完成的特定问题解的模拟. 例如一般的马尔可夫链模型是观察模型，而动态规划模型是决策模型.

确定性模型和随机性模型　确定性模型建立在如下假设的基础上：即如果在时间的某个瞬间或整个过程的某个阶段有充分的确定信息，则系统的特征就能准确地预测. 确定型模型常常用于物理和工程之中. 微分方程模型就是常见的确定性模型. 随机性模型是在概率意义上描述系统的行为，它广泛应用于社会科学和生命科学中出现的问题.

连续模型和离散模型　有些问题可用连续变量描述，比如空中飞行安全的设计；有些问题适合离散量描述，比如 2007 年全国大学生数学建模竞赛的乘公交看奥运问题. 有

些问题由连续性变量描述更接近实际，但也允许离散化处理. 例如 2006 年全国大学生数学建模竞赛的艾滋病治疗问题中病毒是随时间变化的可视为连续模型，但如果勘察的时间段较短，则用离散模型描述更合适. 在全国大学生数学建模竞赛中一般是一题连续型问题和一题离散型问题.

解析模型和仿真模型 建立的数学模型可直接用解析式表示，结果可能是特定问题的解析解，或得到的算法是解析形式的，通常可以认为是解析模型. 如 2007 年全国大学生数学建模竞赛的人口预测问题. 而实际问题的复杂性经常使目前的解析法满足不了实际问题的要求或无法直接求解. 因此，很多实际问题需要进行仿真. 如 2007 年全国大学生数学建模竞赛的乘公交看奥运问题. 仿真模型可以对原问题进行直接或间接的仿真.

在现实生活工作中所面临的问题是纷繁复杂的，如果需要借助数学模型来求解，往往不可能孤立地使用一种方法. 需要根据对研究对象的了解程度和建模目的来决定采用什么数学工具. 一般来说，建模的方法可以分为机理分析法、数据分析法和类比仿真等.

机理分析是根据对现实对象特征的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，用这种方法建立起来的模型，常有明确的物理或现实意义，各个“量”之间的关系可以用几个函数、几个方程（或不等式）乃至一张图等数学工具明确地表示出来.

在内部机理无法直接寻求时，可以尝试采用数据分析的方法. 首先测量系统的输入输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型. 这种方法也可称为系统辨识.

有时还要将这两种方法结合起来运用，即用机理分析建立模型的结构，用系统辨识来确定模型的参数.

类比则是在两类不同的事物之间进行对比，找出若干相同或相似之处，推测在其他方面也可能存在相同或相似之处的一种思维模式，这样便可借用其他一些已有的模型，推测现实问题应该或可能的模型结构；仿真（也称为模拟）是以类比为逻辑基础，用计算机模仿实际系统的运行过程，在整个运行时间内，对系统状态的变化进行观察和统计，从而得到系统基本性能的估计或认识. 但是仿真方法一般不能得到解析的结果.

建立数学模型没有固定的模式，通常它与实际问题的性质、建模的目的等有关. 当然，建模的过程也有其共性，一般来说大致可以分为以下几个步骤：

形成问题 要建立现实问题的数学模型，首先要对所要解决的问题有一个十分明确的提法. 只有明确问题的背景，尽量弄清楚对象的特征，掌握有关的数据，确切地了解建立数学模型要达到的目的，才能形成一个比较明晰的“问题”.

假设和简化 根据对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的、合理的假设和简化. 如前所述，现实问题通常是纷繁复杂的，必须紧抓本质的因素（起支配作用的因素），忽略次要的因素. 此外，一个现实问题不经过假设和化简，很难归结成数学问题. 因此，有必要对现实问题做一些简化，有时甚至是理想化的简化假设.

模型构建 根据所作的假设，分析对象的因果关系，用适当的数学语言刻画对象的内在规律，构建现实问题中各个变量之间的数学结构，得到相应的数学模型. 这里，有一个应遵循的原则：即尽量采用简单的数学工具.

检验和评价 数学模型能否反映原来的现实问题，必须经受多种途径的检验. 这里

包括数学结构的正确性，即没有逻辑上自相矛盾的地方；适合求解，即是否会有多解或无解的情况出现；数学方法的可行性，迭代方法收敛性以及算法的复杂性等. 而最重要和最困难的问题是检验模型是否真正反映原来的现实问题. 模型必须反映实际，但又不等同于现实；模型必须简化，但过分的简化则使模型远离现实，无法解决现实问题. 因此，检验模型的合理性和适用性，对于建模的成败是非常重要的. 评价模型的根本标准是看它能否准确地解决现实问题. 此外，是否容易求解也是评价模型的一个重要标准.

模型的改进 模型在不断的检验过程中进行修正，逐步趋向完善，这是建模必须遵循的重要规律. 一旦在检验过程中发现问题，人们必须重新审视在建模时所作的假设和简化的合理性，检查是否正确刻画对象内在的量之间的相互关系和服从的客观规律. 针对发现的问题做出相应的修正. 然后，再次重复建模、计算、检验、修改的过程，直到获得某种程度的满意模型为止.

模型的求解 经过检验，能比较好地反映现实问题的数学模型，最后通过求解得到数学上的结果；再通过"翻译"回到现实问题，得到相应的结论. 模型若能获得解的确切表达式固然最好，但现实中多数场合需依靠计算机数值求解. 正是由于计算技术的飞速发展，使得数学建模现在变得越来越重要.

