高等数学

第四卷

（第一分册）

R. 罗德 著
秦裕瑗 譯

高等教育出版社

高 等 数 学

第 四 卷

（第一分册）

R. 罗 德 著
秦 裕 瑗 譯

高 等 教 育 出 版 社

本书系根据莱比錫托伊布納出版社(B. G. Teubner Verlagsgesellschaft) 出版的罗德 (R. Rothe)著"高等数学" (Höhere Mathematik) 第四卷第一分册 1957 年第 10 版譯出。第四卷共有三分册，分别作为罗德著"高等数学"前三卷的补充习題集。各分册中除了习題数量增多到三、四倍之外，且附有較詳細的解答与提示。

本卷各分册可分别配合前三卷教本的学习参考，也可供教师选題参考。讀者对象是高等学校理工科程度較好的学生，基础較好的自学者以及有关教师。

高 等 数 学

第四卷 第一分册

R. 罗 德 著

秦 裕 瑗 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第 119 号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号K13010・1175 开本 850×1168 1/32 印張 4 7/16

字数 110,000 印数 0,001—3,000 定价(5) ¥0.42

1965 年 4 月第 1 版 1965 年 4 月北京第 1 次印刷

原出版者序言

“高等数学”第四卷含有为数頗多的习題，以供学习前三卷的內容之用．每个习題通常都附有解法提示及其結果．不少习題20多年前就已为罗德教授所选用，不能再查明它們的出处．有些是罗德本人拟的，有些是与他的助教們进行生动的討論时产生的，有些則选自各式各样数学的、物理的以及工程的文献．当然，这些习題也同整部著作一样主要是供学习工科、物理及数学的学生們用的．但其中大批的习題，还有那些带有工科內容的习題，可能对教师授課时有用，并会受到所謂优秀班学生的欢迎．自然，对高等专科学校(机械制造学校，工程学校等等)也是可以适用的．

第十版是第九版未加更改的再印本．

托伊布訥出版社

1956年秋于萊比錫

目　录

（第一分册）

第一章　数、变量与函数

1. 第一卷 §1 至 §4 的练习题

軌迹問題．函数的建立及函数值的計算．反函数．絕对值的計算．方程的图解．整有理函数．內插公式．分式有理函数、代数函数及超越函数图形的描繪．从 n 推到 $n+1$ 法(即数学归納法)．

1. 試将活塞曲柄头到飞輪圓心的距离 $OK=s$ 表示为曲柄角 ψ(图 1)的函数．为此，引入长度比 $OC:CK=r:l=\lambda$．当曲柄角取什么值时，柄头恰在靜止点 A 与 B 的中間？曲柄角取什么值时，推杆 CK 与飞輪相切？(参閱第 24 頁第 1 題．)①

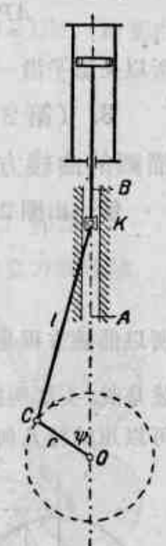

图 1

解：由正弦定理，在三角形 OKC 中，若令 $\angle OKC=\theta$，則有 $\sin\theta=\lambda\sin\psi$ 及 $\frac{s}{l}=\frac{\sin(\theta+\psi)}{\sin\psi}$．对于 $\sin(\theta+\psi)$ 应用和角公式，就得到

$$s=l(\lambda\cos\psi+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}).$$

在靜止点 A 与 B 处，綫段 s 的长为 $l-r$ 与 $l+r$．因此当柄头在 A 与 B 的中間时 $s=l$，这时

$$\lambda\cos\psi+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}=1,$$

所以　$\psi=\text{arc}\cos\frac{1}{2}\lambda.$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}-\psi$，即 $\psi=\text{arcctg}\,\lambda$ 时，推杆与飞輪相切．

