

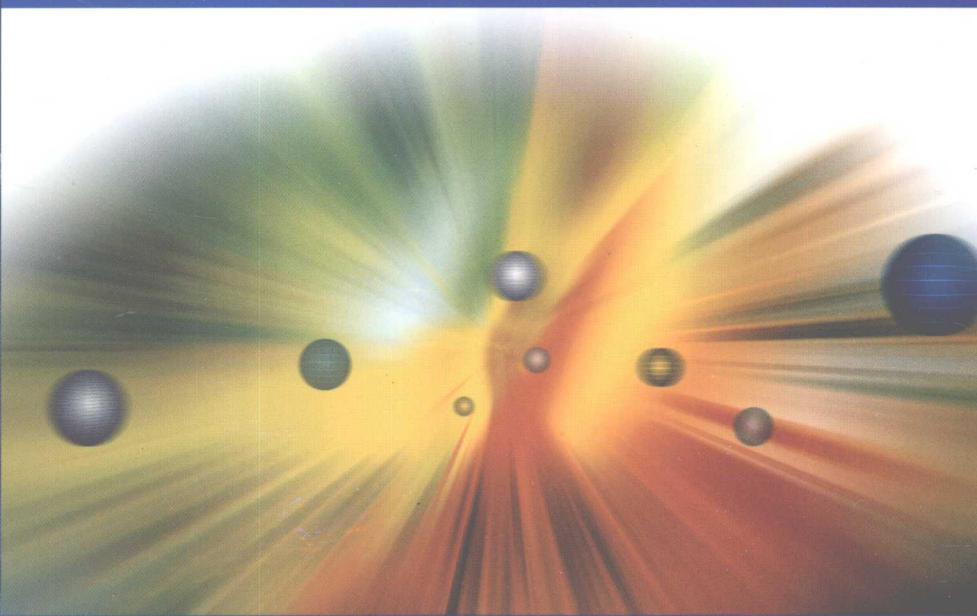


面向21世纪课程教材学习辅导书

杨福家 著

原子物理学 (第四版) 学习辅导书

吕华平 刘 莉 主编



高等教育出版社



面向21世纪课程教材学习辅导书

杨福家 著

原子物理学 (第四版) 学习辅导书

吕华平 刘 莉 主编

 高等教育出版社

内容提要

本书是杨福家编著的《原子物理学》(第四版)配套的学习辅导书。本书的章节与教材一一对应,对教材中的全部习题给出了分析和解题思路,并作出了详细解答。通过对辅导书的学习,学生可以加强对所学知识的理解,学会分析方法,提高解题能力,巩固和提高学习效果。

本书可供使用杨福家编著的《原子物理学》的学生作为学习辅导书,也可供教师或使用其他原子物理学教材的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

原子物理学(第4版)学习辅导书/吕华平,刘莉主编. —北京:高等教育出版社,2009.7

ISBN 978-7-04-026645-0

I. 原… II. ①吕…②刘… III. 原子物理学-高等学校-教学参考资料 IV. O562

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 086764 号

策划编辑	高建	责任编辑	张海雁	封面设计	刘晓翔
责任绘图	尹文军	版式设计	马敬茹	责任校对	王雨
责任印制	韩刚				

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京中科印刷有限公司

开 本 787×960 1/16
印 张 5
字 数 90 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2009 年 7 月第 1 版
印 次 2009 年 7 月第 1 次印刷
定 价 7.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 26645-00

前言

原子物理学是研究原子的结构、运动规律及相互作用的物理学分支,它是高等院校物理学专业的一门基础课程。在教学过程中,我们感受到学生在解课后习题时,会遇到各种各样的困难,缺乏良好的解题习惯。如果不能及时解决这些困难,培养良好的解题基本方法,对学生理解和掌握原子物理学中的基本概念、基本原理和基本规律是不利的。为了给在学习原子物理学这门课程时提供帮助,我们组织编写了这本学习辅导书。

本书是受高等教育出版社委托而编写的与杨福家院士所著的《原子物理学》(第四版)配套的学习辅导教材。书中包含了《原子物理学》(第四版)教材中的全部习题。编写中我们力图使解题思路紧扣原教材,解题过程清晰流畅,解题方法准确。书中的题序与原教材中的是一致的。

