

衛生干部自學文化課本

平 面 几 何

鏡 婉 宜 編

人 民 衛 生 出 版 社

目 录

怎样学这本书.....

第一章 基本概念 7

一、几何图形..... 7

1.几何学(7) 2.体、面、线、点(9) 3.几何图形(13)

4.平面几何学(14)

二、直线..... 15

5.直线和它的性质(15) 6.射线、线段(17) 7.相等线段或不等线段(21) 8.线段的加减(23) 9.第一、二單元的小结(26)

三、圆的概念..... 26

10.圆(26)

四、角的概念和量法..... 29

11.角(29) 12.等角和不等角(31) 13.角的量法(34)

14.角的种类(38) 15.有特殊关系的角(41)

五、等量公理的应用和定理的组成..... 48

16.等量公理(48) 17.等量公理的应用(49) 18.证明、证明题(52) 19.命题、定理(56) 20.定理的组成(56)

21.用式子和符号表示语言(57) 22.第一章复习(61)

第二章 三角形..... 67

一、简单定理..... 67

23.关于邻补角或补角的定理(67) 24.对顶角的定理(73)

25.垂线(78) 26.关于余角的定理(82) 27.“证明”的重要(85)

二、三角形的概念..... 87

28. 多边形 (87)	29. 三角形和它的分类 (89)	30. 各种三角形的画法 (94)	31. 三角形中的主要线段 (96)	32. 两个三角形的公共元素 (98)
三、等腰三角形的性质 101				
33. 全等三角形的性质 (101)				
34. 等腰三角形的性质 (105)				
四、三角形全等的定理 112				
35. 三角形全等的第一个判定定理 (112)				
36. 三角形全等的第二个判定定理 (120)				
37. 三角形全等的第三个判定定理 (125)				
五、三角形的外角和它的性质 131				
38. 关于不等量的公理 (131)				
39. 三角形的外角和它的性质 (137)				
六、三角形的边和角的相互关系 143				
40. 三角形边角关系的定理 (143)				
41. 三角形角边关系定理 (146)				
42. 逆定理 (151)				
43. 三角形两边的和与差 (152)				
七、直角三角形全等的判定定理 156				
44. 直角三角形全等的判定定理 (156)				
八、基本作图题 164				
45. 解作图题 (164)				
46. 作图题 (作等角) (164)				
47. 作图题 平分一个已知的角 (165)				
48. 作图题 1 作已知线段的垂直平分线 (166)				
49. 作图题 (过直线上一点作直线的垂线) (167)				
50. 作图题 (过线外一点作直线的垂线) (167)				
51. 按照已知条件求作三角形 (168)				
52. 第二章复习 (172)				
第三章 平行线 177				
一、基本定理 177				
53. 两条直线与第三条直线相交所成的角 (177)				
54. 平行线 (179)				
55. 两条直线平行的判定定理 (181)				
56. 平行线的作图 (183)				
57. 平行线公理 (186)				
58. 平行线的性质定理 (186)				
二、平行线理论的应用 189				
59. 两边互相平行或者互相垂直的两个角 (189)				
60. 三角形的				

- 內角和定理(194) 61. 定理(斜边与短边的关系定理)(197)
62. 第三章复習(199)

第四章 四边形204

一、平行四边形204

63. 四边形的边、角(204) 64. 梯形(204) 65. 平行四边形
(205) 66. 平行四边形的边、角和对角线的性質(205)
67. 平行四边形的条件(或判定定理)(210) 68. 特殊的平行
四边形(216)

二、应用平行四边形的性質可以証明的定理219

69. 定理(平行线截等线段定理)(219) 70. 定理(三角形
两边中点连线定理)(220) 71. 第四章复習(225)

第五章 圓230

一、圓心角和弧、弦、弦心距間的关系230

72. 等弧的定义(230) 73. 圓心角、弧、弦、弦心距的定理
(231)

二、圓的切线236

74. 一点与圓的位置(236) 75. 圓的切线(236) 76. 切线
的判定定理(236) 77. 切线的性質定理(237)

