优化与最优控制中的计算方法

叶庆凯　王肇明 编著

科学出版社

优化与最优控制中的计算方法

叶庆凯　王肇明　编著

科　学　出　版　社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书综合介绍了优化与最优控制中的数值计算方法，包括方法的推导，程序框图，计算实例. 并给出了用 FORTRAN 语言编写的实用程序及其使用说明. 全书共十章：内容包括无约束与有约束优化的数值方法，变分法基础，极大值原理与动态规划，开环最优控制的数值计算方法，代数 Riccati 方程解法，奇异最优控制等.

本书可供计算技术、经济管理、力学、自动化技术等专业的师生参考，也可供有关专业的科技人员参考.

优化与最优控制中的计算方法

叶庆凯 王肇明 编著

责任编辑 李淑兰

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年6月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1986年6月第一次印刷 印张：13 1/2
印数：0001—6,600 字数：354,000

统一书号：15031·723
本社书号：4741·15—8

定价： 3.80 元

前　言

近年来，工程技术中的许多设计问题，越来越多地希望通过适当的数学方法，经由电子计算机的计算得到最优设计的效果．随着电子计算机在我国的逐步普及，优化技术在各个领域中越来越受到重视．

在作为现代控制理论基础之一的最优控制理论中，虽然理论上早就提出了著名的极大值原理与动态规划，但要用这些理论来解决实际的工程技术问题却遇到了很大的困难． 近年来，利用推广到函数空间的优化技术，较好地解决了开环最优控制的计算问题．

本书第一章介绍必要的预备知识．第二章至第四章介绍无约束及有约束的参数极小化方法．第五章介绍用变分法解动态最优问题的方法． 第六章介绍极大值原理与动态规划，并指明用它们解决具体问题时的困难所在．第七章介绍计算最优控制问题的数值方法，重点在于应用函数空间中的优化技术的方法．大家知道，对于线性二次问题，求最优控制的关键在于求解 Riccati 方程，第八章中比较系统地介绍了代数 Riccati 方程的数值解法．第九章是关于奇异最优控制的内容．本书三个附录中分别给出了用 FORTRAN 语言编写的参数最优，开环最优控制计算，代数 Riccati 方程求解的实用程序．第十章是关于这些程序的使用说明．

本书的主要对象是希望用数值方法解决具体工程技术问题中的优化与优控课题的工程技术人员以及有关专业的高年级学生与研究生． 本书的重点在于讲述这些方法的基本原理，方法本身的介绍以及使用这些方法时应注意些什么． 由于篇幅所限，对于这些方法的理论部分，例如收敛性证明等几乎没有涉及，有兴趣的读者可参考其它有关的书籍．

作者曾用本书作为讲义在各种场合多次进行讲授，许多同志对本书的内容及安排提出了很多宝贵意见．另外，孟志华同志对原稿作了仔细的校阅．席少霖同志、王恩平同志也审阅了本书．在此对有关同志表示衷心的感谢．

本书编写的程序在中国科学院数学所的 FELIX-512 计算机上进行了验证．本项目得到了中国科学院科学基金的资助．作者对有关单位深表感谢．

由于作者水平有限，书中一定有不少缺点、错误，诚恳地希望读者批评指正．

目　　录

第二部分　动态最优问题

第三部分 计算程序

第一章 概 论

1.1 最优化问题的提出

早在十七世纪就提出过各种求最大最小的问题，以及某些求最大最小的法则，但当时还没有系统的理论．微积分理论的建立给出了求函数极值的必要条件，为最优化问题的解决提供了理论基础，然而在以后的二、三百年间，这方面的发展是缓慢的，这期间的工作只是考虑了有约束的复杂情况，并发展了一套变分方法．但当我们用这些精确的分析方法来处理具体的优化问题时却遇到了很大的困难，因为它所归结成的数学问题通常是极其难于处理的，常常使人一筹莫展．所以说这一时期的工作没有能为真正解决优化问题提供有效的好办法．

电子计算机的出现为解决这类问题提供了有力的工具，但计算实践表明，经典的分析方法往往不是一种好的计算方法．因此各种各样的求极值的计算方法像雨后春笋一样迅速地发展起来．

优化计算方法蓬勃发展的动力首先来自空间工程．由于在五十年代初，进行优化计算的成本是很贵的，只有在费用十分庞大的空间工程中才能使用．在这样的工程项目中，只要能节约 1—2%，就是一笔可观的数目，足以补偿优化计算的花费．随着电子计算机的发展，优化计算的成本不断下降，在建筑结构、船体设计、控制工程、化学工程等许多大型工程设计，生产控制中都逐步开始使用了优化技术，甚至像经济规划、经济管理等某些社会科学领域也提出了优化问题．到了今天，很多优化程序已经存储于各种计算机的程序包中，使用起来十分方便，这就为优化方法渗透到工业生产，人民生活的各个方面创造了极为有利的条件．总之，生产的需要，计算机的应用，促进了优化方法的发展．至今它已成为一门新

兴的学科，受到普遍的重视.

