21世纪高等院校教材

# 理论力学

LILUNLIXUE

主　编　王剑华　李　康
副主编　刘　筠　王亚辉

陕　西　出　版　集　团
陕西科学技术出版社

21世纪高等院校教材

# 理 论 力 学

主 编 王剑华 李 康

副主编 刘 筠 王亚辉

陕 西 出 版 集 团

陕西科学技术出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

理论力学/ 王剑华，李康主编．—西安：陕西科学技术出版社，2009．8

ISBN 978-7-5369-3545-7

Ⅰ．理…　Ⅱ．①王…②李…　Ⅲ．理论力学—高等学校—教材　Ⅳ．031

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 154835 号

---

**出 版 者**　陕西出版集团　陕西科学技术出版社
西安北大街 131 号　邮编 710003
电话（029）87211894　传真（029）87218236
http：// www．snstp．com

**发 行 者**　陕西出版集团　陕西科学技术出版社
电话（029）87212206　87260001

**印　　刷**　陕西省汉中印刷厂

**规　　格**　787mm×960mm　16 开本

**印　　张**　20.5

**字　　数**　340 千字

**印　　数**　1—1000

**版　　次**　2009 年 8 月第 1 版
2009 年 8 月第 1 次印刷

**定　　价**　28.00 元

---

**版权所有　翻印必究**

# 序

这本书主要是为大学物理专业的学生编写的，也可以作为其他非物理专业学生的教材。作为理论力学课程的教材，作者力求力学理论的清晰易懂，数学推演的简捷方便，其内容取舍得当，同时还顾及力学在物理学和工程技术中的一些重要应用。期望大学生在阅读这本书时能学到较多的知识，很好地解决学习中所遇到的困难。

理论力学的各种讲述体系是利弊相兼，各有所长的。本书以动力学为主干，按照基本定理和基本方程分章叙述，而运动学和静力学的内容则穿插其中，使学生能够分散消化。另外，本书把质点力学和质点系力学加以合并，一气呵成，从而节省了一定的篇幅。本书还加强了分析力学部分，并使其内容更为充实，应用实例更为丰富，以便为后续课程的学习作个良好地铺垫。

王同生

2009 年 3 月

# 前　言

理论力学是研究宏观物体低速运动的一门科学。它是理论物理课程的基础，也是现代工程技术的理论基础。这里的宏观物体是指研究对象的尺度介于微观和宇观之间的物体。本课程的主要任务是让学生掌握质点、质点系和刚体运动的基本规律和研究方法，学会运用这些方法解决实际的力学问题，并为后续课程的学习做必要的准备。通过本课程的学习，目的是培养学生分析问题和解决问题的能力，帮助学生确立辩证唯物主义世界观，提高学生的抽象思维能力。

人类满怀激情地跨入了充满挑战与机遇的 21 世纪。这是一个经济全球化、科技创新国际化的时代，是新经济占主导地位的时代，是科学技术突飞猛进、不断取得新突破的时代。这样的时代，对高等教育的办学理念、体制、模式、机制和人才培养等各个方面都提出了全新的要求。所培养的人才不仅要有新知识、新思想、新观念，更重要的是要有不断创新、善于开拓、团结奋斗的拼搏精神。高等师范教育是我国高等教育的重要组成部分，在 21 世纪面对着的挑战同样是严峻的。随着现代科学技术的迅猛发展，特别是微电子技术、信息技术的发展，生产技术的内涵发生了深刻的变化。面对这一深刻的变化和严峻的形势，我们必须认真转变教育思想，以持续发展为主题，以结构优化升级为主线，以改革开放为动力，以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点，以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心，努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才。

理论力学的有些内容在普通物理的力学中已经学过，对这样一些内容我们进行了大量删减,把讲授的重点放在了深化和提高上。例如，转动惯量的概念在力学课中已经学过，所以在理论力学中我们将重点放在求转动惯量的公式法、求密度不均匀物体的转动惯量、回转半径以及求转动惯量定理的综合运用上；在普通力学中已研究过两个小球的碰撞，在理论力学中便将重点放在斜碰、质心坐标系和实验室坐标系、小球和物体间的碰撞以及物体之间的碰撞等较深入的课题研究上。又例如，转动定律的方程不再进行推导，主要学习较复杂的定轴转动问题，如复摆的概念和应用，工程中轴上附加压力的产生及分析动平衡的条件等。由于在力学中初步学习过刚体平面运动，所以在理论力学中除巩固平面运动的基点分