为了保证本书的质量,我们组织了编写小组。编写小组成员还有韩立尧、王勇和任志儒。小组成员对每个题都进行了准备,在此基础上经过了集体讨论,最后才定稿完成。复旦大学王炎森教授、北京师范大学胡镜寰教授审阅了书稿,对如何培养学生的良好的解题习惯,如何使题解简洁、明晰,提出了许多宝贵的建议和具体做法。王炎森教授还对书稿逐章进行了修改。徐州师范大学物理与电子工程学院的领导和有关老师对本书也提出了一些宝贵意见。高等教育出版社的高建编辑对本书的完成提出了指导性意见。这一切对我们的编写工作有很大帮助,在此,我们一并表示衷心的感谢。

因编者水平有限,书中的错误和不足不妥之处在所难免,欢迎读者批评指正。

吕华平 刘莉

2009年2月

常用物理学常量及部分组合常量

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV}$$

$$\hbar c = 1.24 \text{ nm} \cdot \text{keV}$$

$$\hbar c = 197 \text{ nm} \cdot \text{eV}$$

$$m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$$

$$m_n c^2 = 940 \text{ MeV}$$

$$m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

$$1 \text{ u} = 931.5 \text{ MeV}/c^2 = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$\mu_B = 0.5788 \times 10^{-4} \text{ eV} \cdot \text{T}^{-1} = 0.927 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

目 录

第一章	原子的位形:卢瑟福模型	1
第二章	原子的量子态:玻尔模型	9
第三章	量子力学导论	20
第四章	原子的精细结构:电子的自旋	31
第五章	多电子原子:泡利原理	44
第六章	X 射线	51
第七章	原子核物理概论	61
第八章	超精细相互作用	71

第一章 原子的位形：卢瑟福模型

1-1 速度为 v 的非相对论的 α 粒子与一静止的自由电子相碰撞，试证明：
 α 粒子的最大偏离角约为 10^{-4} rad.

解 本题可以利用碰撞过程中能量守恒和动量守恒严格解出 α 粒子和自由电子偏离角之间的关系，再进一步求导取极值计算出最大偏离角。但由于 α 粒子和自由电子质量相差很大，所以本题也可以用近似的方法求解。

设碰撞以后 α 粒子的散射角为 θ ，由式(3-1)、(3-2)（《原子物理学》第四版）（以下同，不再说明）知碰撞参数 b 与散射角 θ 的关系为

$$b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad \left(\text{式中 } a = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E} \right)$$

碰撞参数 b 越小，则散射角 θ 越大。也就是说，当 α 粒子和自由电子对头碰时， θ 取得极大值。

此时 α 粒子由于散射引起的动量变化如图 1-1 所示， α 粒子的质量 m_α 远大于自由电子的质量 m_e ，则对头碰撞后 α 粒子的速度近似不变，仍为 v ，而电子的速度变为 $2v$ ，则 α 粒子的动量变化为

$$\Delta p = 2m_e v$$

散射角为

$$\theta \approx \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{2m_e v}{m_\alpha v} \approx \frac{2}{4 \times 1836} = 2.7 \times 10^{-4}$$

即最大偏离角约为 10^{-4} rad.

1-2 (1) 动能为 5.00 MeV 的 α 粒子被金核以 90° 散射时，它的瞄准距离（碰撞参数）为多大？

(2) 如果金箔厚为 $1.0 \mu\text{m}$ ，则入射 α 粒子束以大于 90° 散射（称为背散射）的粒子数是全部入射粒子的百分之几？

解 (1) 由式(3-1)、(3-2)知碰撞参数 b 与散射角 θ 的关系式为

$$b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad \left(\text{式中 } a = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_k} \right)$$

库仑散射因子为

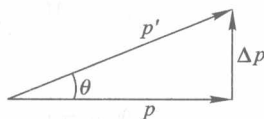


图 1-1

$$a = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 E_k} = \frac{1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV} \times 2 \times 79}{5 \text{ MeV}} = 45.5 \text{ fm}$$

瞄准距离为

$$b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \times 45.5 \text{ fm} \times \cot 45^\circ = 22.8 \text{ fm}$$

(2) 方法一 根据式(3-15)、(3-16)知,若有 N 个 α 粒子打到金箔上,在 $d\Omega$ 方向上测得的粒子数为

$$dN' = Nnt\sigma_c d\Omega \quad \left(\text{式中 } \sigma_c = \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}}, d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \right)$$

