◆全国25省市著名考研辅导班精品考研书◆ 2003年

2003版

人大版考研名师导学系列

2003年考研数学辅导讲义（理工类）

组编 北京启航考试学校

主编 赵达夫 刘晓

作者简介

北方交通大学数学系教授；全国著名考研数学辅导专家；主编人大版《2003年考研数学辅导讲义（理工类）》、《2003年考研数学题型分析与模拟试题（理工类）》、《考研数学模拟考场（理工类）》、《考研数学最后十套模拟试卷（理工类）》等。

中国人民大学出版社

全面反映考点难点重点　深度总结考试命题规律

2003年考研数学辅导讲义(理工类)

组　编　北京启航考试学校

主　编　赵达夫　刘　晓

编　者　赵达夫　刘　晓　龚漫奇
　　　　吴灵敏　王秋媛

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

2003 年考研数学辅导讲义．理工类/赵达夫，刘晓主编．4 版
北京：中国人民大学出版社，2002

ISBN 7-300-03103-X/G・577

Ⅰ．2…
Ⅱ．①赵…②刘…
Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-教学参考资料
Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 014048 号

2003 年考研数学辅导讲义（理工类）
组编　北京启航考试学校
主编　赵达夫　刘　晓

出版发行：中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
邮购部：62515351　门市部：62514148
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销：新华书店
印　　刷：中煤涿州制图印刷厂

开本：787×1092 毫米 1/16　印张：39.5
1999 年 5 月第 1 版
2002 年 3 月第 4 版　2002 年 3 月第 1 次印刷
字数：908 000

定价：49.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

出　版　说　明

在中国人民大学出版社、北方交通大学数学系、北京启航考试学校三方的精心策划和周密组织下，经过选题策划、提纲讨论、分工编写、修改定稿等艰苦细致的工作之后，《2002年考研数学辅导讲义（理工类）》（以下简称《辅导讲义》）和《2002年考研数学题型分析与模拟试题（理工类）》（以下简称《题型分析与模拟试题》）终于与广大读者见面了.

为使广大读者更好地了解本书，特作如下说明.

一、编写依据

1. 编写内容和范围依据. 我们对国家教育部制定的《全国攻读硕士学位研究生入学考试数学考试大纲》数学一和数学二的考试内容和考试要求进行了综合整理，这是本书编写内容和范围的依据.

2. 编写重点依据. 通过对历年尤其是近几年来理工类考研数学试题的系统扫描、筛选和分析，归纳、总结出复习重点和出题规律，这是本书编写重点的依据.

3. 编写难度依据. 本书编写老师近年来在考研辅导班中收集了大量的疑难问题，其中大部分为广大考生不易掌握的难点问题，这是确定本书编写难度的重要依据.

二、本书特色

本书不仅具有考研用书系统全面、重点突出、难点突出的基本特色，还在以下几方面具有鲜明的特点：

1. 强化复习内容的横向和纵向联系. 如第一篇第一章第一讲中，一共总结了20种求极限的方法，涉及函数、连续、导数、微分中值定理、定积分、级数等章的内容，知识跨度大，涉及高等数学部分的大部分知识. 避免了复习用书教材化的致命弊端，对广大考生的备考极为有利.

2. 注重解题思路和解题技巧的培养. 在本书中，不仅对单个典型例题进行解题思路分析和技巧介绍，而且对每一类型的题目（若干个典型例题）都进行全面总结，归纳解题技巧和方法. 避免了"就题论题"的题海战术，做到举一反三，对广大考生的复习有事半功倍之效.

3. 着眼考生整体需要，专题复习与专题练习相结合，综合复习与全真模拟相结合. 在《辅导讲义》中，在注重复习内容的全面性、系统性的同时，更为注重复习的重点和难点，以保证广大考生对应试内容有计划、有步骤地进行强化复习，在《题型分析与模拟试题》中，注重复习的综合性和实战性，以确保广大考生及时检测复习效果，巩固复习成果，强化临场实战感.

三、本书结构

全书分三篇共二十章(详见目录),与《大纲》考试内容完全一致.