三、圓周角240

78. 圓周角定义(240) 79. 弦切角定义(246) 80. 定理(弦
切角定理)(246) 81. 作圖題(过圓外一点作切线)(248)
82. 第五章复習(251)

第六章 相似三角形254

一、线段的比和比例254

83. 两条线段的比(254) 84. 比例线段(255)

二、相似三角形258

85. 相似三角形的定义(258) 86. 定理(截成相似三角形定
理)(261) 87. 三角形相似的判定定理(265) 88. 直角
三角形相似的判定定理(275)

三、三角形中各綫段間的相互关系284

89.射影 (284) 90.定理 (直角三角形中的比例綫段定理)

(285) 91.勾股定理 (287) 92.第六章复習 (290)

附 录

一、面积的計算方法295

二、体积和表面面积的計算方法298

怎样学这本书

一、学习每个名词时，一定要边记定义，边画图形，决不可以脱离图形而去背条文。要做到既能正确地叙述定义，又能画出它的图形来；

二、学习公理、定理时，必须紧密地联系图形，记清它们的条件和结论（什么叫“条件”、“结论”以及分辨条件和结论的方法，以后再讲），既能正确叙述内容，又能画图表示；

三、画图时必须准确而清楚。只有这样，才能帮助我们寻找图形间的关系；

四、做练习时必须对课文有比较深刻的理解，要在记住名词的定义和公理、定理的内容以后，再做习题，并且要尽可能地自己做题。做完以后，作为批改作业而与题解对照更正。对于自己错误的地方，要注意研究发生错误的原因，以便今后纠正；

五、为了便于记忆定理、公理的内容，我们对于大部分的定理和公理，都是先作完整的叙述，后又做简要叙述；这些简要叙述，只代表定理的大意而不够完整。因此，在学习时必须了解完整叙述的基础上，再记忆简要叙述，以免应用时发生错误；

六、本书第一章的第一节是常识，只要看过即可。其他各节是几何学的基本知识。由于名词较多，而内容方面，在初学者来讲也感生疏，因此在学学时，要把每节中的名词记住以后，再往下学习；

七、第二章是几何学的基本定理，也是以下各章的基础，所以必须掌握（能记忆并能应用）这些定理。为此必须做到：

1. 能分辨定理的条件和结论；能完整地叙述或简要叙述定理的内容；能结合图形并能应用定理去解决有关问题；
2. 能独立思考证题方法，并能写出推理过程（什么叫“证题”，以后再讲）。

此外还有几点说明：

一、为了贯彻直观教学的原则，我们在本书最后附一些图形，便于读者

通过观察图形，先直接認識圖形的某些性質，然后再从理論上来理解这些性質产生的道理。用到这些图形时，先沿着虚綫剪下来，而后按課本上的規定使用；

二、証明定理或証明例題时，課本上提示的“思考方法”并不是証題的格式，而是証題的思考必經阶段。所以在自己做題时，决不可把这項列入。但在証題时，必須經過这样的思考过程，才能找到証題方法（做題时，可以把所思考的証題方法写在另外的紙上，而不要写在習題本上）；

三、作題时最好不看或少看題解，以免养成依賴習慣。如果題中有圖，要先把圖画在習題本上，然后做題。在沒有講画圖方法以前，就用習題3的6題的画法，用一小張白紙把圖画下来，貼在習題本上。如果題中未画圖形，就要按照題中的条件，把圖画好（这样的題，題解中都有画圖方法），然后做題；

四、用小体字排印的“注意”，都是解釋这一段課文中容易混淆或应注意的地方。所以初学者，必須閱讀；

五、画圖用的工具是圓規、直尺、三角板、量角器、鉛筆、橡皮等。讀者必須准备一套，以便于學習。至于各种工具的用法，在課本中都一一做了說明；

六、課本后面，附有面积和体积計算公式，以供計算面积、表面面积和体积之用。

編 者

第一章 基本概念

一、几何图形

1. 几何学 为了滿足生产生活的需要，我們用各种材料制成形状、大小各不相同的多种多样的物体。例如，車、船、磚、書以及皮球、鉄球等等。它們的形状和大小，都是根据它們的用途来决定的。例如，船的形状一般要中間大两头小，航行时才能减少水浪的阻力；船的大小也要随它的用途来决定。又如：子彈的大小要适合槍膛，它的形状必須前端尖，才能更好的發射出去。