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

析法外，将新的知识点放在转动瞬心的概念、平面运动的瞬心分析法、空间极迹和本体迹等，给学生指出观察、分析平面运动的新视角，达到开阔学生学习思路的目的。总之，我们地目标是处理好与力学的衔接与配合，大大提高理论力学的教学效率，加强分析力学的内容，努力培养学生用全新的观点和方法处理力学问题地能力，提高学生的抽象思维能力，为后续课程打好基础。

本书第1章介绍牛顿方程和非惯性参考系的基本内容,这是理论力学课的基础理论部分。第2章到第4章分别介绍动量定理、角动量定理和动能定理，具体包括讨论了中心力场、两体问题、散射、刚体和变质量物体的运动五类典型的力学问题以及处理这些问题的思想、方法和结论。第5章和第6章讲经典力学拉格朗日方程的哈密顿理论，它是专门为后续理论物理课的需要作理论准备的。第7章作为分析力学的应用，介绍了以欧拉方程为核心的刚体的定点转动问题。第8章介绍了刚体的平衡方程及其应用，目的在于使工科学生参考时更为方便。另外，本书各章精选的习题部分来自国内其他相关教材，如：周衍柏先生编著的《理论力学教程》，金尚年、马永利先生编著的《理论力学》等。在此向他们表示感谢。

本书尽量体现以学生为本、以学生为中心的教育思想，不为教而教，突出培养学生自学能力和扩展、发展知识的能力，以便为学生今后持续创造性学习打好基础。当然，本书尽管主观上想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前，但由于这是一种新的探索以及其他可能尚未认识到的因素，难免有缺点甚至错误，敬请广大教师、学生以及其他读者不吝赐教，以便再版时修正和完善。

本书由王同生教授、岳瑞宏教授审稿，他们提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心感谢。

本书的出版得到了“国家自然科学基金（1047005、10875035）”和“国家级特色专业建设经费”的部分资助。

编者

2009年2月

# 目 录


**第 1 章　牛顿方程**……1
1.1　速度合成定理……1
1.2　加速度的分量表示……6
1.3　经典力学的基础……15
1.4　牛顿方程……20
1.5　非惯性系……34
1.6　相对于地球的运动……41
思考题……44
习题……45
**第 2 章　动量定理**……53
2.1　内力的性质……53
2.2　质点系的动量定理……56
2.3　质心运动定理……62
2.4　变质量物体的运动……67
2.5　实验室坐标系与质心坐标系……72
思考题……76
习题……77
**第 3 章　角动量定理**……84
3.1　质点系角动量定理……84
3.2　力系的约化　刚体运动方程……92
3.3　惯量张量……97
3.4　刚体的定轴转动……105
3.5　刚体的平面平行运动……112
思考题……119
习题……120
**第 4 章　动能定理**……127
4.1　质点系动能定理……127
4.2　中心力场……136
4.3　$\alpha$ 粒子的散射……144
4.4　二体问题……147
思考题……153
习题……153

**第 5 章　拉格朗日方程**……159
5.1　广义坐标……160
5.2　虚功原理……166
5.3　拉格朗日方程……174
5.4　守恒定律……184
5.5　小振动……194
5.6　带电粒子在电磁场中的运动……203
思考题……209
习题……209
**第 6 章　哈密顿原理**……216
6.1　哈密顿原理……216
6.2　正则方程……226
6.3　泊松括号……239
6.4　正则变换……243
6.5　雅可比方程……250
思考题……257
习题……258
**第 7 章　欧拉方程**……264
7.1　欧拉运动学方程……264
7.2　欧拉动力学方程……270
7.3　欧拉陀螺……274
7.4　拉格朗日陀螺……281
思考题……285
习题……285
**第 8 章　刚体的平衡方程**……290
8.1　静力学基本概念和原理……290
8.2　平面力系的平衡……291
8.3　空间力系的平衡……300
8.4　桁架……304
思考题……311
习题……311
**附录一**……315
**附录二**……320