按第×讲(专题)来安排每章的内容,是本书在结构安排上的最大特色.在每一讲中,内容按专题进行编写,知识跨度大,突破了传统的章节安排,使编写形式与内容更为统一.

本书总体策划和具体组编由北京启航考试学校负责,北方交通大学工科数学部主任赵达夫教授、数学系主任刘晓副教授任主编,参与编写的人员有赵达夫、刘晓、龚漫奇、吴灵敏、王秋媛等专家教授.这些专家教授多年参与考研试卷的阅卷工作,多年在本校及北京启航考试学校进行考研数学的教学工作,具有较高的学术造诣和丰富的教学经验.本书编写的具体分工如下:第一篇的第四、七章和第二篇的第四、五章由赵达夫编写;第三篇由刘晓编写;第一篇的第一、二、五章和第二篇的第三章由龚漫奇编写;第一篇的第三、六章和第二篇的第一、二章由吴灵敏编写.全书由赵达夫、刘晓审校、定稿.

去年我们的考研复习指南出版发行后,受到了广大读者的欢迎,不少专家和读者给我们提出了宝贵的意见和建议.今年我们在修改本书时对这些意见和建议均给予了充分的考虑和吸收.在此,我们对他们表示衷心的感谢,并欢迎同行专家和广大读者继续给予批评指正.来信请寄"北京9633信箱启航考试学校教材资料部(邮编100086)",以利再版修订和完善.

作　者

2002年3月

目　录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

本章导读

【大纲要求】

一、考试内容

函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；反函数、复合函数、隐函数和分段函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数；简单应用问题的函数关系的建立；数列极限与函数极限的定义以及它们的性质；函数的左右极限；无穷小；无穷大；无穷小的比较；极限的四则运算；极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理）.

二、考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数的概念，了解函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.
6. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系.
7. 掌握极限的性质及四则运算法则.
8. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
9. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限.
10. 理解函数连续性的概念，会判断函数间断点的类型.
11. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理），并会应用这些性质.

（注：这一部分对数学一、二、三、四四种试卷基本上是相同的，而考试要求中的 6、7、8、9 项，数学三、四两种试卷都降低了一个层次，请选择这两种试卷的考生注意.）

【本章结构与主要内容】

本章分两讲，第一讲是如何计算一个含有极限号的式子，其中重点是用洛必达法则求各种不定式的极限. 第二讲是函数、极限、连续剩余部分的内容，重点是寻找函数的间断点并判断其类型，以及复合函数、分段函数与函数记号的有关运算. 另外关于函数的介值定理和求方程根（或函数 0 点）的题目，主要放在第二章第三讲中，请读者留意.

第一讲　极限的计算

一、基本概念、内容、定理、公式

1. 利用函数的连续性.

(1) 如 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2) 初等函数在其定义区间内连续.

(3) 如 $f(x)$ 在 $\lim\varphi(x)$ 处连续，则 $\lim f(\varphi(x))=f(\lim\varphi(x))$.

2. 利用 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\iff\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

3. 基本初等函数在其定义的开区间的端点处的单向极限值.

(1) 常（常数函数）：$f(x)=c, D=(-\infty,+\infty), C(\pm\infty)=C$.

(2) 幂（幂函数）：$f(x)=x^a, D\supset(0,+\infty)$.

1) 当 $a>0$ 时，$(+\infty)^a=+\infty, (0^+)^a=0^+$.

2) 当 $a<0$ 时，$(+\infty)^a=0^+, (0^+)^a=+\infty$.

(3) 指（指数函数）：$f(x)=a^x, D=(-\infty,+\infty)$.

1) 如 $a>1$，则 $a^{+\infty}=+\infty, a^{-\infty}=0^+$；

2) 如 $0<a<1$，则 $a^{+\infty}=0^+, a^{-\infty}=+\infty$.

(4) 对（对数函数）：$f(x)=\log_a x, D=(0,+\infty)$

1) 如 $a>1$，则 $\log_a(+\infty)=+\infty, \log_a(0^+)=-\infty$；

2) 如 $0<a<1$，则 $\log_a(+\infty)=-\infty, \log_a(0^+)=+\infty$.