同样，为了滿足实际工作的需要，我們常常要确定一个物体的位置。例如，农村中的水庫要建設在恰当的位置；机器上的每一个零件都应装配在一定的位置上；在戰場上，需要判別清楚敌人火力点的位置或与我軍陣地間的距离。

所以，研究物体的形状、大小以及它們相互的位置是十分重要的，从而就构成了人类知識的一个領域，成为一門科学。

研究物体的形状，大小和相互位置的科学叫做几何学。至于物体的物理性質（重量、顏色、以及水冻结成冰、冰溶解成水或粉笔摔碎成小塊等）和化学性質（紙能燃燒等）以及制成物体的材料等，由于科学的分工，分别由其他科学去研究。

由上所述，我們知道，几何学和其他科学一样，也是由于人类生产和生活的实际需要而产生的。例如，古代埃及，由于尼罗河常年的泛濫，冲坏了房屋和耕地的疆界。泛濫以后，为了修复它們，就需要测量地面上的某些距离和面积。为了完成这些工作，必須掌握适当的規律，以便計算距离、面积和繪制土地的圖样等等。这些規律曾經被研究出来并且記載下来。后来，这些規律傳

到希腊，经过希腊人的补充和整理，使这些规律发展成为一门完整的科学。他们把这门科学叫做“几何学”^①。

我国关于几何学的研究，已有几千年的历史，并且有很多伟大成就。两千多年前，我国陶器花纹就有菱形（如图1之（1））、正方形（如图1之（2））和圆内接正方形（如图1之（3））等几何图案。在我国的一部数学书“周髀算经”里，已经讲到直角三角形（如图1之（4））各边的关系问题。南北朝时，伟大的数学家祖冲之（公元429—500）曾经精确地计算出圆周率的近似值在3.1415926和3.1415927之间。到明末徐光启把“几何学”翻译出来，于是我国对于几何学的研究就更加系统了。

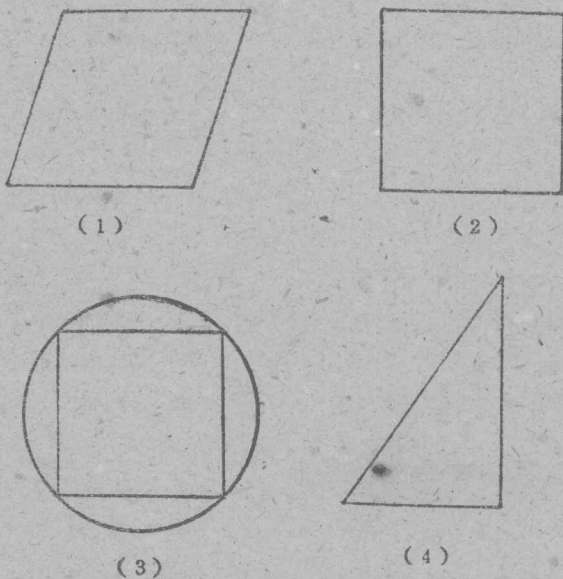


圖 1

^①几何学这个名词是从希腊文翻译过来的。它原来的意思是“土地测量的技术”现在虽然仍用这个名词，但是这门科学的内容已经不限于土地测量了。

随着人类社会生产的发展，几何学也就发展起来，成为许多实用科学的基础。如测绘、航海、天文、物理、机械及工程等，没有一样离得开它。在军事方面，如射击、航空以及各种军事工程建设，都要运用几何学的原理。在医学方面，如解剖学、外科学及仪器设计，医学地理学等也要用到几何学。