# 第 1 章 牛顿方程

力学的任务是研究宏观物体的机械运动。所谓机械运动，是指物体位置的变化。因此，确定物体的位置自然是力学的第一个课题。本章讲述速度、加速度、牛顿运动定律和相对性原理、牛顿方程的求解以及非惯性系的应用。

## 1.1 速度合成定理

### 1.1.1 质点的运动方程

质点是力学中的一个理想模型，当我们所研究的对象其体积和形状都可以被忽略的时候，物体就可以被看成质点。任何物体的位置都是相对于其他物体而言的。所以，要确定物体 $A$ 的位置，必须事先选定另一个物体 $B$ 作为描述的依据或参考。此时，物体 $B$ 被称为参考体。

为了定量地确定物体的位置，描述物体的运动，必须选定一个固定在参考体上的坐标系和计算时间的钟。只有指出了事件的空间坐标和时刻，才能着手去研究运动的特征。对于同一个运动而言，选取不同的坐标系将观测到不同的结果。因此，为了处理问题的简便，我们应该针对具体问题的特点，选取最适当的坐标系。

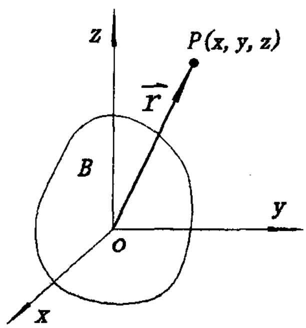


图 1-1

一个质点 $P$ 的位置，可以用引自参考体 $B$ 上某点 $O$ 的矢量 $\vec{r}$ 来确定，如图 1-1 所示。矢量 $\vec{r}$ 被称为质点 $P$ 对于 $O$ 点的位矢。实践表明，对于质点的机械运动来讲，$\vec{r}$ 是时间 $t$ 的单值、连续函数。即

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1.1-1}$$

给出这个函数关系，我们就能确定质点在任一时刻的位置，从而得知质点的运动特征。所以，（1.1-1）式被称为质点的运动方程。

如果我们选定了坐标系，矢量方程（1.1-1）式就能投影到坐标轴上，得到等价的分量方程组。在图 1-2 所示的直角坐标系、柱坐标系、球坐标系下，质点分

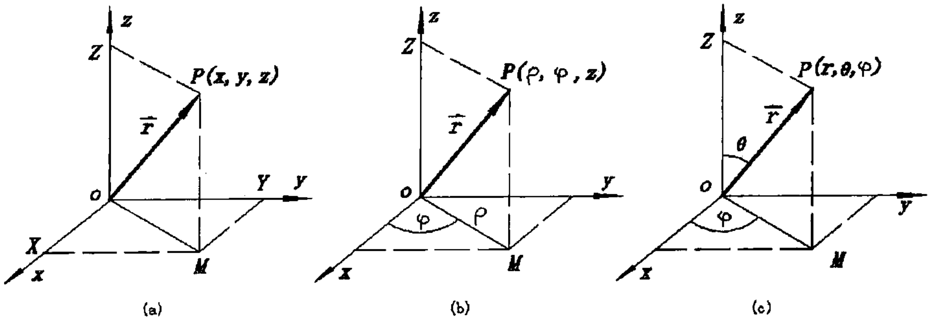


图 1-2

量形式的运动方程为

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t) \tag{1.1-2}$$

$$\rho = \rho(t),\quad \varphi = \varphi(t),\quad z = z(t) \tag{1.1-3}$$

$$r = r(t),\quad \theta = \theta(t),\quad \varphi = \varphi(t) \tag{1.1-4}$$

质点运动时，其位矢 $\vec{r}$ 的连续变化将描绘出一条矢端曲线。这条曲线被称为质点的运动轨迹。显然，方程组（1.1-2）、（1.1-3）、(1.1-4)都是轨道曲线的参数方程。如果消去方程组中的时间 $t$，就得到了质点的轨迹方程。