(5) 三（三角函数）：$f(x)=\sin x$ 或 $\cos x, D=(-\infty,+\infty), \sin(\pm\infty)=$ 不存在，$\cos(\pm\infty)=$ 不存在. 由于其他三角函数都可用 $\sin x, \cos x$ 及 1 乘除而得，所以其极限值均可由极限的四则运算法则求出，故这里不再讨论.

(6) 反（反三角函数）：$f(x)=\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot}x, D=(-\infty,+\infty)$.

$$\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}^+;\quad \arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}^-;$$
$$\operatorname{arccot}(-\infty)=\pi^-;\quad \operatorname{arccot}(+\infty)=0^+.$$

由于 $\arcsin x, \arccos x$ 的定义域为闭区间，所以其极限值可由连续性求得.

（注：此处所列符号的含义：$f(\pm\infty)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$，$f(x_0^\pm)=\lim\limits_{x\to x_0^\pm}f(x)$，如 $(+\infty)^{-\pi}=0^+\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\pi}=0$；$\log_a(0^+)=-\infty\iff\lim\limits_{x\to0^+}\log_a x=-\infty$.）

4. 无穷大与无穷小的四则运算.

(1) $\frac{1}{\infty}=0(\frac{1}{\pm\infty}=0^{\pm})$，$\frac{1}{0}=\infty(\frac{1}{0^{\pm}}=\pm\infty)$；

(2) $\infty \overset{\times}{\div} a(a\neq 0)=\infty$($a>0$ 时 $(\pm\infty)\overset{\times}{\div}a=\pm\infty$；$a<0$ 时，$(\pm\infty)\overset{\times}{\div}a=\mp\infty$)；

(3) $\infty\times\infty=\infty\ ((\pm\infty)\times(\pm\infty)=+\infty,(\pm\infty)\times(\mp\infty)=-\infty)$；

(4) $\infty+a=\infty\ ((\pm\infty)+a=\pm\infty)$；

(5) $(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty,(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$.

(6) 不定式：$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，以及除上面(5)中所列以外的 $\infty\pm\infty$.

(**注**：这里的每一个符号都代表以该符号为极限的函数．如 $\infty\times a(a\neq 0)=\infty$ 表示当 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=a\neq 0$ 时 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)g(x)=\infty$.)

5. 有关极限不存在的函数的四则运算.

(1) $a\pm$ 不存在 $=$ 不存在；

(2) $a(a\neq 0)\times$ 不存在 $=$ 不存在；

(3) $1\div$ (不存在但不为 ∞) $=$ 不存在.

(4) 不定式：(不存在) $\pm$ 或 $\times$ 或 $\div$ (不存在)，$0\times$ 不存在.

6. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

7. 极限的四则运算法则.

$$\lim_{x\to\square}\left[f(x)\begin{smallmatrix}+\\-\\\times\\\div\end{smallmatrix}g(x)\right]\xlongequal{\text{当右边存在时}}[\lim_{x\to\square}f(x)]\begin{smallmatrix}+\\-\\\times\\\div\end{smallmatrix}[\lim_{x\to\square}g(x)]$$

推论：$\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}\xlongequal{\text{当右边存在时}}[\lim\limits_{x\to\square}f(x)]^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}$

(**注**：在计算极限的过程中，应随时注意利用下式分出可算部分的极限以简化计算.

(1) 如 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)+g(x)]=a+\lim\limits_{x\to\square}g(x)$；

(2) 如 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=b\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)g(x)]=b\lim\limits_{x\to\square}g(x)$.)

8. 换元：$\lim\limits_{x\to\square}f(\varphi(x))\xlongequal[\text{或 } x\to\square \text{ 时 } \varphi(x)\to\Delta \text{ 且 } f \text{ 连续}\quad\text{则令 } u=\varphi(x)]{\text{如 } x\to\square \text{ 时 } \varphi(x)\to\Delta \text{ 且 } \varphi(x)\neq\Delta\quad\text{则令 } u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to\Delta}f(u)$.