2. 体、面、线、点

(1) 几何体 如果我们只研究物体的形状和大小而不研究它的其他性质（物理性质和化学性质）的时候，我们就把这个物体叫做几何体或简称体。也可以说：体就是物体的形状和大小。譬如，形状和大小都相同的两个物体，虽然它们的重量、颜色以及制成它们的材料等都不相同，但是它们都是相等的几何体。例如，大小相同的一个铁球和一个木球就是相等的几何体。

因为物体都有长、宽、高三度，从而，体也有长、宽、高三度。

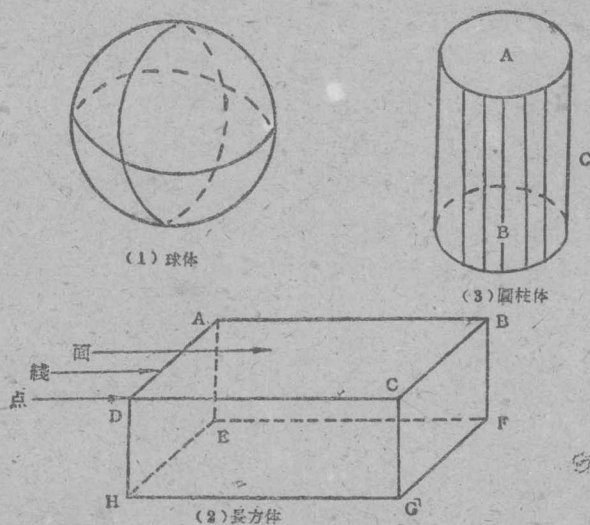


圖 2

因为几何体就是从实际的物体中把它的实际内容（物理性质和化学性质）抽掉而得到的外形。所以实际的物体与几何体的区别是：实际的物体除了形状、大小以外，还有它的实际内容，而几何体就只有形状和大小。

由于物体有各式各样的形状，因而就有各式各样的几何体。例如，钢珠，乒乓球，篮球，网球等都是球体，它们只有大小的区别。如图2之（1）就是球体的图形。又如，砖、书、长方形的木头块及长方形的纸盒等，都是长方体。图2之（2）就是长方体的图形。再如，纱布卷、汽油桶以及房屋的柱子、枪、炮的筒子等，都是圆柱体。如图2之（3）就是圆柱体的图形。

注意 图中的虚线是表示在图形后边的线，在图形正面是看不到的。

（2）面 任何物体都是用它的外表面来和邻接它的其他物体分开的。例如，使一块砖或一个铁球和邻接它的空气分开的，就是这块砖或这个球的外表面。面就是物体或体的外表面，因而是永远与体连在一块，决不能离开体而单独存在的。所以，面是只有大小而没有厚薄的。或者说，面是只有长宽两度。例如，一张极薄的纸，即使它的厚度只有几万分之一厘米，也算是体，因为它有厚度。而这张薄纸的外表面才是面。

面本来是不能离开体而单独存在的，不过为了便于研究，我们可以离开体而单独地研究面，并且可以画出它的图形。但绝不能忘记面只有大小没有厚薄。例如，图2之（2）的长方体共有六个面（见图3）。圆柱体有三个面，如图2之（3）中的A面、B面及C面（周围的面）。

由于物体的外表面有平坦的，也有弯曲的。所以面也就有平面与曲面之分。例如，平静的水面，光滑的玻璃面和黑板面，都是平面，图3中的六个面都是平面。又如圆柱体的侧面（周围的面）及球体的表面，都是曲面。