### 1.1.2　速度和加速度

如果质点在 $\Delta t$ 时间内由 $P$ 点运动到 $Q$ 点，通过的路程是 $\Delta s$，则质点的位矢 $\vec{r}$ 同时发生一个增量 $\Delta\vec{r}$，如图 1-3 所示。增量 $\Delta\vec{r}$ 被称为质点在 $\Delta t$ 时间内的位移。位移是由质点的初、末两个位置决定的，一般与路程无关。在曲线运动中，质点发生有限的位移时，$\Delta s \neq |\Delta\vec{r}|$，但是对于无限小位移，则有 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$。

位矢 $\vec{r}$ 对时间的一阶导数被称为质点的速度，即

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t) \tag{1.1-5}$$

由上式可知，$\vec{v}$ 总是沿轨道的切线，并指向质点的运动方向。$\vec{v}$ 的模被称为速率，

它表征运动的快慢。由（1.1-5）式可得

$$|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s}(t) \tag{1.1-6}$$

速度 $\vec{v}$ 对时间的一阶导数被称为质点的加速度，即

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{v}}(t)=\ddot{\vec{r}}(t) \tag{1.1-7}$$

位移、速度、加速度都是时间 $t$ 的矢性函数。引入这些量是为了描述机械运动，刻画各种运动的具体特征。$\vec{v}$ 为常矢量时是匀速运动，$\vec{a}$ 为常矢量时是匀加速运动。匀速运动的轨迹是直线，但是匀加速运动却未必是直线运动。

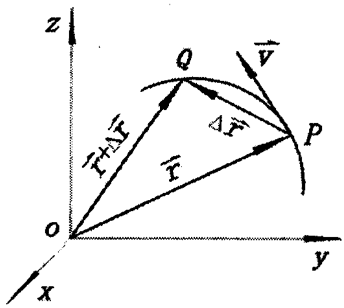


图 1-3

由于质点的位置是借助于参考系加以确定的，所以轨道、位移、速度、加速度都依赖于参考系的选择。因此，不指定参考系就无法描述质点的机械运动。如果参考系选的恰当，我们的描述就会简便明了，也能充分地显示出运动的特征。

### 1.1.3　角速度和角加速度

现在利用刚体的定轴转动来引入角速度和角加速度的概念。我们在定轴转动的刚体上选取一条转动半径 $OM$，该半径与某一垂直转轴且与 $OM$ 共面的固定直线 $ON$ 的夹角 $\theta$ 可以确定刚体的位置，被称为角坐标。并且还用 $\theta$ 对时间 $t$ 的一阶导数表征刚体转动的快慢，被称为角速度。这样虽然可以对转动现象作直观的了解，但是这些概念毕竟是很粗略、很不完善的。为了对转动作精确简明的描述，需要用矢量来定义角位移、角速度和角加速度。如图 1-4 所示。我们把角位矢 $\vec{\theta}$ 定义为：$\vec{\theta}$ 的模是 $\theta$ 角的大小，$\vec{\theta}$ 的方向则根据 $\theta$ 角的旋向用右手螺旋法则确定。

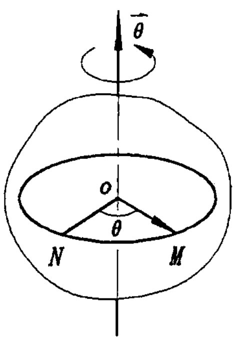


图 1-4

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

当刚体转动时，$OM$ 随之转动，$\vec{\theta}$ 将是时间 $t$ 的连续函数。我们把 $\vec{\theta}(t+\Delta t)$ 与 $\vec{\theta}(t)$ 的差定义为 $\Delta t$ 时间内的角位移 $\Delta\vec{\theta}$，把 $\vec{\theta}$ 对 $t$ 的一阶导数和二阶导数定义为转动的角速度和角加速度，即

$$\vec{\omega}=\frac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t},\ \vec{\beta}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{\theta}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1-8}$$

上面定义的角速度和角加速度矢量既适用于刚体，也适用于刚体上的任意点 $M$。

根据角速度矢量的定义可以证明：质点做圆周运动时，其角速度和线速度之间的关系为

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r} \tag{1.1-9}$$

式中的 $\vec{r}$ 是质点相对于圆心 $O$ 的位矢。如果 $\vec{r}$ 是从转轴上的任意点引至刚体上 $M$ 点的位矢时，上式依然能够成立。这样，(1.1-9) 式就可写为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{r} \tag{1.1-10}$$

