● 全国硕士研究生入学考试辅导用书

全国硕士研究生入学考试模拟试题与历年真题精解

（1990-2009）

数 学 二

清华大学 黄丽平
北京大学 卢 明 主编
首都师范大学 童 武

- 原命题组成员亲自编写，一线专家联袂推出2010年考研整体解决方案
- 深入剖析历年真题命题思路，把握命题脉搏，阐释命题原则
- 以题型为核心，详尽解答、举一反三，规避误区，全面展现题型变换
- 注重模拟实战演练，提高综合应试能力

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

全国硕士研究生入学考试辅导用书

全国硕士研究生入学考试模拟试题与历年真题精解

（1990-2009）

数学二

清 华 大 学　黄丽平
北 京 大 学　卢　明　主编
首都师范大学　童　武

- 原命题组成员亲自编写，一线专家联袂推出2010年考研整体解决方案
- 深入剖析历年真题命题思路，把握命题脉搏，阐释命题原则
- 以题型为核心，详尽解答、举一反三，规避误区，全面展现题型变换
- 注重模拟实战演练，提高综合应试能力

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

北京

图书在版编目（CIP）数据

全国硕士研究生入学考试模拟试题与历年真题精解 数学二/黄丽平、卢明、童武编著. －北京：中国经济出版社，2009.5

ISBN 978－7－5017－9156－9

Ⅰ. 全… Ⅱ. ①黄…②卢…③童… Ⅲ. 高等数学－研究生－入学考试－解题 Ⅳ. G634－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 041485 号

出版发行：中国经济出版社（100037・北京市西城区百万庄北街3号）
网　　址：www. economyph. com
责任编辑：许秀江　（电话：010－68319290　xxj09@163. com）
责任印制：张江虹
封面设计：刘子熙　巢新强
经　　销：各地新华书店
承　　印：三河市佳星印装有限公司
开　　本：787×1092　1/16　　**印张**：22　**字数**：510 千字
版　　次：2009 年 5 月第 1 版　　**印次**：2009 年 5 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978－7－5017－9156－9/G・1300　　**定价**：38.00 元

前 言

根据最新考试大纲的要求,我们组织部分多年来参加考试大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这本《全国硕士研究生入学统一考试模拟试题与历年真题精解 数学二》,以供广大考生复习使用。

历年的考题是标准的复习题。自从实行研究生入学考试以来,也时有真题重现的现象发生,如2006年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一第四大题、2003年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题、2003年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第一大题第(5)小题、2003年数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题、2003年数学四的第四大题与2001年数学一的第五大题是基本雷同的。英语与政治也有真题重复出现的情况,2003年英语第36题与1996年英语第43题,2003年英语第37题与1995年英语第34题,2003年英语第26题与1995年英语第21题,2003年英语第29题与1996年英语第42题,2003年英语第24题与1997年英语第42题,1996年英语第46题与1995年英语第6题等等,都是非常相似的。2003年政治理论第21题与2000年文科政治第31题和1993年理科政治第6题,2003年政治理论第31题与1993年理科政治第32题,2003年政治理论第36题与1995年文科政治第28题和1994年文科政治第29题等等,都是相同或非常相似的。所以,对往年真题的研究是最有帮助的。循着命题人的思路,我们就可以把握考试的脉搏,明确考试的重点和难点所在。

研究生入学考试是选拔性考试,当然重在考查考生的能力高低。能力是建立在基础之上的,基本功不扎实,一切无从谈起。从考试大纲来看,要求考生对基本知识、基本概念的掌握理解要深要透要准,尽管大学期间的期中期末考试基本反映了这一要求,但从程度上讲,远没有考研的要求高,相信大家都有同感,通过大学的期末考试其实不难,甚至基本概念不甚清晰,知识点掌握不够通透也有可能取得较不错的成绩。这是由于大学考试有其固定套路,即便考查相同的知识点,其题目的迷惑性、技巧性都远逊于研究生入学考试的题目,因此,狠抓基础是一项必要的工作,虽然很多考生可能会认为基础的东西学起来有点费力不讨好,短期收效不明显,但笔者再三强调,不可轻视基础,必须夯实到理解得入木三分的程度。

本书是北大清华数学辅导教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶,

是一份宝贵的资料，其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生基础知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分。

编者　于清华园

目录
CONTENTS

第一部分　标准模拟试题

第二部分　全真试题

Part one

第一部分

标准模拟试题

标准模拟试题一

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 当 $x \to 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是(　　).

(A)无穷小量.　　(B)无穷大量.

(C)有界非无穷小量.　　(D)无界非无穷大量.

2. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$(　　).

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

3. 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切,其中 a,b 是常数,则(　　).

(A) $a=0,b=-2$　　(B) $a=1,b=-3$

(C) $a=-3,b=1$　　(D) $a=-1,b=-1$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 等于(　　).

(A) $f(x)$　　(B) $f(x)\mathrm{d}x$　　(C) $f(x)+C$　　(D) $f'(x)\mathrm{d}x$

5. 设函数

$$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt,$$

其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数,则必有(　　).