在任何一个优化问题中都必须要有一个“指标”，即我们要求达到最优的是什么. 可以说，优化问题中的首要问题是如何选择指标. 例如，一架飞机从甲地飞往乙地，可供选择的路线各种各样，飞行的方式也各不相同，那末选择什么样的飞行方案为好呢？这里就有一个以什么标准来评价的问题，或者说存在一个如何确定指标的问题. 指标可以是要求所耗费的燃料最少，或飞行的时间最短，也可以是要求安全性能最好. 更常见的情况是要求某个综合指标达到最优.

一般情况下，在指标确定了以后，相应的优化问题就有了确定的结果. 指标不同，结果就会不一样. 因而，所得到的结论是否符合实际，是否可以采用，首先就由指标是否选得合理来决定. 往往由于指标选得不合理，因而导致出荒唐的结果. 例如，在经营一个工厂的时候，如果我们把它的开销而不是它的利润作为指标，那么优化的结果只能是把工厂关掉，因为只有在这时指标才能达到它的极小值零. 显然，这不是我们需要的结果.

指标的选择方法是多种多样的，指标选择的好坏，直接关系到所得结论是否合理、可行. 为了能选好适当的指标，就需要认真分析、研究对象的条件与特征.

指标通常依赖于某些参数，或者某些函数. 优化问题是指如何在允许范围内选择这些参数值或函数形式使指标为最优，也就是使指标取最小值或最大值. 当指标是某些参数的函数时，这样的问题称为静态最优或参数最优；当指标是某些函数的函数(即所谓泛函)时，相应的问题称为动态最优或函数最优. 本书的第一部分讨论静态最优问题，第二部分讨论动态最优问题.

实际问题往往是十分复杂的，这里仅举一些简单的，但具有代表性的例子.

(1) 函数极值问题

例 1：求函数

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

的极小值与极大值.

根据数学分析中的极值原理，$f(x)$ 的极值只可能发生在使 $\frac{df}{dx}=0$ 的那些点上. 令

$$\frac{df}{dx}=2x(1-x^2)e^{-x^2}=0,$$

解得 $x=\pm 1,\ 0$. 由于

$$f(0)=0,\quad f(\pm 1)=\frac{1}{e},$$

可以判断 $x=+1$ 或 -1 时,函数取极大值 $f_{\max}=\frac{1}{e}$;当 $x=0$ 时,函数取极小值 $f_{\min}=0$.

例 2: 求 Bessel 函数

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)d\theta,\quad x\geqslant 0$$

的极小值.

这时我们仍可采用例 1 中的方法,先求 $J_0(x)$ 的一阶导数再令它为零,得

$$\frac{dJ_0(x)}{dx}=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(x\sin\theta)\sin\theta d\theta=0,\quad x\geqslant 0,$$

但现在求解这一方程出现了困难. 不论对于什么 x 值,要想得到相应的 $J_0(x)$ 或 $\frac{dJ_0(x)}{dx}$ 值都需要进行一次数值积分. 可见求解 $J_0(x)$ 的极小值并不是一件简单的事情.

实际问题经常还要复杂得多.

(2) 最远射程问题

若以初速度 $\mathbf{v}_0$ 投掷物体,问初速度与水平之间的夹角 φ 为何值时,水平射程最远.

例 3: 在空气阻力与速度大小成正比，即 $\mathbf{R}=-c\mathbf{v}$ 的假设下求解最远射程问题.

此时物体的运动方程为

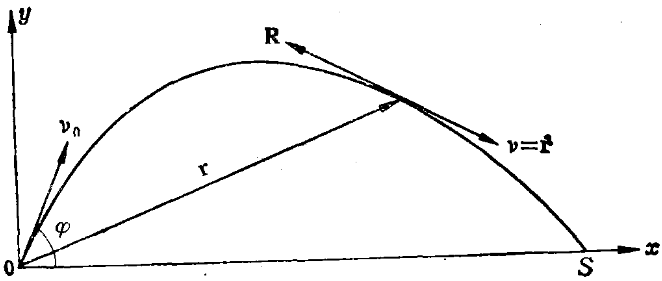

图 1.1　最远射程问题

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v},$$

其中 $\mathbf{g}$ 是重力加速度向量，$\ddot{\mathbf{r}}$ 是物体的加速度向量，$k = c/m$，而m是物体的质量．上述方程的解是

$$x = \frac{v_0 \cos\varphi}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$y = -\frac{g}{k^2}\left[\left(1 + \frac{k}{g} v_0 \sin\varphi\right)(e^{-kt} - 1) + kt\right].$$

令 $y(T) = 0$，可得落地时间 T．再将它代入 x 的表达式就可得到射程 $S = x(T)$，即

$$S = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kT})\cos\varphi,$$

其中

$$kT = \left(1 + \frac{k}{g} v_0 \sin\varphi\right)(1 - e^{-kT}).$$

显然，这里S是φ的函数，为了求得在各种φ角下的最远射程$S_{\max}$，需要求解方程 $\frac{dS}{d\varphi} = 0$．但由于这里T也是φ的函数，要写出 $\frac{dS}{d\varphi}$ 的分析表达式不是容易的事．

例4：在空气阻力与速度平方成正比，亦即 $\mathbf{R} = -cv\,\mathbf{v}$ 的假定下求解最远射程问题．

仍用例 3 中的符号，物体的运动方程为

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - kv\,\mathbf{v},$$

这一方程通常只能用数值方法求解. 要得到 S 相对于 φ 的导数的分析表达式，一般说来是不可能的.