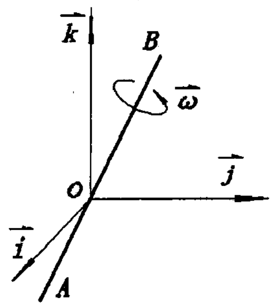


图 1-5

如图 1-5 所示，假设直角坐标系的标架绕着通过原点的直线 $AB$ 以角速度 $\vec{\omega}$ 旋转，这时若把 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 看成质点的位矢，则由 (1.1-10) 式，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{i}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{j}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{k}\end{cases} \tag{1.1-11}$$

可见，直角坐标系的标架绕着通过原点的直线 $AB$ 旋转时，单位矢量 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 的变化率等于转动的角速度 $\vec{\omega}$ 与它们的矢积。

### 1.1.4 速度合成定理

假定 $S$ 是选取的固定坐标系，$S'$ 是一个相对于 $S$ 系运动的坐标系，如图 1-6 所示，现在来研究质点分别相对于这两个坐标系的速度。

质点相对于定坐标系 $S$ 的运动被称为绝对运动，相对于动坐标系 $S'$ 的运动被称为相对运动。当质点不做相对运动时，它随 $S'$ 系一起对于 $S$ 系所做的运动被称为牵连运动。例如一个人在行驶着的火车中行走，人对车（$S'$）的运动是相对运动，人对地（$S$）的运动是绝对运动。人若静止在车中，则由于车的行驶而引起人对地的运动便是牵连运动。

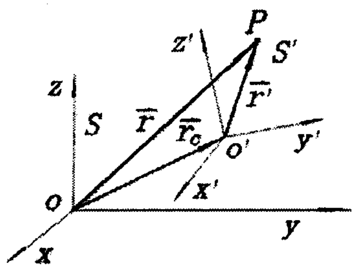


图 1-6

质点在相对运动中的速度被称为相对速度，在绝对运动中的速度被称为绝对速度，在牵连运动中的速度被称为牵连速度。

由图 1-6 可知，相对运动是在 $S'$ 系中观测的，所以相对速度应是 $\vec{i}'$ 、$\vec{j}'$ 、$\vec{k}'$ 不变情况下 $\vec{r}'$ 对 $t$ 的导数，即

$$\vec{v}_r = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' \tag{1.1-12}$$

现在再来考察牵连速度。当 $S'$ 系对 $S$ 系做平动时，$M$ 点所获得的牵连速度应该和 $O'$ 的速度一样，即

$$\vec{v}_e = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{o'}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1-13}$$

当 $S'$ 系仅绕 $O'$ 点以角速度 $\vec{\omega}$ 转动时，则由（1.1-10）式可知，$M$ 点的牵连速度是 $\vec{\omega}\times\vec{r}'$ 。如果 $S'$ 系既有平动又有转动，则 $M$ 点的牵连速度应是

$$\vec{v}_e = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{o'}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega}\times\vec{r}' \tag{1.1-14}$$

质点 $M$ 的绝对速度等于 $\vec{r}$ 对 $t$ 的一阶导数。值得注意的是，绝对速度是在定系 $S$ 中观测的，所以对 $\vec{r}$ 求导数时，应将 $\vec{i}'$ 、$\vec{j}'$ 、$\vec{k}'$ 当作变矢量处理，而不能以常矢量对待。于是我们便不难写出 $M$ 点的绝对速度，

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}_o + \vec{r}') = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_o}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}_o}{\mathrm{d}t} + (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}') + (x'\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t})\end{aligned}$$

利用（1.1-11）式、(1.1-12)式和(1.1-14)式，可以得到一个十分重要的公式

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e \tag{1.1-15}$$

此式表明，质点的绝对速度等于其相对速度与牵连速度的矢量和。这个结论被称为**速度合成定理**。

# 1.2　加速度的分量表示

质点的速度是描写质点运动快慢和方向的物理量，加速度则是描写速度变化的快慢和方向，它们都是矢量。因此，在不同的坐标系中，它们的分量是不相同的。本节讨论速度和加速度在几种常用坐标系中的分量形式。