（3）线 面和面相交的地方就是线。例如，墙壁面和地板面相交的地方就是线。也可以说，线就是面的边界，因而它是永

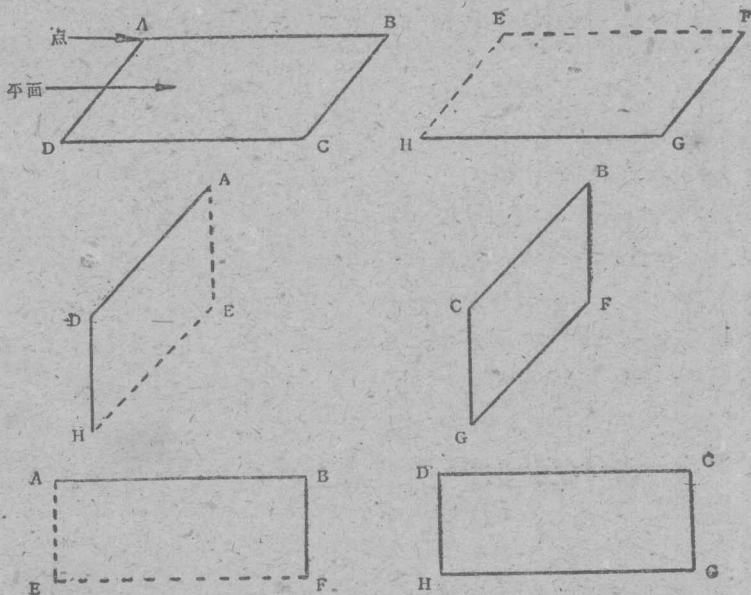


圖 3

远与面連在一塊，決不能离开面而单独存在的。又因为面是沒有厚薄的，所以綫是沒有粗細而只有長短的。或者說，綫只有長度。这个意义也可以从实际中来体会，例如，人們用繩子測量長度时，从不計較这繩子的粗細，因为这繩子的粗細对測量長度是沒有意义的。因此我們也将几何上的綫看做是沒有粗細的。

綫本来不能离开面或体而单独存在，不过为了便于研究，我們可以单独地来研究綫，并且画出它的圖来。例如圖 3 中的第一个平面的边界就是綫（圖 4 之（1））。又如圖 2 之（3）中 A 面的边界也是綫（圖 4 之（2））。

因为面的边界有各种不同的形状，所以綫就有直綫与曲綫之分。例如圖 4 之（1）都是直綫；圖 4 之（2）是曲綫。

因为实际上，几何的綫是沒有的，又由于我們需要单独地研究綫，因此就可以把一些物体当做綫来看待（就是只注意長度，

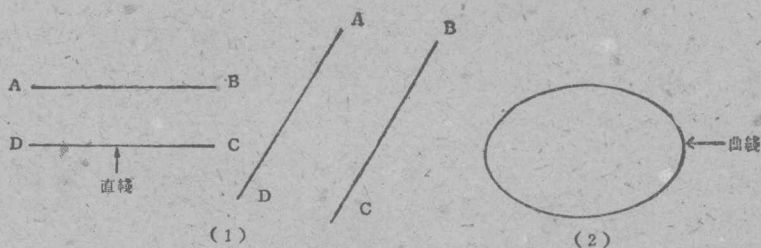


圖 4

而不管粗細，它們就是綫了)。例如，可以把竹竿、鉄絲、鉄軌和所画的綫的圖形看成是綫。

(4) 点 綫和綫相交的地方就是点。例如圖 3 中每个面的两条边綫在它們的尽头相交，这尽头就是点。也可以說，点就是綫的尽头或边界。因此点是永远与綫連在一起，决不能离开綫而单独存在的。又因綫沒有粗細，所以点就沒有大小而只有位置。这个意义，我們也可以从实际中来体会。例如，地圖上所画的城市只是一个点，它的意义只說明位置問題而沒有包括大小的問題。因此将几何上的点看成是沒有大小的。

圖 4 之 (1) 中每一条綫的两端就是点。通常用大写字母来表示点。例如，圖 4 之 (1) 中第一条綫两端的点，可以記为 A 点和 B 点，但常省略“点”字而記为 A 和 B。

由于在实际生活中沒有单独存在的点，而我們又需要单独地研究它，因此就可以把一些物体当做点来看待（就是只注意位置而不管大小，它們就是点了）。例如，雨点、子彈、小石子、笔尖以及画在紙上的点的圖形等，都可以看成是点。