---

① 本分册內，括号里所指的是本书第一卷中譯本的頁碼及題次——譯者．

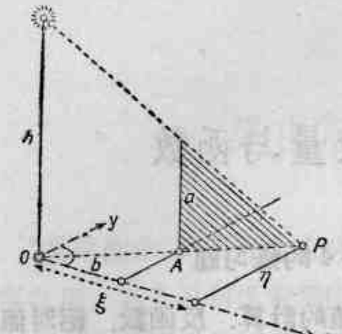

图　2

2. 有一个身长为 a 的人，在离路灯杆 b 处沿一直綫以等速 c 在路灯下行走，設路灯的高为 h，問他的头影沿怎样的曲綫移动（图 2）？

解：設这人所走路綫是过 A 且垂直于 x 軸的直綫，P 是头的影子，$t=0$ 为这人在 x 軸上的时刻．于是

$$AP=\frac{a}{h-a}\cdot OA,\quad \eta=\frac{hct}{h-a},\quad \xi=\frac{b\eta}{ct},\ \text{即}\ \xi=\frac{bh}{h-a}.$$

所以头影子沿一条平行于这人行进方向的直綫移动．

3. （第 2 題的推广）如果这人沿曲綫 $y=f(x)$ 行进，則头影所描画的曲綫方程如何？

解：由图 2 得关系式

$$y=\frac{h-a}{h}\eta,\quad x=\frac{h-a}{h}\xi,$$

所以曲綫方程是　　$\eta=\dfrac{h}{h-a}f\left(\dfrac{h-a}{h}\xi\right)$，

就是說，头影所描画的曲綫是給定曲綫适当改变比例尺后所得的結果．这也可以用純粹几何方法来說明．

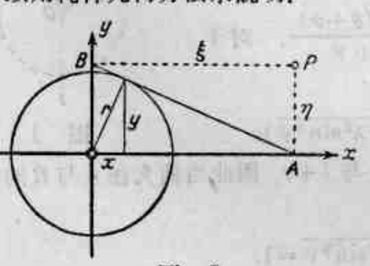

图　3

4. 在半徑为 r 中心在原点处的圓上作一切綫，与坐标軸交于 A 与 B 处．然后通过 A 与 B 作平行于坐标軸的直綫定出点 P．当切綫的位置改变时，問点 P 的軌迹如何？作出草图！

解：設 ξ、η 是所求軌迹的流动坐标，x、y 是切点的坐标，切綫在坐标軸上的截距，也就是点 P 的坐标，即 $\xi=\dfrac{r^2}{x}$ 及 $\eta=\dfrac{r^2}{y}$，于是軌迹的方程是

$$\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}=\frac{1}{r^2}\ \text{或}\ \eta=\pm\frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}\quad(\text{图}\,3).$$

5. 从一个孔口 A 沿水平方向以定速 c 噴出水流；水流的中綫近似于参数为 $p=\frac{c^2}{g}$ 的抛物綫.

一个水輪（半徑为 R）这样装置：它的中心 M 在水流与輪緣相触点 B 的垂直下方. 設从孔口到輪緣的垂直距离 m 是已知的，問水輪中心位于何处(图 4)？

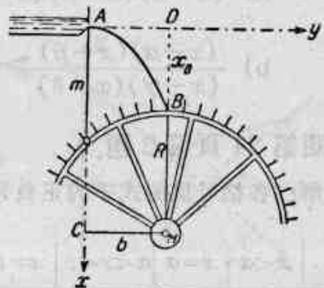

图 4

解：B 的坐标是 $x_B=\frac{b^2}{2p}$, $y_B=b$. 数值 b 可以由 $AC=DM$, 即是由 $m+\sqrt{R^2-b^2}=R+x_B$ 算得：

$$b^2=2p(\sqrt{(p+R)^2-2pm}-(p+R-m)).$$

M 的坐标是 $\quad x_M=m-p+\sqrt{(p+R)^2-2pm},\ y_M=b.$

6. 試将球的面积 O 表示为它的体积 V 的函数. 作图!

解：$O^3=36\pi V^2$. 以 O, V 为坐标的点的曲綫是一个半立方抛物綫.

7. 在一个內軸徑为 R 的軸承里，有 n 个同样大小的滚珠，它們相邻两个之間的距离是 σ. 問滚珠的半徑 ρ 是多少(图 5)？

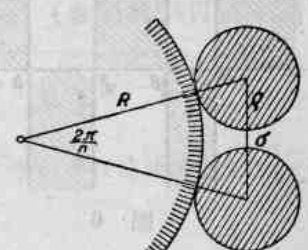

图 5

解：
$$\rho=\frac{R\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\sigma}{2}}{1-\sin\frac{\pi}{n}},\quad n>2.$$

如果 $\sigma=0$, 軸承的滚珠就相切.

8. 在絕热情况下，当压力改变时，气体按定律 $p\cdot v^{1.414}=C$ (p 是压力，v 是体积) 而膨脹. 試繪出当 $C=100$ 时相应的"复热"曲綫.