(**注**：(1) 上式只有在右边存在或为 ∞ 时方能成立．(2) 常用的换元思路是：将趋于 0 的式子做元(即如果存在 $g(x)\to 0$，则可令 $u=g(x)$)．如 $x\to\infty$ 时可令 $u=\frac{1}{x}$；$x\to a$ 时可令 $u=x-a$．(3) 子列定理：如果 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$ 且 $n\to\infty$ 时 $x_n\to\square$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\xlongequal{\text{令 } x=x_n}\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$.)

9. 利用子列定理证明"$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=$ 不存在".

找两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，使 $n\to\infty$ 时 $x_n\to\square$，$y_n\to\square$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$.

10. 洛必达法则：

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}\xlongequal[\text{当右边存在或为 }\infty\text{ 时}]{\text{“}\frac{0}{0}\text{”或“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

11. 利用下述结论(我们称其为指数增长快于幂增长，幂增长快于对数增长)：

如 $a>1,\alpha>0,\beta>0$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\alpha x}}{x^{\beta}}=+\infty,\text{且}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{(\log_a x)^{\beta}}=+\infty$$

12. 利用恒等变形法则:如果在 $x\to\square$ 的过程中(例如在 $x\to x_0$ 的过程中就是在 x_0 的某空心邻域内),$f(x)=g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\lim\limits_{x\to\square}g(x)$.

几种常用的变形方法:

(1) $f(x)^{g(x)}\equiv e^{g(x)\ln f(x)}$

(2) 对于"$0\cdot\infty$"型不定式,利用相乘等于颠倒相除化为"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型不定式,即 $0\cdot\infty=\dfrac{0}{\left(\dfrac{1}{\infty}\right)}=\dfrac{0}{0},0\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\left(\dfrac{1}{0}\right)}=\dfrac{\infty}{\infty}$.

(3) 对于"$\frac{\infty}{\infty}$"型不定式,分子分母同除以最大的无穷大.

(4) 通分化减:此法常可将"$\infty-\infty$"型不定式化为"$\frac{0}{0}$"型不定式.具体过程为 $\infty-\infty=\dfrac{1}{0_1}-\dfrac{1}{0_2}=\dfrac{0_2-0_1}{0_1 0_2}=\dfrac{0}{0}$.

(5) 分子或分母有理化.

(6) 利用 $A-B=B(AB^{-1}-1)$ 化常见的无穷小:$a^{\square}-1$ 或 $(1+\square)^{\alpha}-1$.

(7) 利用 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\overset{\times}{\div}C}{B\overset{\times}{\div}C}$ 或 $A=A\pm B\mp B$.

(8) 其他.

13. 利用 $\square\to0$ 时 $(1+\square)^{\frac{1}{\square}}\to e$ 推出的下述结论:

如 $\lim f(x)=1$,则

$$\lim f(x)^{g(x)}=\lim\left\{(1+[f(x)-1])^{\frac{1}{[f(x)-1]}}\right\}^{[f(x)-1]g(x)}=e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$$

14. 利用两边夹法则:

如果在 $x\to\square$ 的过程中,$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\lim\limits_{x\to\square}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$.

15. 利用等价"~"代换:

(1) 等价"~"的定义:如 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 $x\to\square$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价,记为 $f(x)\sim g(x)\ (x\to\square)$.

(2) 几种常见的等价无穷小:当 $\square\to0$ 时,$\sin\square\sim\square,\arcsin\square\sim\square,\tan\square\sim\square,\arctan\square\sim\square,\ln(1+\square)\sim\square,e^{\square}-1\sim\square,a^{\square}-1=e^{\square\ln a}-1\sim\square\ln a,(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\square,1-\cos\square\sim\dfrac{1}{2}\square^2$.

(3) 如 $\alpha\sim\alpha'\ (x\to\square)$,则 $\lim\limits_{x\to\square}\alpha\beta=\lim\limits_{x\to\square}\alpha'\beta$ 且 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha'}$.

(4) $\alpha+0(\alpha)\sim\alpha$;$\alpha\to k\neq0$ 时,$\alpha\beta\sim k\beta$.

