高等职业技术学院通用教材

应用数学

下册

屈宏香　主编

黄　旭　主审

中国铁道出版社

高等职业技术学院通用教材

应用数学

下册

屈宏香　主编
黄　旭　主审

中国铁道出版社
2003年·北京

(京)新登字 063 号

图书在版编目(CIP)数据

应用数学．下册/屈宏香主编．-北京:中国铁道出版社,2003.2
高等职业技术学院通用教材
ISBN 7-113-05054-9

Ⅰ.应…　Ⅱ.屈…　Ⅲ.应用数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 109831 号

书　　名:高等职业技术学院通用教材
　　　　　应用数学·下册
作　　者:屈宏香　主编
出 版 发 行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责 任 编 辑:赵　静
编辑部电话:021—73133(路)　010—51873133(市)
封 面 设 计:冯龙彬
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:880×1230　1/32　印张:8.625　字数:252 千
版　　本:2003 年 2 月第 1 版　　2003 年 2 月第 1 次印刷
印　　数:1～3 000 册
书　　号:ISBN 7-113-05054-9/O·107
定　　价:17.00 元

内 容 简 介

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》,并结合作者多年从事本课程教学和教研的体会编写的。编者结合高职教育的特点,适度降低理论水平,注重培养学生用数学思想和方法解决实际问题的能力,并提供了大量例题供教学和自学用。

教材分为上、下两册,本书为下册。下册内容包括:无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数、概率与数理统计。书中各节后均附有习题,书末集中给出了答案。

本书适用于招收高中毕业生和中职毕业生的三年制高职教育,也可供三年制普通大专的数学教学使用。

前　言

本书是根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》，结合作者多年从事本课程教学和教研的体会编写的，适用于招收高中毕业生和中职毕业生的三年制高职，也适用于三年制普通大专。

本书的编写原则是：夯实基础，强化能力，立足应用，服务专业。它有以下特色：

(1) 力求从实际问题中引出数学概念，揭示概念的实质，强调数学概念与实际问题的联系。

(2) 结合高职教育的特点，适度降低理论水平，采用数形结合法、描述法阐明数学概念和验证定理。例如，极限定义不采用“ε-δ”及“ε-N”语言，而代之以函数值变化趋势的分析和函数图形的描述。

(3) 广泛征求了专业课教师的意见，体现了必需、够用为度和为专业课服务的教学原则，为专业课教学打下坚实的基础。

(4) 本书内容简明、条理性强，有利于电化教学。

(5) 注重培养学生用数学思想、方法解决实际问题的能力(把实际问题转化为数学模型，并求解数学模型)。例如，在微分方程应用教学中例题演解和习题训练都注重了这方面能力的培养。

(6) 书中例题较多，既训练解题方法和思路，又指出在概念和运算上易犯的错误，有利于自学。

(7) 叙述简练，语言确切，图形直观，数据准确。

本书为下册，主要为无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数和概率统计等内容。

本书由屈宏香主编，黄旭主审。参加编写本书的作者依次是：岑荣康(第七章)、汤思红(第八章)、李寿军(第九章)、李绍中(第十章)。全书插图由黄晓津绘制。

在编写过程中，得到中国铁道出版社和湖南铁道职业技术学院的大力支持，在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，错误和不当之处难免，恳请同行和读者指正。

编　者

2002年10月

目　　录

第7章 无穷级数

无穷级数是十分重要的数学工具，无论在理论上还是在工程实际中都有广泛的应用．本章先讨论级数的基本内容，然后着重讨论如何将函数展开成幂级数与三角级数的问题．

§7-1 数项级数

一、数项级数的概念

1．无穷递缩等比数列的求和问题

例1 将循环小数 $0.333\cdots$ 化为分数.

解 因为 $$0.333\cdots=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots,$$

而$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$是公比为$\frac{1}{10}$的无穷递缩等比数列，其和 S 定义为前 n 项和 S_n 的极限，即

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{10}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]=\frac{1}{3},$$

所以 $$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots=\frac{1}{3},$$

即 $$0.333\cdots=\frac{1}{3}.$$

由此例可看出，无穷多个数相加，也有可能得到一个有限数．

例2 讨论无穷等比数列 $a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},\cdots$ $(a\neq0)$的和.

解 该数列前 n 项和为

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

(1)当$|q|<1$时,

因为 $$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, 而 \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

所以 $$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-q}. \tag{7-1}$$

(2)当$|q|>1$时,因为$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$不存在,所以该无穷等比数列之和无意义.

(3)当$|q|=1$时,

$$q=1 时, S_n = na, 故 \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty;$$

$$q=-1 时, S_n = \begin{cases} 0 & 当 n 为偶数 \\ a & 当 n 为奇数 \end{cases}.$$

因为$a\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$不存在,所以,当$|q|=1$时,该无穷等比数列的和无意义.

我们把

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots,$$

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

叫做数项级数.

2. 数项级数的基本概念

定义 1 设有数列$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$,则表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{7-2}$$

称为**常数项级数**,简称**数项级数**或**级数**,记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,其中第$n$项$u_n$称为该级数的**一般项**或**通项**.

级数(7-2)前n项之和

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为**该级数的部分和**,记作S_n.当n依次取1,2,3,…时,我们就得到一个新的数列$\{S_n\}$——部分和数列:

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$$

定义 2 当$n\to\infty$时,若级数(7-2)的部分和数列$\{S_n\}$有极限S,即

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,则称级数(7-2)收敛,并称 S 为级数之和,记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

此时我们常用其部分和 S_n 作为级数和 S 的近似值,它们之差用 r_n 表示:

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为级数的余项,用 S_n 近似代替 S 所产生的误差就是此余项的绝对值 $|r_n|$.

若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,则称级数(7-2)发散,此时级数(7-2)无意义,仅是一个记号而已 .

例 3 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的敛散性 .

解 因为 $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$,其部分和:

$$S_n = \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

而
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2},$$

所以原级数收敛,其和为 $\dfrac{1}{2}$.

例 4 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ 的敛散性 .

解 因为部分和

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2,$$

而
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty,$$

所以原级数发散 .

二、数项级数的性质

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 kS，其中 k 为常数．

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n，则

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = kS_n,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} kS_n = k \lim_{n\to\infty} S_n = kS,$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 kS．

从证明中可知：若 S_n 无极限且 $k \neq 0$，那末 σ_n 也不可能有极限．由此可知，级数每一项同乘一个非零常数，其敛散性不改变．

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S 与 σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛于 $S+\sigma$.

性质 2 说明两个收敛级数可逐项相加（或相减）.

性质 3 任一级数去掉或增加有限项不改变其敛散性，但收敛时，级数和一般会改变．

性质 4 收敛级数加括号后所成的级数仍收敛于原级数的和．

性质 2、3、4 留给读者自证．

注意：收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛．例如级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛，但级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

发散．

推论 如果加括号所成的级数发散，则原来的级数也发散．

例 5 证明调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散．