§1.3 走入数学建模竞赛的世界

为了选拔人才(实际上是更好地培养人才)，组织竞赛是一种行之有效的方法. 1985 年在美国出现了一种叫做 MCM 的一年一度的大学生数学建模竞赛(1987 年前全称是 Mathematical Competition in Modeling, 1988 年改全称为 Mathematical Contest in Modeling，其缩写均为 MCM).

在 1985 年以前美国只有一种大学生数学竞赛(The William Lowell Putnam Mathematical Competition，简称 Putnam(普特南)数学竞赛)，它是由美国数学协会(MAA，即 Mathematical Association of America 的缩写)主持，于每年 12 月的第一个星期六分两试进行，每试 6 题，各为 3 小时. 近年来在次年的美国数学月刊(The American Mathematical Monthly)上刊出竞赛小结、奖励名单、试题及部分题解. 这是一个历史悠久、影响很大的全美大学生数学竞赛，自 1938 年举行第一届竞赛以来已近 60 届了. 主要考核基础知识和训练逻辑推理及证明能力、思维敏捷度、计算能力等. 试题中很少应用题，完全不能用计算机，是闭卷考试，竞赛是由各大学组队自愿报名参加. 普特南数学竞赛在吸引青年人热爱数学从而走上数学研究的道路、鼓励各数学系更好地培养人才方面起了很大作用，事实上有很多优秀的数学家就曾经是它的获奖者.

有人认为应用数学、计算数学、统计数学和纯粹数学一样是数学研究和数学课程教学的重要组成部分，它们是一个有机的整体. 有人形象地把这四者表为一四面体的四个顶点，棱和面表示学科的"内在联系"，例如应用线性代数、数值分析、运筹学等，该四面体即数学的整体. 因此在美国自 1983 年就有人提出了应该有一个普特南应用数学竞赛，经过论证、讨论、争取资助的过程，终于在 1985 年开始了第一届数学建模竞赛.

MCM的宗旨是鼓励大学师生对范围并不固定的各种实际问题予以阐明、分析并提出解法，通过这样一种结构鼓励师生积极参与并强调实现完整模型的过程.每个参赛队有一名指导教师，他在比赛开始前负责队员的训练和战术指导，并接收考题，竞赛由学生自行参加，指导教师不得参与.比赛于每年二月或三月的某个周末进行.每次给出两个问题(一般是连续和离散各一题)，每队只需任选一题.考题是由在工业和政府部门工作的数学家提出建议由命题组选择的没有固定范围的实际问题.

另外，就全国大学生数学建模竞赛的题目来说，它可以来自于人们日常生活的各个方面，经常会来源于当年社会中的热点问题.如1998年的投资的收益和风险、灾情巡视路线问题；2000年的钢管订购和运输优化模型、DNA序列分类；2002年的彩票中的数学；2003年的SARS传染问题；2006年的艾滋病预防问题；2007年的乘公交看奥运问题.

我国大学生于1989年开始参加美国MCM(北京理工大学叶其孝教授于1988年访问美国时，应当时MCM负责人B. A. Fusaro教授之邀请访问他所在学校时商定了中国大学生组队参赛的相关事宜)，到1992年已有国内12所大学24个参赛队，都取得了较好的成绩.在我国不少高校教师也萌发了组织我国自己的大学生数学建模竞赛的想法.上海市率先于1990年12月7～9日举办了"上海市大学生(数学类)数学建模竞赛".于1991年6月7～9日举办了"上海市大学生(非数学类)数学建模竞赛".西安也于1992年4月3～6日举办了"西安市第一届大学生数学建模竞赛".由中国工业与应用数学学会(CSIAM)举办的"1992年全国大学生数学建模联赛"也于1992年11月27～29日举行，全国有74所大学的314个队参加，不仅得到各级领导的关心，还得到企业界的支持，特别是得到了宣传部门的广泛支持.1995年起由教育部和中国工业与应用数学学会联合举办全国大学生数学建模竞赛，每年9月举行，现在已成为全国规模最大的一项国家级的大学生科技竞赛活动.

近几年，数学建模在中国得到不断发展，涌现出很多区域性数学建模竞赛.使得数学建模爱好者有一个相互交流经验和展示自我能力的舞台.数学建模初学者还可以通过区域赛事检验自我的能力，增加比赛经验.数学建模竞赛与通常的数学竞赛不同，竞赛的问题来自实际工程或有明确的实际背景.它的宗旨是培养大学生用数学方法解决实际问题的意识和能力，整个赛事是完成一篇包括问题的阐述分析，模型的假设和建立，计算结果及讨论的论文.通过训练和比赛，同学们不仅用数学方法解决实际问题的意识和能力有很大提高，而且在团结合作发挥集体力量攻关，以及撰写科技论文等方面都会得到十分有益的锻炼.现在国内外的主要赛事有：

1. 美国大学生数学建模竞赛　　每年2月份
2. 大学生数学建模邀请赛　　每年5月份
3. 苏北大学生数学建模联赛　　每年5月份
4. 东北三省大学生数学建模联赛　　每年5月份
5. 全国大学生数学建模竞赛　　每年9月份
6. 全国研究生数学建模竞赛　　每年9月份

全国大学生数学建模竞赛是全国高校规模最大的课外科技活动之一.该竞赛于每年9月第三个星期五至下一周星期一(共3天，72小时)举行，竞赛面向全国大专院校的学