綜上所述，可知在客观实际中只有体的存在，而面、綫、点都是依附于体而存在的，也就是說不可能有一个孤立的面、綫或点的。但是为了便于研究它們的性質，因此常将点、綫、面、体分別講解。这并不是說它們是互不联系的。并且當我們单独地研究体、面、綫、点时，它們的区别是这样：体就是物体的形状和大小，所以体有長、寬、高三度。面就是体的表面或者体的边界，

所以面只有長、寬兩度，綫就是面的边界，所以綫只有長度。点就是綫的尽头或两条綫相交的地方，所以点只有位置而沒有大小。通常用大写字母表示点。

(5) 点、綫、面、体間的运动关系 把笔尖在紙上移动就画出一条綫，我們把笔尖看成点，就可以想象到：点运动产生綫。也就是說：綫是由許多点集合起来而成的。

用鉋子刨一塊木头，刀口經過的地方給了我們面的形象，我們把刀口看成綫，就可以想象到：綫运动产生面，也可以說：面是由許多条綫集合起来而成的，从而也就是許多点集合而成的。

把一个圓板竖着用力旋轉，当圓板轉得很快的时候，就象一个球体，我們把圓板看成面，就可以想象到：面运动产生体。也可以說，体是由面集合而成的。

習 題 1

1. 什么是几何体？它与物体有什么区别？
2. 什么是几何上的面？一張極薄的紙是否可說它是几何上的面？
3. 什么是几何上的綫？一根極細的头髮，是否可說它是几何上的綫？
4. 什么是几何上的点？我們在黑板上用粉筆点一白点，是否可說它是几何上的点？
5. 在一塊長方形的木头上可以看出多少面？多少綫？多少点？一張报纸又是怎样呢？
6. 面、綫、点为什么不能离开体而单独存在？如果把它們单独地来研究，它們之間有什么区别？
7. 就日常所見的現象，各举一例說明：“点运动产生綫”，“綫运动产生面”。

3. 几何圖形

(1) 定义 点、綫、面，体中的一种或几种結合起来的形象，都叫做几何圖形。例如，一个長方体或一个球体都是几何圖形。長方体的每一个面，面的每一条綫，綫的每个点，也都各是几何圖形。所以点、綫、面、体是几何圖形的基本元素。

因为物体的形状和大小就是几何图形中的体，所以说几何学就是研究几何图形的相互位置和性质的科学。

(2) 几何图形的性质 在实际的物体中，如果不受它的物理性质和化学性质的影响，那末无论把物体的位置怎样移动，它的形状和大小都不会改变。例如，把一个茶杯或一个凳子从一个地方移到另一个地方，它的形状和大小同原来的一样。而几何图形是不含物体的实际内容的。所以，无论怎样在空间移动位置，它的形状和大小还是同原来的一样。简单地說就是：几何图形可以在空间移动而不改变它的形状和大小。几何图形的这种性质又叫做移形公理①。

根据移形公理，我们就可以把几何图形的位置随便移动，然后再研究它的形状，大小以及与其他几何图形的关系。

(3) 全等形 把一个几何图形放到另一个几何图形上面，如果它们的各个部分都能完全重合，这两个几何图形就叫做全等形。拿出直观图形第一号（是两个长方形），对着光亮，把这两个长方形重叠起来，因为它们的各个角和各条边都能完全重合，所以它们是全等形，或者说这两个长方形全等。

全等就是完全相等的意义，也就是说，不仅两个几何图形的形状和大小（面积）一样，而且还要能够完全重合才是全等。例如，一个长方形的宽是2厘米，长是4厘米，它的面积就是 $2 \times 4 = 8$ 平方厘米（圖5之（1））；另一个长方形的宽是2.5厘米，长是3.2厘米，它的面积就是 $2.5 \times 3.2 = 8$ 平方厘米（圖5之（2））。这两个几何图形的形状和大小虽然相同，但是不能够重合，所以，只可以说它们的面积相等，而不能说是全等。