解：为了計算出曲綫上的点，取对数，并从 $\lg p=2-1.414\lg v$ 算出 p. 在双分对数紙上，这是一条直綫.

9. 設 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$, 則 x 取哪些值时，才有

a) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\geqslant 0$,

b) $\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\gamma)(x-\delta)}\geqslant 0$?

(参閲第 24 頁第 2 題.)

解: 各括号里的式子的正負号列表如下:

	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$\beta<x<\gamma$	$x=\gamma$	$\gamma<x<\delta$	$x=\delta$	$x>\delta$
$x-\alpha$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\gamma$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$x-\delta$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$+$

这两个函数当 $x<\alpha$, $\beta<x<\gamma$, $x>\delta$ 时取得正值. 前一个函数当 $x=\alpha$、$x=\beta$、$x=\gamma$、$x=\delta$ 时等于零,可是第二个函数仅仅在 $x=\alpha$ 与 $x=\beta$ 处等于零. 它在 $x=\gamma$ 与 $x=\delta$ 处有极点. 图 6 中有阴影的区域是函数曲綫通过的部分.

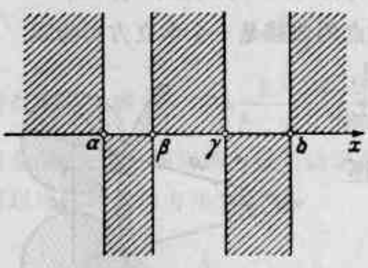

图　6

10. 适合 $|x|+|y|=1$ 的所有点 (x, y) 构成什么几何图形? (参閲第 24 頁第 3 題.)

解: 在四个象限中, 这方程表成直綫

$$x+y=1,\quad -x+y=1,\quad -x-y=1 \text{ 与 } x-y=1.$$

点 (x, y) 的全体构成一个正方形的四个边, 它的頂点在坐标軸上且与原点的距离为 1.

11, 試繪图: a) $y^2=1-|x|$, b) $|x\cdot y|=1$.

解: a) 当 $x>0$ 时, $y^2=1-x$; 当 $x<0$ 时, $y^2=1+x$. 这是两条抛物綫弧, 它們在 $(0, \pm 1)$ 处相交, 且对称于 x 軸.

b) 因为方程也可以写成形式 $xy=\pm 1$, 曲綫是两条等軸双曲綫, 它們的漸近綫是两个坐标軸.

12. 試繪图: $y=|x-a|+\frac{1}{2}|x-b|$, $(a<b)$.

解: 曲綫是由三条直綫段所組成的折綫, 角点在 $x=a$, $y=\frac{1}{2}(b-a)$ 与 $x=b$, $y=b-a$ 处. 三个部分的方程是: 当 $x>b$ 时, $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}(2a+b)$; 当 $a<x<b$ 时, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(2a-b)$; 而当 $x<a$ 时, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}(2a+b)$. 它的构造可以从图形(图 7)中看到.

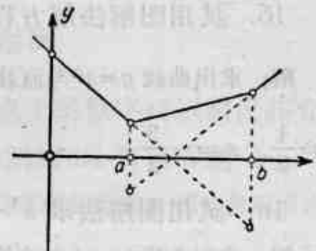

图 7

13. 試决定下列諸函数的反函数:

a) $y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2-1}$, b) $y=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$,

c) $y=\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}$,

d) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ (参閱第24頁第 4 題),

e) $y=\sqrt[5]{\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2-p^5}}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{4}x^2-p^5}}$.

解: a) $y=x+\frac{1}{x}$; b)与 c): 交换变量 x 与 y, 再在这两題中先作$\frac{1-x}{1+x}$. 于是容易得到

$$y=-\frac{x}{(1+x)^2} \quad 与 \quad y=\frac{3x+x^3}{1+3x^2}.$$

d) 交换变量后, 令两个根式为 a 与 b. 应用二項式定理, 就得 $x^3=a^3+b^3+3abx$ 及 $y=\frac{1}{2}(3x+x^3)$.

e) 相应地应用二項式定理, 就得到 $x^5=y+5px(a^2+b^2-p)+10p^2x$, 又因为 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, 得到 $y=x^5-5px^3+5p^2x$.

14. 試求抛物綫 $y=x^2-4$ 与其反函数图形的交点. 繪图!