已知金的摩尔质量 $M = 197 \text{ g/mol}$, 金的密度 $\rho = 18.88 \text{ g/cm}^3$, 原子核的数密度

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{M/\rho} = \frac{N_A \rho}{M}, \alpha \text{ 粒子束以大于 } 90^\circ \text{ 散射的粒子数为}$$

$$N' = \int Nnt\sigma_c d\Omega = N \int_{90^\circ}^{180^\circ} \frac{N_A \rho}{M} t \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi \sin \theta d\theta$$

大于 90° 散射的粒子数与全部入射粒子的比为

$$\begin{aligned} \frac{N'}{N} &= \int_{90^\circ}^{180^\circ} \frac{N_A \rho}{M} t \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi \sin \theta d\theta = \int_{90^\circ}^{180^\circ} \frac{N_A \rho}{M} t \frac{a^2}{4 \sin^3 \frac{\theta}{2}} \pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{N_A \rho t \pi a^2}{4M} \int_{90^\circ}^{180^\circ} \frac{2d\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} = \frac{N_A \rho t \pi a^2}{4M} \left(\frac{1}{\sin^2 45^\circ} - \frac{1}{\sin^2 90^\circ} \right) \\ &= \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \times 18.88 \text{ g/cm}^3 \times 1.0 \times 10^{-6} \text{ m} \times 3.142 \times (45.5 \text{ fm})^2}{4 \times 197 \text{ g/mol}} \\ &= 9.4 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

则大于 90° 散射的粒子数占全部入射粒子的百分比为 $9.4 \times 10^{-3} \%$ 。

方法二 根据碰撞参数 b 与散射角 θ 的关系式 $b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}$, 可知当 $\theta \geq 90^\circ$ 时, $b(\theta) \leq b(90^\circ)$, 即对于每一个靶核, 散射角大于 90° 的入射粒子位于 $b < b(90^\circ)$ 的圆盘截面内, 该截面面积为 $\sigma_c = \pi b^2(90^\circ)$, 则 α 粒子束以大于 90° 散射的粒子数为

$$N' = Nnt\pi b^2$$

大于 90° 散射的粒子数与全部入射粒子的比为

$$\frac{N'}{N} = nt\pi b^2 = \frac{N_A \rho}{M} t \pi b^2$$

$$= \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \times 18.88 \text{ g/cm}^3}{197 \text{ g/mol}} \times 1.0 \times 10^{-6} \text{ m} \times 3.142 \times (22.8 \text{ fm})^2$$

$$= 9.4 \times 10^{-5}$$

与方法一所得结果一致.

1-3 试问:4.5 MeV 的 α 粒子与金核对心碰撞时的最小距离是多少? 若把金核改为 ${}^7\text{Li}$ 核, 则结果如何?

解 (1) 由式(4-2)知 α 粒子与金核对心碰撞的最小距离为

$$r_m = a = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 E_k} = \frac{1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV} \times 2 \times 79}{4.5 \text{ MeV}} = 50.6 \text{ fm}$$

(2) 若改为 ${}^7\text{Li}$ 核, 靶核的质量 m' 不再远大于入射粒子的质量 m , 这时动能 E_k 要用质心系的能量 E_c , 由式(3-10)、(3-11)知, 质心系的能量为

$$E_c = \frac{1}{2} m_\mu v^2 \quad \left(\text{式中 } m_\mu = \frac{m'm}{m+m'} \right)$$

得

$$E_c = \frac{1}{2} m_\mu v^2 = \frac{m'}{m+m'} E_k \approx \frac{A_{\text{Li}}}{A_{\text{He}} + A_{\text{Li}}} E_k = \frac{7}{4+7} E_k = \frac{7}{11} E_k$$

α 粒子与 ${}^7\text{Li}$ 核对心碰撞的最小距离为

$$r_{\min} = a = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 E_c} = \frac{1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV} \times 2 \times 3 \times 11}{4.5 \text{ MeV} \times 7} = 3.0 \text{ fm}$$

1-4 (1) 假定金核半径为 7.0 fm, 试问: 入射质子需要多少能量, 才能在对头碰撞时刚好到达金核的表面?

(2) 若金核改为铝核, 使质子在对头碰撞时刚好到达铝核的表面, 那么, 入射质子的能量应为多少? 设铝核半径为 4.0 fm.