(注：利用此项性质以及 $e^x,\sin x,\cos x,(1+x)^\alpha,\ln(1+x)$ 的幂级数展式，即可很容易地记住(2) 中的内容. 如由 $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x)(x\to 0)$ 可知，$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x) \sim \alpha x (x\to 0)$.)

16. 利用导数的定义.

17. 利用带皮亚诺型余项的泰勒公式(即小 o 型泰勒公式) 和小 o 的计算公式：

(1) 如 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n\quad (x\to x_0)$$

(注：凡是可用导数定义求的极限(在导数存在时)，都可用本公式求之.)

(2) $o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x))$；$g(x)\cdot o(f(x)) = o(g(x)f(x))$；$o(kf(x)) = o(f(x))$；$o(o(f(x))) = o(f(x))$；$o(f(x)+o(f(x))) = o(f(x))$.

18. 利用微分中值定理求极限.

19. 利用定积分定义：

当 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在时，$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

20. 利用级数与数列极限的关系.

二、典型例题

例 1.1 求下列极限，当极限不存在时需注明是否为无穷大：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x - e^x}{x^2+x-2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\dfrac{1}{2})^x$

(5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-x}}{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$　　(8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{2^x\ln 2 - 2\cos(2x)}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$　　(11) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$

解：(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x - e^x}{x^2+x-2} = \infty$. $\because \sin 1 - e \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a} \xlongequal{\text{“}\frac{a}{0}\text{”}} \begin{cases}\infty, & a\neq 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-0}=1, & a=0\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ = 不存在. $\because x\to 0^-$ 时，$\sqrt{x}$ 无定义.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2})^x=$ 不存在. $\because x=\frac{(2n+1)}{2}\to+\infty$ 时$(n\in N)$,$(-\frac{1}{2})^x$ 无定义.

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-x}}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}=-\infty$. $\because \frac{e^{\frac{1}{-\infty}}-e^{-(-\infty)}}{\cos\left(\frac{1}{-\infty}\right)}=\frac{e^0-e^{+\infty}}{\cos 0}=-\infty$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=$ 不存在 $\neq\infty$. $\because \lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty\ \lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$.

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$. $\because \frac{\ln 0^+}{0^+}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$.

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$. $\because \sqrt{(-\infty)^2+1}-(-\infty)=+\infty$.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2^x\ln2-2\cos(2x)}=$ 不存在 $\neq\infty$. $\because\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 有界,$x^2\to0$,$\therefore x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\to0$. 又 $\because\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=$ 不存在,$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2^0\ln2-2\cos0}\cdot(1+0-$ 不存在$)=$ 非 0 存在 $\cdot$(存在 $-$ 不存在)$=$ 非 0 存在 $\cdot$ 不存在 $=$ 不存在.

(10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=$ 不存在 $\neq\infty$. $\because$ 令 $x=x_n=\frac{1}{2n\pi}\to0(n\to\infty)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}(2n\pi)\sin(2n\pi)=0$,$\therefore$ 原式 $\neq\infty$;同理,令 $x=y_n=\frac{1}{2n\pi+(\frac{\pi}{2})}\to0(n\to\infty)\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}(2n\pi+(\frac{\pi}{2}))\sin(2n\pi+(\frac{\pi}{2}))=\infty$,$\therefore$ 原式 $=$ 不存在.

(11) $$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1\\ +\infty, & x>1\\ \infty, & x<-1\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x=-1\end{cases}$$

小结:(一)(1) 至(8) 小题主要是利用本讲内容 4.

(二)(9)、(11) 两个小题都用到了本讲内容 6,"有界 $\times 0=0$". 注意几个常见的有界函数:$|\sin x|\leqslant1$,$|\cos x|\leqslant1$,$|(-1)^n|\leqslant1$,$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2}$,$|\mathrm{arccot}\,x|\leqslant\pi$. 另外第(9) 小题主要利用本讲内容 5"不存在的计算".