答: $x_1=y_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})$, $x_2=y_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})$, $x_3=y_4=$

$=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$,　$x_4=y_3=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{13})$.

15. 試用图解法解方程 $4x^3-7x+3=0$.

解：求出曲綫 $y=x^3$ 与直綫 $y=\frac{7x}{4}-\frac{3}{4}$ 的交点的横坐标. 得：$x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{3}{2}$.

16. 試用图解法求 $x^4-x-1=0$ 的实解.

解：求出曲綫 $y=x^4$ 与直綫 $y=x+1$ 的交点的横坐标. 得 $x_1=-0.724$, $x_2=1.221$.

17. 試用图解法解方程 $10^x=x^{10}$.

解：如果 $x>0$，取对数得 $x=10\lg x$；如果 $x<0$，就先令 $x=-|x|$. 求直綫 $y=\pm\frac{x}{10}$ 与曲綫 $y=\lg x$ 的交点，得到方程的三个解：$x_1=10$, $x_2=1.373$, $x_3=-0.827$(图 8).

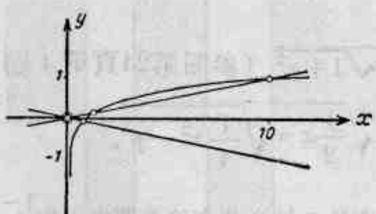

图 8

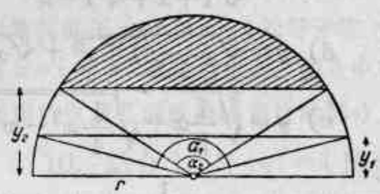

图 9

18. a) 試用两条平行弦把半徑为 r 的半圓分成三个面积相等的部分(图 9).

解：按图 9 中的記号，扇形(α_1)－三角形$(\alpha_1)=\frac{2}{3}$半圓，即有 $\alpha_1-\sin\alpha_1=\frac{2\pi}{3}$，相应地有 $\alpha_2-\sin\alpha_2=\frac{\pi}{3}$. 取曲綫 $y=\sin x$ 与 $y=x-\frac{2\pi}{3}$ 及 $y=x-\frac{\pi}{3}$ 的交点，就得到 $\alpha_1=2.60=\text{arc}149^\circ$, $\alpha_2=1.97=\text{arc}112.9^\circ$. 于是这两个弦离中心的距离是 $y_1=0.2672\,r$ 与 $y_2=0.5526\,r$.

18. b) 如果把半圓分成 n 条，那末就要解 $n-1$ 个方程

$$\alpha_\lambda-\sin\alpha_\lambda=\pi\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\quad(\lambda=1,\cdots,n-1).$$

$y_\lambda=r\cos\frac{1}{2}\alpha_\lambda$ 就是第 λ 条弦离中心的距离.

19. 試作一标尺，使我們从其分点上的数字可以讀出該分点将給定的綫段 AB 分成什么比例.（参閱第 24 頁第 5 題.）

解：設綫段 AB 的长等于 s. 如果分綫段 AB 成比例 λ, 那末靠近 B 点的部分綫段的长等于$\frac{s}{1+\lambda}$. 如果 $\lambda>0$, 分点就在 A 与 B 之間，如果 $\lambda<0$, 就在綫段 AB 之外(图 10).

图 10

20. 試作函数$f(x)=\frac{x}{1-x}$的标尺.

图 11

解：見图 11. 值 $x=1$ 在标尺上是找不到的.

21. 試把具有零点 $x=2$ 与 $x=-1$ 的函数 $y=2x^4-2x^3-$ $-3x^2-x-2$ 分解为一次及二次实因子.

答：$y=(x-2)(x+1)(2x^2+1)$.

22. 試解方程$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=2$.

解：把方程化成$\frac{4}{x^2-4}=0$, 它不为 x 的任何值所滿足.

附言：方程$\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}+\frac{cx+d}{\gamma x+\delta}-k=0$ 在两个等式

$$a\gamma+c\alpha=k\alpha\gamma \text{ 与 } a\delta+b\gamma+c\beta+d\alpha=k(\alpha\delta+\beta\gamma)$$

同时成立且适合不等式 $b\delta+d\beta-k\beta\delta\neq0$ 时无解，因为这时方程左端是一个

沒有零点的分式有理函数.

23. 試解方程 $x+7+5\sqrt{x+1}=0$.