4. 平面几何学

(1) 平面几何图形 如果几何图形上所有的点都在一个平

①从实际工作中积累起来的經驗，不需証明而人人都承認的眞理叫公理。这里所說的眞理，是指相对眞理。

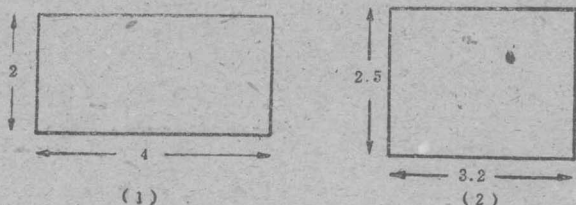


圖 5

面內，这种几何圖形叫做平面几何圖形。例如，任何形状的平面（長方形，圓形，三角形）或直綫都是平面几何圖形；如果圖形上的所有的点不全在一个平面內，这种几何圖形叫做空間几何圖形。例如，任何形状的几何体都是空間几何圖形。

(2) 平面几何学 只研究平面几何圖形的性質的几何学叫做平面几何学。这个課本就是平面几何学。

習 題 2

1. 什么是几何圖形？构成几何圖形的基本元素是什么？
2. 在平坦的紙上或黑板上画的長方体是不是平面几何圖形？
3. 几何学研究的对象是什么？平面几何学研究什么？
4. 移形公理是什么？怎样才知道两个几何圖形是全等的？

二、直 綫

5. 直綫和它的性質

(1) 直綫 一条拉得很紧的綫，或从小孔里射进来的光綫，都給了我們直綫的形象。例如，圖 4 之 (1) 中的綫都是直綫。

直綫是最簡單的几何圖形，我們学习平面几何学就从直綫开始学习起。

因为点运动产生綫，所以把直綫看成是一个点向两个正相反的方向笔直运动时而产生的。由于空間是沒有止境的，这个点的运动也是沒有止境的。因此在几何学里，直綫是沒有尽头的。所

以，我們把直綫想象成是向兩方無限延長(或伸長)着的。例如，圖4之(1)中只是畫出直綫的一部分。

(2) 直綫的性質 如果把拉緊了的一條綫看做直綫，它的兩端看做兩個點，我們就可以体会到：通過兩個點只有一條直綫。又如我們在紙上或黑板上畫兩個很小的點，把直尺邊靠緊這兩個點，用筆沿尺邊畫綫通過它們，就可以看到：通過兩個點可以引(或畫)一條直綫。如果我們再畫一條直綫通過這兩個點，就可以看到這兩條直綫重合成一條較粗的直綫。但是直綫是不計較粗細的，當兩條或幾條直綫重合在一起時，雖然粗一些；也只能看成是一條直綫。所以說：過任意兩點，可以引一條直綫，並且只可以引一條直綫(如圖6之(1))。這就是直綫的性質，或者叫直綫公理。簡單地說成：過兩點只可以引一條直綫。

根據直綫公理可以推知，兩條直綫相交只能有一個交點。

這個事實可以從實際經歷中來驗證，例如，牆面的一條綫與地板面的一條綫只能相交於一點。又如我們在紙上或黑板上畫兩條相交的直綫，也只能看到一個交點(如圖6之(2))。

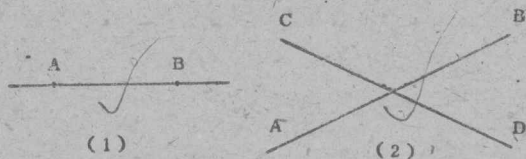


圖 6

在實際工作中，經常要應用到直綫公理。例如，要在野外測定一條直綫，我們先把一根標竿插到地上，又把第二根標竿插在另一個地方(圖7)，把標竿插下的地方看做點，這兩根標竿就定出一條直綫(根據直綫公理)。如果要把第三根標竿也插在這條直綫上，我們可以移動標竿，直到把眼睛靠近它來看前面兩根標竿時，它正好把前面兩根竿遮住(圖7中的人正在這樣做)，就把它再插下去。用同樣方法可以把許多標竿插在一條直綫上。