解 (1) 质子和金核对头碰撞时的最小距离为

$$r_m = a = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 E_k}$$

所以入射质子需要的能量为

$$E_k = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 r_m} = \frac{1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV} \times 1 \times 79}{7.0 \text{ fm}} = 16.25 \text{ MeV}$$

(2) 若改为铝核, 靶核的质量 m' 不再远大于入射粒子的质量 m , 这时需用质心系的能量 E_c , 质子和铝核对头碰撞时的最小距离为

$$r_{\min} = a = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 E_c}$$

质心系的能量为

$$E_c = \frac{1}{2} m_\mu v^2 = \frac{m'}{m+m'} E_k$$

所以入射质子需要的能量为

$$E_k = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} \left(1 + \frac{m}{m'}\right) = \frac{1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV} \times 1 \times 13}{4.0 \text{ fm}} \left(1 + \frac{27}{28}\right) = 9.2 \text{ MeV}$$

1-5 动能为 1.0 MeV 的窄质子束垂直地射在质量厚度为 1.5 mg/cm^2 的金箔上, 计数器记录以 60° 角散射的质子. 计数器圆形输入孔的面积为 1.5 cm^2 , 离金箔散射区的距离为 10 cm, 输入孔对着且垂直于射到它上面的质子. 试问: 散射到计数器输入孔的质子数与入射到金箔的质子数之比是多少? (质量厚度定义为 $\rho_m = \rho t$, 其中 ρ 为质量密度, t 为靶厚.)

解 窄质子束打到金箔上, 散射到 $\theta \rightarrow \theta + \Delta\theta$ 方向上 $\Delta\Omega$ 立体角的概率 η 为

$$\eta = \frac{\Delta N}{N} = n t \sigma_c \Delta\Omega$$

式中原子核的数密度 $n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A \rho}{M}$, $\Delta\Omega = \frac{S}{r^2}$, 散射截面的定义式为

$$\sigma_c = \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

则有

$$\eta = \frac{\Delta N}{N} = \frac{N_A \rho t}{M} \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{S}{r^2}$$

已知金的摩尔质量 $M = 197 \text{ g/mol}$, 金的质量厚度 $\rho_m = \rho t = 1.5 \text{ mg/cm}^2$, 先计算出库仑散射因子

$$a = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 E_k} = \frac{1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV} \times 1 \times 79}{1 \text{ MeV}} = 113.76 \text{ fm}$$

代入数据计算, 散射到计数器输入孔的质子数与入射到金箔的质子数之比为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{N_A \rho t}{M} \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{S}{r^2} \\ &= \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \times 1.5 \text{ mg/cm}^2 \times (113.76 \times 10^{-13} \text{ fm})^2 \times 1.5 \text{ cm}^2}{197 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \times 16 \sin^4 30^\circ \times (10 \text{ cm})^2} \\ &= 8.9 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

1-6 一束 α 粒子垂直射至一重金属箔上, 试求 α 粒子被金属箔散射后, 散射角大于 60° 的 α 粒子数与散射角大于 90° 的 α 粒子数之比.

解 对于每一个靶核, 散射角大于 θ 的入射粒子位于 $b < b(\theta)$ 的圆盘截面内, 该截面面积为

$$\sigma_c = \pi b^2(\theta),$$

则 α 粒子束大于 θ 角散射的粒子数为

$$\Delta N = Nnt\pi b^2(\theta) \quad \left(\text{式中 } b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \right)$$

则

$$\Delta N = Nnt\pi [b(\theta)]^2 = Nnt\pi \left(\frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \right)^2$$

散射角大于 60° 的 α 粒子数与散射角大于 90° 的 α 粒子数之比为

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{Nnt\pi \left(\frac{a}{2} \cot \frac{60^\circ}{2} \right)^2}{Nnt\pi \left(\frac{a}{2} \cot \frac{90^\circ}{2} \right)^2} = \left(\frac{\cot \frac{60^\circ}{2}}{\cot \frac{90^\circ}{2}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{1} \right)^2 = 3$$

1-7 单能的窄 α 粒子束垂直地射到质量厚度为 2.0 mg/cm^2 的钼箔上, 这时以散射角 $\theta_0 > 20^\circ$ 散射的相对粒子数 (散射粒子数与入射粒子数之比) 为 4.0×10^{-3} . 试计算: 散射角 $\theta = 60^\circ$ 相对应的微分散射截面 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