(三)(11) 小题用到了本讲内容 9,但从解题思路上来讲,应从这道题的函数的图形着手. $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是以 $\left|\frac{1}{x}\right|$ 为振幅的变化趋势,且在 0 点左右有无限次振荡的一条曲线,所以两子列可取振幅上的一串点和过 x 轴的一串点.

(四) 注意第(11) 小题中含有两个字母 n 与 x,其中 n 是极限变量(在 lim 下的字母是极限变量),而 x 应看做常数. 一般地,在计算极限的过程中,只有"lim"下的字母看做变量,其他字母都要看做常数,且极限计算的结果中一定不含有"lim"下的字母. 所以此题的结果一定不含 n 而可能含有 x,实际上这类题目的结果就是非极限变量的函数(常为分段函数). 如果做这类题目感到困难时,可先固定非极限变量为几个常数,算出结果后再找出

解题的办法. 如不会做此题时，可先令 $x=0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},3,-3,1,-1$ 等计算 $\lim\limits_{n\to\infty}0^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\lim\limits_{n\to\infty}3^n,\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^n,\lim\limits_{n\to\infty}1^n,\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$，然后再做一般的 x 值.

(五) 注意 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^x=$ 不存在，这是因为"$\lim\limits_{n\to\infty}$"中的 n 必须是自然数. 另外在(11)题中利用了以下推理：如 $\lim\limits_{x\to\square}|f(x)|=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$.

例 1.2 利用洛必达法则及适当的变形求下列极限(参看本讲内容 10、12、13.)：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}\quad(a_n,b_m\neq0;n,m\in N)$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^x\quad(a_i>0;i=1,2,\cdots,n)$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2-5n+2})$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)\quad(a>0)$

(8) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{x}, & x>0\\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}\quad(a,b\in R)$

(9) 判别下列 5 个等号是否成立，为什么？

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\overset{①}{=\!=}\left[\lim_{x\to0}(1+x)\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}}\overset{②}{=\!=}\left[\lim_{x\to0}(1+0)\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}}\overset{③}{=\!=}\lim_{x\to0}(1+0)^{\frac{1}{x}}\overset{④}{=\!=}\lim_{x\to0}1,\text{又}\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\overset{⑤}{=\!=}\lim_{x\to0}(1+0)^{\frac{1}{x}}$$

解：(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^x\ln2-2x}{1-0}=2^2\ln2-2\cdot2=4\ln2-4$

(2) 分析：此题为 $0\cdot\ln0^+=0\cdot\infty$ 型不定式，由本讲内容 12.(2) 应做变形 $0\cdot\infty=\dfrac{0}{\left(\frac{1}{\infty}\right)}=\dfrac{0}{0}$ 或 $0\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\left(\frac{1}{0}\right)}=\dfrac{\infty}{\infty}$，具体到本题做第二种变形好一些.

解：$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\ln x)}{\left(\frac{1}{x}\right)}\overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

结论：对于 $f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$ 型不定式，是变形为 $\dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}$ 还是变形为 $\dfrac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$ 呢？一般说来变形要有利于求导，所以一般应把对数函数 $\ln\square$，反三角函数 $\mathrm{arc}\square$ 放在直接求导的位置上，即应算 $(\ln\square)'$，$(\mathrm{arc}\square)'$，而不应算 $\left(\dfrac{1}{\ln\square}\right)'$，$\left(\dfrac{1}{\mathrm{arc}\square}\right)'$.

(3) 分析:此题属于"$\frac{\infty}{\infty}$"型题目,由本讲内容 12.(3) 分子分母同除以最大的无穷大. 故当 $n>m$ 时分子分母同除 x^n;当 $m>n$ 时同除以 x^m;当 $m=n$ 时同除以 $x^n=x^m$.

$$\text{解:原式}=\begin{cases}\infty\ , & n>m\\ 0\ , & n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m}\ , & n=m\end{cases}$$

(4) 分析:此题属于 $f(x)^{g(x)}$. 方法 1:根据本讲内容 12.(1) 做变形 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.
方法 2:利用 $\square\to 0$ 时 $(1+\square)^{\frac{1}{\square}}\to e$,详见本讲内容 13.