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

6. 设函数 $f(u)$ 连续,区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2y\}$,则 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

(　　).

(A) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$　　(B) $2\int_{0}^{2}dy\int_{0}^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)dx$

(C) $\int_{0}^{\pi}d\theta\int_{0}^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$　　(D) $\int_{0}^{\pi}d\theta\int_{0}^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

7. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,则对任意常数 k,必有(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $k\beta_1+\beta_2$ 线性无关

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $k\beta_1+\beta_2$ 线性相关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $\beta_1+k\beta_2$ 线性无关

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $\beta_1+k\beta_2$ 线性相关

8. 设 A 是任一 $n(n\geqslant 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵,又 k 为常数,且 $k\neq 0,\pm 1$,则必有 $(kA)^*=$(　　).

(A) kA^*　　(B) $k^{n-1}A^*$　　(C) k^nA^*　　(D) $k^{-1}A^*$

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 设 3 阶方阵 A, B 满足 $A^2B-A-B=E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵,若 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$,则 $|B|=$______.

10. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$, E 为 4 阶单位矩阵,且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$,则 $(E+B)^{-1}=$______.

11. 设方程 $\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ 有无穷多个解,则 $a=$______.

12. 若 $x\to 0$ 时, $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 的等价无穷小,则 $a=$______.

13 曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸区间是______.

14. 微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为______.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本题满分 9 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos\sqrt{x})}$.

16. (本题满分 9 分)

设$f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$，其中$x>0$，求$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

17.（本题满分11分）

已知函数$f(u)$具有二阶导数，且$f'(0)=1$，函数$y=y(x)$由方程$y-xe^{y-1}=1$所确定. 设$z=f(\ln y-\sin x)$，求$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

18.（本题满分11分）

设$(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，其中E是4阶单位矩阵，A^T是4阶矩阵A的转置矩阵，$B=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，求A.

19.（本题满分10分）

证明：当$x>0$时，有不等式$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

20.（本题满分11分）

设$y=y(x)$是一向上凸的连续曲线，其上任意一点(x,y)处的曲率为$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点$(0,1)$处的线方程为$y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数$y=y(x)$的极值.

21.（本题满分11分）

已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，若$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$，讨论实数$t$满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是$Ax=0$的一个基础解系.

22.（本题满分11分）

若矩阵$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$相似于对角矩阵$\Lambda$，试确定常数$a$的值；并求可逆矩阵$P$使$P^{-1}AP=\Lambda$.

23.（本题满分11分）

在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的第一象限部分上求一点$P$，使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小（其中$a>0,b>0$）.

标准模拟试题一精解

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。

1.【考点提示】 无穷大量

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$,$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,但在这个极限过程中 $\sin\dfrac{1}{x}$ 重复取值 0,1,显然不选(A)(B)(C).

事实上,令 $x_n=\dfrac{1}{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. $f(x_n)=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2$.

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$,由此排除(A),(C).

又令 $y_n=\dfrac{1}{n\pi}$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, $f(y_n)=0$. 由此排除(B),

因此当 $x\to0$ 时, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 无界无穷大量.

2.【考点提示】 分段函数,复合函数.

【解题分析】 由已知

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

由 $f(x)\leqslant0$,知 $x\geqslant0$ 且 $f(x)=-x$;

由 $f(x)>0$,知 $x<0$ 且 $f(x)=x^2$;

从而 $g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant0,\\ x^2+2, & x<0,\end{cases}$ 选(D).

3.【考点提示】 导数几何意义.

【解题分析】 由题设知,这两条曲线均过点(1, -1),且在此点的斜率相等,即

$$-1=1+a+b$$

由于对第一条曲线有

$$\begin{cases}y'=2x+a,\\ y'|_{x=1}=2+a,\end{cases}$$

对于第二条曲线有

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^3}{2-3xy^2}, \\ y'|_{(1,-1)} = 1, \end{cases}$$

即有 $2+a=1$,由此可解得 $a=-1,b=-1$

故应选(D).

4.【考点提示】 微分与积分关系

【解题分析】 利用微分与积分关系即可.

因 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$,故应选(B).

5.【考点提示】 二阶导数.

【解题分析】 由题设可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y).$$

因为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,所以选(B).

6.【考点提示】 二重积分.

【解题分析】 由题设 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy)\mathrm{d}y$,从而(A)不成立;

由于仅知 $f(u)$ 连续,题设并未指出 $f(xy)$ 是否具有关于坐标轴的对称性,因此(B)不一定成立;

将原积分化为极坐标下二次积分,有

$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$,所以选择(D).

7.【考点提示】 线性相关与线性无关.

【解题分析】 由题设,β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性相关,在(C)中取 $k=0$,则可看出(C)不正确;又由 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性无关,在(B)中取 $k=0$,可看出(B)不正确;关于(A),矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2)$ 可通过初等列变换化为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2)$,则该矩阵秩为4,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关,所以(A)正确;关于(D),同样可将矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2)$ 化为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_2)$,当 $k=0$ 时,矩阵的秩为3,则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关,当 $k\neq 0$ 时矩阵秩为4,此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关,所以(D)

不正确,综上,选(A).