本书讨论的优化方法分成两大类. 一类适用于可以得到指标相对于自变量的导数的情况，另一类适用于不能得到这些导数的情况.

(3) 求解非线性方程组

假设要求解的方程组为

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

现在构造一个指标函数

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1, \cdots, x_n).$$

显然，函数 φ 是恒大于等于零的，且只有原方程的解才能使它等于零. 亦即若原方程有解，此解必为函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的极小值点. 因此，解非线性方程组的问题便转化成为求 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的极小值点.

当然，一般说来，使 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 取极小值的解不一定是原非线性方程组的解. 只有当这极小值为零时，两个解才是一致的.

(4) 条件极值问题

实际问题中另一类经常发生的优化问题是在一定的约束条件下来求最优参数. 这种约束可以是等式约束，也可以是不等式约束.

例 5: 要制造一个长方体形的箱子，在给定容积的条件下，如何选取长、宽、高才能使用料最省.

以 x, y, z 分别记箱子的长，宽，高. 现在的问题即在约束条件

$$xyz = C$$

下求函数

$$f(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$$

的极小值点．这是一个在等式约束下求极值的问题．

例 6：为了使邮包能装进邮局的邮政口袋，邮局常限制邮包的最大尺寸．例如规定邮包尺寸应满足以下条件：

$$x_i \leqslant 1 \text{ 米}, \; i=1, 2, 3$$

和

$$x_1 + 2(x_2 + x_3) \leqslant 1.8 \text{ 米},$$

其中 x_1，x_2，x_3 分别是邮包的长，宽，高．问在这些限制条件下邮包的最大体积是多少？亦即要求在上述条件下函数

$$V = x_1 x_2 x_3$$

的极大值是什么．当然，这里还必须附加条件

$$x_i \geqslant 0, \; i=1, 2, 3.$$

这是一个具有不等式约束的极值问题．一般说来，它比等式约束下的极值问题更复杂一些．

(5) 泛函极值问题

以上这些例题都是静态最优问题．还有另一类最优问题，即动态最优问题．这时指标泛函常表现为某个函数的积分．

例 7：设在平面上给定了两点 A 及 B，试求所有连接这两点的光滑曲线中长度最短的那一条．

设 A，B 两点的坐标分别为 x_A，y_A 以及 x_B，y_B．现在的问题就是在所有满足条件

$$y_A = y(x_A), \; y_B = y(x_B)$$

的连续可微函数 $y = y(x)$ 中，寻求出一个使泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

取极小值的函数来．

例 8：假设某飞机的重量 W，推力 T，以及阻力 D 均为常数．若以 h 表示飞行高度，θ 表示飞行的爬升角，V 表示飞行速度，那末它们之间的关系为

$$\frac{dh}{dt} = V \sin\theta,$$

$$m\frac{dV}{dt}=-mg\sin\theta+T-D,$$

其中 $m=\frac{W}{g}$. 显然,当给定了一个爬升方案 $\theta(t)$ 后,从上述第二个方程中可以解出 $V(t)$,代入第一个方程,可以决定 $h(t)$. 现在的问题是要求一个最优的爬升方案 $\theta^*(t)$, 使飞机从高为 h_1, 速度为 V_1 的水平飞行状态过渡到高为 h_2, 速度为 V_2 的水平飞行状态所需的时间最少.

这一类泛函极值问题,除极少数特殊情况外,都难于得到分析解. 数值计算是解决这类问题的最有效的办法之一. 由于所涉及的计算量十分巨大,所以只是在高速电子计算机普及使用后才得到了真正的发展.

1.2 一元函数极值理论简介

(1) 对于实数的集合 $\{x\}$, 如果存在实数 x_0, 对于每一个 $x\in\{x\}$, 均有 $x\leqslant$ (或 $\geqslant$) x_0, 则称 x_0 为集合 $\{x\}$ 的上(或下)界.

集合 $\{x\}$ 的所有上界中的最小者称为它的上确界, 记为 $M^*=\sup\{x\}$; 集合 $\{x\}$ 的所有下界中的最大者称为它的下确界,记为 $m^*=\inf\{x\}$.

定理: 如果集合 $\{x\}$ 是有上(下)界的,则它一定有上(下)确界.

(2) Weierstrass 定理

定理: 设 D 是一个有界闭域(即 D 包含了它本身的边界),函数 $f(x)$ 是定义在闭域 D 上的连续函数,则

(i) $f(x)$ 在 D 上是有界的;

(ii) $f(x)$ 在 D 上必能达到它的上确界与下确界,即它的最大值与最小值.

证明: (i) 假设 (i) 不成立,先假定 $f(x)$ 无上界. 那么,对