解 α 粒子束垂直地射到钼箔上, 以散射角 $\theta_0 > 20^\circ$ 散射的相对粒子数为

$$\frac{\Delta N}{N} = nt\pi b^2 = \frac{N_A \rho}{M} t \pi b^2 = \frac{N_A \rho_m}{M} \pi \left(\frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \right)^2$$

可求得库仑散射因子的平方

$$a^2 = \frac{\Delta N}{N} \frac{4M}{N_A \rho_m \pi} \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

已知相对粒子数 $\frac{\Delta N}{N} = 4.0 \times 10^{-3}$, 钼质量厚度为 $\rho_m = 2.0 \text{ mg/cm}^2$, 钼的摩尔质量 $M = 181 \text{ g/mol}$, $\theta = 20^\circ$, 代入数据计算得

$$a^2 = 2.38 \times 10^{-23} \text{ cm}^2 = 2.38 \times 10^{-27} \text{ m}^2$$

由式(3-16)得散射角 $\theta = 60^\circ$ 相对应的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{60^\circ}{2}} = a^2 = 2.38 \times 10^{-27} \text{ m}^2/\text{sr}$$

1-8 (1) 质量为 m_1 的入射粒子被质量为 m_2 ($m_2 \leq m_1$) 的静止靶核弹性散射, 试证明入射粒子在实验室坐标系中的最大可能偏转角 θ_L 由下式决定: $\sin \theta_L = m_2/m_1$.

(2) 假如 α 粒子在原来静止的氮核上散射, 试问: 它在实验室坐标系中最大的散射角为多大?

证 (1) 质量为 m_1 的入射粒子被质量为 m_2 的静止靶核弹性散射, $m_2 \leq m_1$, 在碰撞前后动量守恒, 能量守恒.

设 m_1 粒子碰撞前速度为 v , 沿着 x 方向, 碰撞后速度为 v_1 , 与 x 方向夹角为 θ . m_2 粒子碰撞前速度为 0, 碰撞后速度为 v_2 , 与 x 方向夹角为 φ , 如图 1-2 所示.

由能量守恒得

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (1)$$

由动量守恒得

$$m_1v = m_1v_1 \cos \theta + m_2v_2 \cos \varphi \quad (2)$$

$$0 = m_1v_1 \sin \theta - m_2v_2 \sin \varphi \quad (3)$$

(2) $\times \sin \theta$ - (3) $\times \cos \theta$ 得

$$m_1v \sin \theta = m_2v_2 \sin(\theta + \varphi) \quad (4)$$

(2) $\times \sin \varphi$ + (3) $\times \cos \varphi$ 得

$$m_1v \sin \varphi = m_1v_1 \sin(\theta + \varphi) \quad (5)$$

将(4)、(5)两式结果代入式(1)得

$$m_1v^2 = m_1 \left(\frac{v \sin \varphi}{\sin(\theta + \varphi)} \right)^2 + \frac{m_1^2}{m_2} \left(\frac{v \sin \theta}{\sin(\theta + \varphi)} \right)^2$$

消去 v^2 则有

$$\sin^2(\theta + \varphi) = \sin^2 \varphi + \frac{m_1}{m_2} \sin^2 \theta \quad (6)$$

对式(6)求导得

$$\sin 2(\theta + \varphi) - \sin 2\varphi = \left(\frac{m_1}{m_2} \sin 2\theta - \sin 2(\theta + \varphi) \right) \frac{d\theta}{d\varphi}$$

取极值时 $\frac{d\theta}{d\varphi} = 0$, 则有

$$\sin 2(\theta + \varphi) - \sin 2\varphi = 2 \cos(\theta + 2\varphi) \sin \theta = 0$$

当 $\sin \theta = 0$ 时 $\theta = 0$, 为极小值.

当 $\cos(\theta + 2\varphi) = 0$ 时, $\theta = 90^\circ - 2\varphi$ 代入式(6)则有

$$\cos 2\varphi = \frac{m_1}{m_2} \cos^2 2\varphi$$

解得

$$\cos 2\varphi = \frac{m_2}{m_1}$$

则有

$$\sin \theta = \cos 2\varphi = \frac{m_2}{m_1}$$

由此得在实验室坐标系中的最大可能偏转角 θ_L 为

$$\sin \theta_L = m_2/m_1$$

由(2) α 粒子在原来静止的氦核上散射, 则

$$m_1 = m_2 = m_\alpha$$

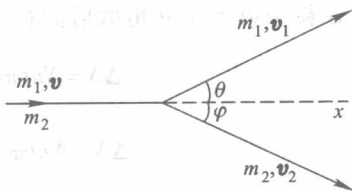


图 1-2

$$\sin \theta_L = 1$$

在实验室坐标系下的最大散射角 $\theta_L = 90^\circ$.