$$\text{解:方法 1:原式}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]}{\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

$$\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=\!=}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]}\cdot\frac{1}{n}\left[a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2\left(\frac{1}{x}\right)'+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n\left(\frac{1}{x}\right)'\right]}{\left(\frac{1}{x}\right)'}}$$

$$=e^{\frac{1}{\left(a_1^0+a_2^0+\cdots+a_n^0\right)/n}\cdot\frac{1}{n}\left(a_1^0\ln a_1+a_2^0\ln a_2+\cdots+a_n^0\ln a_n\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{(n/n)}\cdot\frac{1}{n}\left(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n\right)}=e^{\ln\left(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

(注意:变形时不要把 ln 放到分母上求导.)

$$\text{方法 2:}\because\ \text{底}=\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\to 1\quad(x\to\infty)$$

$$\therefore\ \text{设}\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}=1+\square,\ \text{则}\ \square=\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}-1\to 0$$

$$\text{故}\quad\text{原式}=\lim_{x\to\infty}(1+\square)^x=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\square)^{\frac{1}{\square}}\right]^{\square x}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\square\cdot x}$$

$$\overset{\because x\to\infty\text{ 时}}{\underset{\square\to 0}{=\!=\!=\!=\!=}}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}-1\right)x}$$

$$\overset{\text{“}0\cdot\infty\text{”}}{=\!=\!=\!=}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}-1\right)/\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=\!=}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left[a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1\left(\frac{1}{x}\right)'+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2\left(\frac{1}{x}\right)'+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n\left(\frac{1}{x}\right)'\right]/\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{n}\left(a_1^0\ln a_1+a_2^0\ln a_2+\cdots+a_n^0\ln a_n\right)}=e^{\frac{1}{n}\ln\left(a_1a_2\cdots a_n\right)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

结论:对于幂指型极限 $\lim f(x)^{g(x)}$,当 $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$ 时,这里用的两种解法是

相通的.

$\because$ 方法 1:$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)} = e^{\lim \frac{\ln f(x)}{(1/g(x))}} \xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}} e^{\lim\left(\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right)/\left[\frac{-1}{g(x)^2}g'(x)\right]} =$ $e^{\lim\frac{1}{f(x)}\lim f'(x)/\left[\frac{-1}{g(x)^2}g'(x)\right]} = e^{\lim f'(x)/\left[\frac{-1}{g(x)^2}g'(x)\right]}$

方法 2:$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim[f(x)-1]g(x)} \xlongequal{\text{“}0\cdot\infty\text{”}} e^{\lim\frac{f(x)-1}{(1/g(x))}} \xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}} e^{\lim f'(x)/\left[\frac{-1}{g(x)^2}g'(x)\right]}$

但用解法 1 做题时,求导后一定不要忘了用极限的四则运算法则分出一个极限为 1 的因子 $\lim\dfrac{1}{f(x)}$,否则在继续用洛必达法则时,将使求导数的计算过于复杂.

(5) 分析:此为$\dfrac{1}{\ln 1} - \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} - \dfrac{1}{0} = \infty - \infty$ 型不定式,正好使用本讲内容 12.(4) 通分化简:$\infty - \infty = \dfrac{1}{0_1} - \dfrac{1}{0_2} = \dfrac{0_2 - 0_1}{0_1 \cdot 0_2} = \dfrac{0}{0}$.

解:
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x\to1}\frac{(x-1) - x\ln x}{(x-1)\ln x}$$
$$\xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}} \lim_{x\to1}\frac{1-(\ln x+1)}{\ln x + (x-1)\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to1}\frac{-\ln x}{\ln x + 1 - \left(\dfrac{1}{x}\right)}$$
$$\xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}} \lim_{x\to1}\frac{-\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right) + \left(\dfrac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2}$$

(6) 分析:由于极限号内出现两个根号相减,所以应想到使用本讲内容 12.(5),分子分母同乘共轭根式.另外,还可使用本讲内容 12.(6) 变形 $A - B = B(AB^{-1} - 1)$,化为 $(1+\square)^{\alpha} - 1(\square \to 0)$ 形式的常见无穷小.