8.【考点提示】 伴随矩阵 A^* 的定义.

【解题分析】 题设未给出 A^{-1} 存在的条件,所以公式 $A^* = |A|A^{-1}$ 不可直接应用,但由题意知结论对 A 可逆应该也成立,即假设 A 可逆,则

$$(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|\cdot\frac{1}{k}A^{-1} = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*,$$

从而知只有(B)成立.题设中 $k \neq 0$, ± 1 的条件是为保证正确选项的唯一性,严格的做法是由伴随矩阵的定义出发,设 $A = (a_{ij})$, a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij},则 $A^* = (A_{ij})^T$,令 $kA = (ka_{ij})$, ka_{ij} 的代数余子式记为 B_{ij},则 $B_{ij} = k^{n-1}A_{ij}$,因此

$$(kA)^* = (B_{ij})^T = (k^{n-1}A_{ij})^T = k^{n-1}(A_{ij})^T = k^{n-1}A^*,$$

二、填空题:9~14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上。

9.【考点提示】 行列式、矩阵方程.

【解题分析】 由题设所给方程 $A^2B - A - B = E$,得

$$(A^2 - E)B = A + E,$$

即

$$(A + E)(A - E)B = A + E$$

又由已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,则

$$A + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

且

$$|A + E| = 3\cdot(4 + 2) = 18 \neq 0.$$

又 $A - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 且 $|A - E| = 2 \neq 0$,于是

$$B = (A - E)^{-1}(A + E)^{-1}(A + E) = (A - E)^{-1},$$

因此 $|B| = \dfrac{1}{2}$.

10.【考点提示】 矩阵运算.

【解题分析】 由已知 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$,则

$$(E + A)B = E - A,$$

即

$$B + AB + A + E = 2E,$$

即

$$B + E + A(B + E) = 2E$$

从而 $(E + A)(B + E) = 2E$,因此

$$(B + E)^{-1} = \frac{1}{2}(E + A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

11.【考点提示】 线性非齐次方程组的解

【解题分析】 由题设,原方程组的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$,增广矩阵为

$B=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

又原方程组有无穷多解之充要条件是 $r(A)=r(B)$ 且 $r(A)<3$. 由此知 $|A|=0$,

即 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=0$,可解得 $a=1$ 或 -2. 当 $a=1$ 时,对 B 施行行初等变换,得

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,得 $r(A)=1,r(B)=2$,无解;当 $a=-2$ 时,同样对 B 施行行初等变换,

得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,显然 $r(A)=r(B)=2<3$,因此 $a=-2$.

12.【考点提示】 等价无穷小.

【解题分析】 由题设,根据等价无穷小的定义,知

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{4}ax^2-1+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{1}{4}a,$$

因此 $a=-4$.

13.【考点提示】 二阶导数

【解题分析】 求二阶导数,并由其符号确定曲线的上凸区间.

对 $y=e^{-x^2}$ 求一阶、二阶导数得

$$y'=-2xe^{-x^2},y''=-2e^{-x^2}(1-2x^2)$$

当 $y''<0$,即 $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时,曲线向上凸.

14.【考点提示】 微分方程的通解

【解题分析】 方程 $y''+y=-2x$ 对应的齐次方程的特征方程为

$\lambda^2+1=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$,故对应的齐次方程通解为 $C_1\cos x+C_2\sin x$.

因为 $a=0$ 不是特征根,因此原方程的特解可设为

$$y^*=Ax+B,\text{代入原方程得}\quad A=-2,B=0.$$

所以原方程的通解为 $\quad y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x$.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.【考点提示】 函数求极限

【解题分析】

【详解 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}\dfrac{1}{(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=\dfrac{1}{2}$

【详解 2】 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{1+\cos x-1}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}(\cos x-1)}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}$$

16.【考点提示】 函数的导数与定积分

【解题分析】 为了便于合并，可对 $f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt$ 先作倒代换，$t=\frac{1}{y}$. 也可先求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的导数，再积分.

【详解 1】 令 $t=\frac{1}{y}$，则 $dt=-\frac{1}{y^2}dy$，当 $t=1$ 时，$y=1$，当 $t=\frac{1}{x}$ 时，$y=x$，于是

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt=\int_1^x\frac{\ln\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int_1^x\frac{\ln y}{y(y+1)}dy$$

$$=\int_1^x\frac{\ln t}{t(t+1)}dt$$

因此 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x\frac{\ln t}{t(t+1)}dt=\int_1^x\ln t\left[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{t(1+t)}\right]dt$

$$=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\int_1^x\ln t\,d(\ln t)=\frac{1}{2}\ln^2t\Big|_1^x=\frac{1}{2}\ln^2x.$$

【详解 2】 令 $F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$，则

$$F'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\ln x}{1+x}+\frac{\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\ln x}{x},$$

所以 $$F(x)=\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x\,d(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2x+C,$$