1-9 动能为 1.0 MeV 的窄质子束垂直地射到质量厚度为 1.5 mg/cm^2 的金箔上,若金箔中含有百分之三十的银,试求散射角大于 30° 的相对质子数为多少?

解 金箔中含有百分之三十的银,可以理解为金核和银核的粒子数之比为 $7:3$. 窄质子束打到金核上,以散射角大于 θ 散射的相对粒子数

$$\eta_1 = \frac{\Delta N_1}{N} = n_1 t \frac{\pi a^2}{4} \cot^2 \frac{\theta}{2} = \frac{N_A \rho}{M} t \frac{\pi}{4} \left(\frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi \epsilon_0 E_k} \right)^2 \times 0.7 \times \cot^2 \frac{\theta}{2}$$

窄质子束打到银核上,以散射角大于 θ 散射的相对粒子数

$$\eta_2 = \frac{\Delta N_2}{N} = n_2 t \frac{\pi a^2}{4} \cot^2 \frac{\theta}{2} = \frac{N_A \rho}{M'} t \frac{\pi}{4} \left(\frac{e^2 Z_1 Z'_2}{4\pi \epsilon_0 E_k} \right)^2 \times 0.3 \times \cot^2 \frac{\theta}{2}$$

而质子打到金核和银核上的散射可以看成独立散射事件,则窄质子束射到金箔,以散射角大于 θ 散射的相对粒子数为

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \eta_2 \\ &= \frac{N_A \rho t \pi}{4} \left(\frac{e^2 Z_1}{4\pi \epsilon_0 E_k} \right)^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{Z_2^2}{M} \times 0.7 + \frac{Z'^2_2}{M'} \times 0.3 \right) \end{aligned}$$

已知金箔质量厚度 $\rho t = 1.5 \text{ mg/cm}^2$,入射质子的质子数 $Z_1 = 1$,金的质子数 $Z_2 = 79$,摩尔质量 $M = 197 \text{ g/mol}$,银的质子数 $Z'_2 = 47$,摩尔质量 $M' = 108 \text{ g/mol}$, $\theta = 30^\circ$,代入数据计算得

$$\eta = 5.8 \times 10^{-3}$$

1-10 由加速器产生的能量为 1.2 MeV ,束流为 5.0 nA 的质子束,垂直地射到厚为 $1.5 \mu\text{m}$ 的金箔上,试求 5 min 内被金箔散射到下列角间隔内的质子数:(1) $59^\circ \sim 61^\circ$; (2) $\theta > \theta_0 = 60^\circ$; (3) $\theta < \theta_0 = 10^\circ$.

解 质子束垂直地射到金箔上,散射到 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 范围的概率为

$$\frac{\Delta N}{N} = nt \sigma_c d\Omega = nt \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi \sin \theta d\theta$$

(1) 质子散射到 $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ 范围的相对质子数为

$$\Delta N = Nnt\pi \left(b_1^2 - b_2^2 \right) = Nnt\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left(\cot^2 \frac{\theta_1}{2} - \cot^2 \frac{\theta_2}{2} \right)$$

数密度为

$$n = \frac{N_A \rho}{M_{\text{Au}}} = \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \times 18.88 \text{ g/cm}^3}{197 \text{ g/mol}} = 5.77 \times 10^{28} / \text{m}^3$$

库仑散射因子为

$$a = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 E_k} = \frac{1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV} \times 1 \times 79}{1.2 \text{ MeV}} = 94.8 \text{ fm}$$

$$N = \frac{IT}{e} = \frac{5.0 \times 10^{-9} \text{ A} \times 5 \times 60 \text{ s}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}} = 9.36 \times 10^{12}$$