解:方法 1:原式
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n-1})^2 - (\sqrt{n^2-5n+2})^2}{\sqrt{n^2+3n-1} + \sqrt{n^2-5n+2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8n-3}{\sqrt{n^2+3n-1} + \sqrt{n^2-5n+2}}$$

(此为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型,分子分母同除以最大的无穷大 $n = \sqrt{n^2}$.)

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8 - 3\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + 3\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right) - \left(\dfrac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - 5\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right) + 2\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}}$$
$$= \frac{8-0}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 4$$

方法 2:原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2-5n+2}\left(\sqrt{\dfrac{n^2+3n-1}{n^2-5n+2}} - 1\right)$

$\because \dfrac{n^2+3n-1}{n^2-5n+2} \to 1$,$\therefore$ 设$\dfrac{n^2+3n-1}{n^2-5n+2} = 1 + \square$,则 $\square \to 0\ (n\to\infty)$

故　原式$= \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2-5n+2}\left((1+\square)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$

$$\xlongequal[(1+\square)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\square]{\because\square\to 0\text{时}}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-5n+2}\cdot\frac{1}{2}\square$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-5n+2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-5n+2}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-5n+2}(8n-3)}{2(n^2-5n+2)}$$

$$\xlongequal{\text{分子分母同除以 } n^2}4$$

(7) 分析：此题可利用本讲内容 12.(6) 变形 $A-B=B(AB^{-1}-1)$ 化为常见的无穷小 $a^{\square}-1(\square\to 0)$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x^2a^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}a^{\frac{1}{x+1}}\lim_{x\to\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)$$

$$\xlongequal[a^{\square}-1\sim\square\ln a]{\because\square=\frac{1}{x(x+1)}\to 0\text{时}}a^0\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{x(x+1)}\ln a=\ln a$$

(8) 分析：$\because x>0$ 和 $x<0$ 时，$f(x)$ 的表达式不同，$\therefore$ 应先计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$. 然后再利用本讲内容 2，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

解：$\because\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\xlongequal{x>0}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{x}\xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{1+ax}}\right)/1=\dfrac{a}{2}$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\xlongequal{x<0}\lim_{x\to 0^-}(1+bx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^-}\left[(1+bx)^{\frac{1}{bx}}\right]^b\xlongequal[(1+\square)^{\frac{1}{\square}}\to e]{\because\square=bx\to 0\text{时}}e^b$$

$\therefore$ 当 $\dfrac{a}{2}=e^b$ 即 $b=\ln a-\ln 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{a}{2}$，而当 $b\neq\ln a-\ln 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ 不存在.

(9)① 错. $\because$① 左边是“1^{∞}”型不定式，① 右边无意义. ② 对. $\because\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+0)=1$. ③ 错. $\because$③ 右边是“1^{∞}”型不定式，③ 左边无意义. ④ 对. $\because x\neq 0$ 时，$(1+0)^{\frac{1}{x}}\equiv 1$. ⑤ 错. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+0)^{\frac{1}{x}}$ 是一种常见错误，$\because x\to 0$ 必须是同时的，不能一个 $x\to 0$，另一个 x 不动.

例 1.3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan\left(a^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1\right)}{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x^2-1}}-1}\quad(a>0)$.

分析：$\because x\to 1$ 时，$\sqrt[3]{x^3-1}\to 0$，$\sqrt[3]{x^2-1}\to 0$，故可利用本讲内容 15 等价代换：$\square\to 0$ 时，$a^{\square}-1\sim\square\ln a$，$\arctan\square\sim\square$，$(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\square$，以及 $\alpha'\sim\alpha$ 时，$\lim\alpha'\cdot\beta=\lim\alpha\beta$，$\lim\dfrac{\beta}{\alpha'}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$.

解：$\because x\to 1$ 时，$\sqrt[3]{x^3-1}\to 0$，$a^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1\to 0$，$\sqrt[3]{x^2-1}\to 0$

$\therefore\arctan\left(a^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1\right)\sim a^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1\sim\sqrt[3]{x^3-1}\cdot\ln a$