## 1.2.1　直角坐标系中加速度的分量

当质点在三维空间中运动时，可选取直角坐标系进行研究。如图 1-2(a)所示，用$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$表示三个坐标轴上的单位矢量，我们可以把位矢、速度和加速度表示成为

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \\ \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \end{cases} \tag{1.2-1}$$

于是，速度的分量和模为

$$\begin{cases} v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z} \\ v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \end{cases} \tag{1.2-2}$$

速度的方向余弦是

$$\begin{cases} \cos(\vec{v},\vec{i}) = \dot{x}/v \\ \cos(\vec{v},\vec{j}) = \dot{y}/v \\ \cos(\vec{v},\vec{k}) = \dot{z}/v \end{cases} \tag{1.2-3}$$

加速度的分量、模和方向余弦则是

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x},\quad a_y = \ddot{y},\quad a_z = \ddot{z} \\ a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \end{cases} \tag{1.2-4}$$

$$\begin{cases}\cos(\vec{a},\vec{i}) = \ddot{x}/a \\ \cos(\vec{a},\vec{j}) = \ddot{y}/a \\ \cos(\vec{a},\vec{k}) = \ddot{z}/a\end{cases} \tag{1.2-5}$$

由于位矢是时间的连续函数，而且通常是可导的，所以速度和加速度通常也是时间的函数。在位矢、速度和加速度这三个函数中，只要知道了其中一个，就可以利用微分法或积分法求出其余的两个。

**例 1-1**　已知质点 $M$ 的运动方程为 $x = a\cos\omega t$，$y = a\sin\omega t$，$z = b\omega t/2\pi$。其中 $a$、$b$、$\omega$ 均为常数。试求质点的运动轨迹、速度和加速度。

**解**　在运动方程的前两式中消去时间 $t$，可得

$$x^2 + y^2 = a^2$$

这是半径为 $R$ 的圆柱面，圆柱的轴线与 $z$ 轴重合。再由运动方程中的第一式和第三式中消去时间 $t$，可得

$$x = a\cos\frac{2\pi}{b}z$$

这是一个简谐波形的曲面，曲面的母线与 $y$ 轴平行。该曲面与上述圆柱面的交线即为质点 $M$ 的运动轨迹。它是两条螺旋线，由 $t = 0$ 时 $x = a, y = 0$ 可知，质点 $M$ 的运动轨迹是其中的右旋螺旋线，如图 1-7 所示。当 $\omega t$ 增加 $2\pi$ 时，质点 $M$ 在圆柱面上转过一圈，同时沿母线上升了距离 $b$，通常 $b$ 被称为螺旋线的螺距。

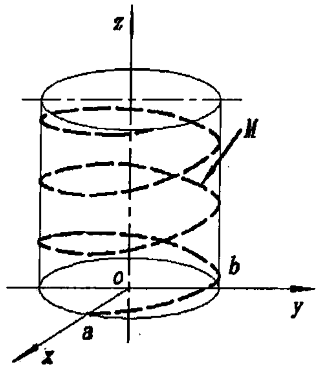

图 1-7

将质点 $M$ 的运动方程对时间求一阶导数，得

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t\ ,\ \dot{y} = a\omega\cos\omega t\ ,\ \dot{z} = b\omega/2\pi$$

因此，速度的大小为

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = a\omega\sqrt{1 + (b/2\pi a)^2}$$

速度的方向由

$$\begin{cases} \cos(\vec{v},\vec{i}) = \dot{x}/v = -\sin\omega t\Big/\sqrt{1+(b/2\pi a)^2} \\ \cos(\vec{v},\vec{j}) = \dot{y}/v = \cos\omega t\Big/\sqrt{1+(b/2\pi a)^2} \end{cases}$$

和

$$\cos(\vec{v},\vec{k}) = \dot{z}/v = b\Big/\sqrt{b^2+(2\pi a)^2}$$

来确定。很明显，速度$\vec{v}$与$z$轴的正向间的夹角保持不变。

将质点$M$的运动方程对时间求二阶导数，可得

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x \\ a_y = \ddot{y} = -a\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y \\ a_z = \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