计算得

$$\begin{aligned} \Delta N &= Nnt\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left(\cot^2 \frac{\theta_1}{2} - \cot^2 \frac{\theta_2}{2}\right) \\ &= 9.36 \times 10^{12} \times 5.77 \times 10^{28} / \text{m}^3 \times 1.5 \text{ } \mu\text{m} \times 3.142 \times \left(\frac{94.8 \text{ fm}}{2}\right)^2 \left[\cot^2 \left(\frac{59^\circ}{2}\right) - \cot^2 \left(\frac{61^\circ}{2}\right)\right] \\ &= 1.4 \times 10^9 \end{aligned}$$

(2) 质子垂直地射到金箔上,以散射角 $\theta > \theta_0 = 60^\circ$ 散射的粒子数为

$$\begin{aligned} \Delta N &= Nnt\pi b^2 = Nnt\pi \left(\frac{a}{2} \cot \frac{\theta_0}{2}\right)^2 \\ &= 9.36 \times 10^{12} \times 5.77 \times 10^{28} / \text{m}^3 \times 1.5 \text{ } \mu\text{m} \times \frac{3.142 \times (94.8 \text{ fm})^2}{4} \times \cot^2 30^\circ \\ &= 1.7 \times 10^{10} \end{aligned}$$

(3) 质子垂直地射到金箔上,以散射角 $\theta < \theta_0 = 10^\circ$ 散射的粒子数为

$$\Delta N = Nnt\pi b^2 = Nnt\pi \left(\frac{a}{2} \cot \frac{\theta_0}{2}\right)^2$$

则在散射角 $\theta < \theta_0 = 10^\circ$ 范围的粒子数

$$\begin{aligned} \Delta N' &= N - \Delta N = N \left(1 - nt \frac{\pi a^2}{4} \cot^2 \frac{\theta_0}{2}\right) \\ &= 9.36 \times 10^{12} \times \left(1 - 5.77 \times 10^{28} / \text{m}^3 \times 1.5 \text{ } \mu\text{m} \times \frac{3.142 \times (94.8 \text{ fm})^2}{4} \times \cot^2 5^\circ\right) \\ &= 8.6 \times 10^{12} \end{aligned}$$

第二章 原子的量子态:玻尔模型

2-1 铯的逸出功为 1.9 eV,试求:

- (1) 铯的光电效应阈频率及阈值波长;
- (2) 如果要得到能量为 1.5 eV 的光电子,必须使用多少波长的光照射?

解 根据式(6-9)爱因斯坦的光电效应方程

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - \phi$$

式中, $\frac{1}{2}mv_m^2$ 为出射电子的最大动能, $h\nu$ 为入射光子能量, ϕ 为金属的逸出功.

(1) 铯的逸出功 $\phi = 1.9$ eV, 当出射电子的最大动能为 0 时, 入射光子的频率最小, 对应于金属的光电效应阈频率, 即

$$h\nu_0 = \phi$$

故阈频率为

$$\nu_0 = \frac{\phi}{h} = \frac{\phi c}{hc} = \frac{1.9 \text{ eV} \times 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.24 \text{ nm} \cdot \text{keV}} = 4.6 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

阈值波长的值为

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}}{4.6 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 6.5 \times 10^{-7} \text{ m} = 6.5 \times 10^2 \text{ nm}$$

(2) 若要得到光电子的能量为 $E = \frac{1}{2}mv_m^2 = 1.5$ eV, 则

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + \phi$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\phi + E} = \frac{1.24 \text{ nm} \cdot \text{keV}}{1.9 \text{ eV} + 1.5 \text{ eV}} = 3.6 \times 10^2 \text{ nm}$$

2-2 对于氢原子、一次电离的氦离子 He^+ 和两次电离的锂离子 Li^{2+} , 分别计算它们的

- (1) 第一、第二玻尔轨道半径及电子在这些轨道上的速度;
- (2) 电子在基态的结合能;
- (3) 由基态到第一激发态所需的激发能量及由第一激发态退激到基态所放光子的波长.