解: 用通常解方程的办法把它变成一个二次方程, 它的根是 $x_1=8$, $x_2=3$. 然而, 这两个值沒有一个是給定方程的解, 故給定方程沒有解.

附言: 第22题与第23题的方程都不是代数方程; 因为一个代数方程是由令一个 x 的整有理函数等于零而形成的. 于是代数的基本定理也就不能应用到像上述的两个方程. 此外在这两个方程左端的函数都是代数函数.

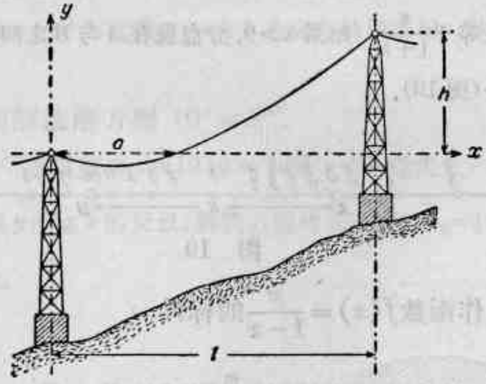

图 12

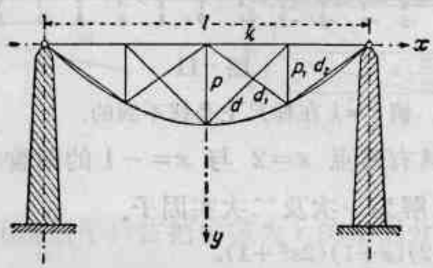

图 13

24. 高压輸电綫的形状近似于一个抛物綫 $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$. 試按图12中的数据求它的方程.

解: $y=\dfrac{hx(x-a)}{l(l-a)}$. 按拉格朗日内插公式立刻可以写得这个結果.

25. 試确定一抛物綫状桁架的鉛垂杆件及对角綫杆件的长度, 已知它的跨度为 l 及矢高为 p.

解: 抛物綫的方程是 $y=p-\frac{4px^2}{l^2}$.

$$p_1=\frac{3}{4}p,\ d=\frac{1}{4}\sqrt{16p^2+l^2},\ d_1=\frac{1}{4}\sqrt{9p^2+l^2}=d_2.$$

26. 在保罗式桁架（伊薩桥，在德国 Grosshesselohe 附近，1857）上，鉛垂杆件的长度由下面的公式来計算:

$$h=\frac{4f}{l^2}x(l-x)\left(1+\frac{2f^2}{l^2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)^2\right),$$

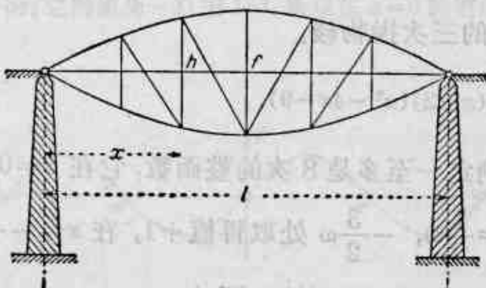

图 14

其中 l 是桥的跨度而 f 是矢高. 問图 14 中的桥的杆件长是多少?

答: $x=0,\ h=0;$ $x=\frac{l}{6},\ h=\frac{5f}{9}\left(1+\frac{8f^2}{9l^2}\right);$

$x=\frac{2l}{6},\ h=\frac{8f}{9}\left(1+\frac{2f^2}{9l^2}\right);$ $x=\frac{l}{2},\ h=f.$

27. 問怎样的三次抛物綫通过四点 $(-2,3)$, $(-1,2)$, $(0,-1)$, $(1,1)$?

解: 由拉格朗日内插公式得

$$y=3\frac{(x+1)(x+0)(x-1)}{(-2+1)(-2+0)(-2-1)}+2\frac{(x+2)(x-0)(x-1)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)}+\cdots$$

$$=\frac{7}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{3}x-1.$$

28. 在 xy 平面上有两个半徑都等于 r 的圓，它們的中心在同一个垂綫上. 这两个圓叠加起来是什么曲綫?

解: $y=b_1\pm\sqrt{r^2-x^2}+b_2\pm\sqrt{r^2-x^2}$. 如果取同号，就得橢圓

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{(y-b_1-b_2)^2}{(2r)^2}=1;$$

如果取异号，就得直綫 $y=b_1+b_2$.

29. 試确定一最低次数的整函数，它当 $x=\pm1$, $x=\pm2$ 时等于零，而当 $x=0$ 时，函数取得值 1.