加速度的大小和方向为

$$|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} = a\omega^2$$

$$\begin{cases} \cos(\vec{a},\vec{i}) = \ddot{x}/|\vec{a}| = -x/a \\ \cos(\vec{a},\vec{j}) = \ddot{y}/|\vec{a}| = -y/a \\ \cos(\vec{a},\vec{k}) = \ddot{z}/|\vec{a}| = 0 \end{cases}$$

上式表明，加速度$\vec{a}$的模是常数，方向平行于$Oxy$平面，且始终指向$z$轴。

### 1.2.2　极坐标系中加速度的分量

平面极坐标系如图 1-8 所示，用$\vec{i}$、$\vec{j}$表示径向和横向的单位矢量，则$\vec{k}=\vec{i}\times\vec{j}$。质点$M$的位置由坐标$(r,\theta)$确定，质点$M$的位矢$\vec{r}=r\vec{i}$。当位矢随时间变化时，会使标架$(\vec{i},\vec{j})$以角速度$\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{k}$旋转。由（1.1-11）式可得

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{i}/\mathrm{d}t = \vec{\omega}\times\vec{i} = \dot{\theta}\vec{j} \\ \mathrm{d}\vec{j}/\mathrm{d}t = \vec{\omega}\times\vec{j} = -\dot{\theta}\vec{i} \\ \mathrm{d}\vec{k}/\mathrm{d}t = \vec{\omega}\times\vec{k} = 0 \end{cases} \tag{1.2-6}$$

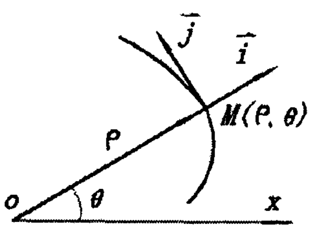


图1-8

在平面极坐标系中，速度为

$$\vec{v}=v_r\vec{i}+v_\theta\vec{j} \tag{1.2-7}$$

把$\vec{r}$对时间$t$求一阶导数

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\vec{i}+r\dot{\theta}\vec{j} \tag{1.2-8}$$

比较上面两式，有

$$v_r=\dot{r}\ ,\ v_\theta=r\dot{\theta}\ ;\ v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2} \tag{1.2-9}$$

$$\tan(\vec{v},\vec{i})=\frac{v_\theta}{v_r}=\frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}} \tag{1.2-10}$$

其中，$(\vec{v},\vec{i})$是速度$\vec{v}$与径向单位矢量$\vec{i}$的夹角。

把速度$\vec{v}$对时间$t$求一阶导数，即得加速度

$$\begin{aligned}\vec{a}&=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\vec{i}+r\dot{\theta}\vec{j})\\&=\ddot{r}\vec{i}+\dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}+\dot{r}\dot{\theta}\vec{j}+r\ddot{\theta}\vec{j}+r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}\\&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{i}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{j}\end{aligned} \tag{1.2-11}$$

于是有

$$\begin{cases}a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\\a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\end{cases} \tag{1.2-12}$$

$$\begin{cases}a=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)^2+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})^2}\\\tan(\vec{a},\vec{i})=\dfrac{a_\theta}{a_r}=\dfrac{r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}}{\ddot{r}-r\dot{\theta}^2}\end{cases} \tag{1.2-13}$$

下面讨论柱坐标系中的速度和加速度。对于空间问题，常用坐标$(\rho,\theta,z)$描述质点的位置，$z$是垂直于$(\rho,\theta)$平面的坐标轴，其单位矢量为$\vec{k}$（$\vec{k}=\vec{i}\times\vec{j}$）。在质点的运动过程中，径向和横向的单位矢量$\vec{i}$和$\vec{j}$的方向发生变化，而竖向的单位矢量$\vec{k}$的方向却始终不变。也就是说，$\mathrm{d}\vec{k}/\mathrm{d}t=\dot{\theta}\vec{k}\times\vec{k}=0$，于是有

$$\vec{r}=\rho\vec{i}+z\vec{k} \tag{1.2-14}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com