解 由式(7-8)知电子的轨道半径为

$$r_n = \frac{n^2 4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$$

再根据玻尔角动量量子化条件 $m_e v_n r_n = n\hbar$, 得

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}$$

利用组合常量计算

$$r_n = n^2 a_1$$

其中 a_1 为玻尔第一轨道半径, 即

$$a_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \frac{(\hbar c)^2}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} m_e c^2} = \frac{(197 \text{ nm} \cdot \text{eV})^2}{1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV} \times 0.511 \text{ MeV}} = 0.053 \text{ nm}$$

$$v_n = \frac{v_1}{n}$$

其中 v_1 为电子在第一轨道的速度, 即

$$v_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} = \frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \alpha c = \frac{1}{137} c \quad \left(\alpha = \frac{1}{137} \text{ 为精细结构常数} \right)$$

玻尔轨道能量公式为

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \cdot 2\hbar^2 n^2} = -\frac{Rhc}{n^2}$$

其中 $R = \frac{2\pi^2 e^4 m_e}{(4\pi\epsilon_0)^2 ch^3}$ 为里德伯常量. 经计算得

$$Rhc = 13.6 \text{ eV}$$

对于类氢离子 He^+ 、 Li^{2+} , 只需将公式中的 e^2 换成 Ze^2 即可, Z 为类氢离子的核电荷数. 则有

$$r'_n = \frac{r_n}{Z} = \frac{n^2 r_1}{Z} = 0.053 \frac{n^2}{Z} \text{ nm}$$

$$v'_n = Z v_n = \frac{Z}{n} v_1 = \frac{Z}{n} \times 2.19 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$E'_n = -\frac{Rhc}{n^2} Z^2 = \frac{Z^2}{n^2} \times 13.6 \text{ eV}$$

(1) 对氢原子, 当 $n=1$ 时有

$$r_1 = a_1 = 0.053 \text{ nm}$$

$$v_1 = \frac{1}{137} c = \frac{1}{137} \times 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} = 2.19 \times 10^6 \text{ m/s}$$

当 $n=2$ 时有

$$r_2 = 2^2 r_1 = 4 \times 0.053 \text{ nm} = 0.212 \text{ nm}$$

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = 1.09 \times 10^6 \text{ m/s}$$

对氦离子 He^+ , $Z=2$, 则

$$r'_1 = \frac{r_1}{Z} = 0.053 \text{ nm} \times \frac{1}{2} = 0.0265 \text{ nm}$$

$$r'_2 = \frac{r_2}{Z} = \frac{2^2 r_1}{2} = 0.053 \text{ nm} \times 2 = 0.106 \text{ nm}$$

$$v'_1 = Zv_1 = 2 \times 2.19 \times 10^6 \text{ m/s} = 4.38 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$v'_2 = Zv_2 = \frac{Z}{n} v_1 = \frac{2}{2} \times 2.19 \times 10^6 \text{ m/s} = 2.19 \times 10^6 \text{ m/s}$$

对锂离子 Li^{2+} , $Z=3$, 则

$$r'_1 = \frac{r_1}{Z} = 0.053 \text{ nm} \times \frac{1}{3} = 0.018 \text{ nm}$$

$$r'_2 = \frac{r_2}{Z} = \frac{2^2 r_1}{3} = 0.053 \text{ nm} \times \frac{4}{3} = 0.071 \text{ nm}$$

$$v'_1 = Zv_1 = 3 \times 2.19 \times 10^6 \text{ m/s} = 6.57 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$v'_2 = Zv_2 = \frac{Z}{n} v_1 = \frac{3}{2} \times 2.19 \times 10^6 \text{ m/s} = 3.29 \times 10^6 \text{ m/s}$$

(2) 电子在基态的结合能为初速度为零的电子由无穷远处跃迁到基态所释放的能量, 与该原子基态的电离能相等. 由于电子在无穷远处的能量为零, 则原子的结合能为

$$E = E_\infty - E_k = -E_k = \frac{Rhc}{n^2} Z^2 = \frac{Z^2}{n^2} \times 13.6 \text{ eV}$$

基态时, $n=1$, 则基态结合能

$$E = Z^2 \times 13.6 \text{ eV}$$

对氢原子, $Z=1$, 得

$$E = Z^2 \times 13.6 \text{ eV} = 13.6 \text{ eV}$$

对氦离子 He^+ , $Z=2$, 得

$$E = Z^2 \times 13.6 \text{ eV} = 4 \times 13.6 \text{ eV} = 54.4 \text{ eV}$$

对锂离子 Li^{2+} , $Z=3$, 得

$$E = Z^2 \times 13.6 \text{ eV} = 9 \times 13.6 \text{ eV} = 122 \text{ eV}$$

(3) 氢原子或类氢离子基态能量为

$$E_1 = -Z^2 Rhc$$

氢原子或类氢离子第一激发态能量为

$$E_1 = -\frac{1}{4} Z^2 Rhc$$