答：$y=\frac{1}{4}(x^2-1)(x^2-4)$.

30. 試借助拉格朗日内插公式作一个通过点 $(-1,2)$, $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,0)$ 的三次抛物綫.

答：$y=\frac{1}{6}(x-2)(x^2-4x-9)$.

31. 試确定一至多是 8 次的整函数，它在 $x=0$, $\pm\omega$, $\pm2\omega$ 处等于零；在 $x=\frac{1}{2}\omega$, $-\frac{3}{2}\omega$ 处取得值 $+1$, 在 $x=-\frac{1}{2}\omega$, $+\frac{3}{2}\omega$ 处取得值 -1. （参閱第 24 頁第 6 題.）

解：利用拉格朗日内插公式，得到

$$g(x)=1\cdot\frac{x(x-\omega)(x+\omega)(x-2\omega)(x+2\omega)\left(x+\frac{3}{2}\omega\right)\left(x+\frac{1}{2}\omega\right)\left(x-\frac{3}{2}\omega\right)}{\left(\frac{1}{2}\omega\right)\left(-\frac{1}{2}\omega\right)\left(\frac{3}{2}\omega\right)\left(-\frac{3}{2}\omega\right)\left(\frac{5}{2}\omega\right)(2\omega)\omega(-\omega)}$$

$$+1\cdot\frac{x(x-\omega)(x+\omega)(x-2\omega)(x+2\omega)\left(x-\frac{1}{2}\omega\right)\left(x+\frac{1}{2}\omega\right)\left(x-\frac{3}{2}\omega\right)}{\left(-\frac{3}{2}\omega\right)\left(-\frac{5}{2}\omega\right)\left(-\frac{1}{2}\omega\right)\left(-\frac{7}{2}\omega\right)\left(\frac{1}{2}\omega\right)(-\omega)(-2\omega)(-3\omega)}$$

$$-1\cdot\frac{x(x-\omega)(x+\omega)(x-2\omega)(x+2\omega)\left(x-\frac{1}{2}\omega\right)\left(x+\frac{3}{2}\omega\right)\left(x-\frac{3}{2}\omega\right)}{\left(-\frac{1}{2}\omega\right)\left(-\frac{3}{2}\omega\right)\left(\frac{1}{2}\omega\right)\left(-\frac{5}{2}\omega\right)\left(\frac{3}{2}\omega\right)(-\omega)\omega(-2\omega)}$$

$$-1\cdot\frac{x(x-\omega)(x+\omega)(x-2\omega)(x+2\omega)\left(x-\frac{1}{2}\omega\right)\left(x+\frac{3}{2}\omega\right)\left(x+\frac{1}{2}\omega\right)}{\left(\frac{3}{2}\omega\right)\left(\frac{1}{2}\omega\right)\left(\frac{5}{2}\omega\right)\left(-\frac{1}{2}\omega\right)\left(\frac{7}{2}\omega\right)\omega(3\omega)(2\omega)}.$$

經过一些变形，由上可得

$$g(x)=\frac{16x(x^2-\omega^2)(x^2-4\omega^2)}{15\omega^7}\left(\frac{x^2-\frac{1}{4}\omega^2}{7}-\frac{x^2-\frac{9}{4}\omega^2}{3}\right)=$$

$$=\frac{64}{21}\frac{x}{\omega}\left(1-\frac{x^2}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\omega^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{15\omega^2}\right).$$

$g(x)$只有 7 次，且还有另外两个零点：$x=\pm\frac{1}{2}\omega\sqrt{15}$。如果令 $\omega=\pi$，那末函数当$x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm\frac{1}{2}\pi\sqrt{15}$ 时等于零．当 $x=\frac{\pi}{2}$，$-\frac{3\pi}{2}$时，它的值为$+1$，当$x=-\frac{\pi}{2}$，$+\frac{3\pi}{2}$时，它的值为-1(图 15)．所以在 $x=0$ 的附近，$g(x)$ 近似于函数 $y=\sin x$．

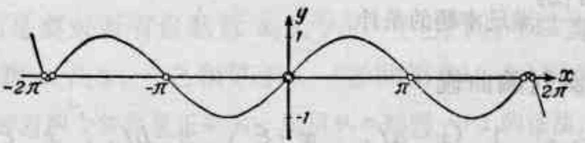

图　15

32. 試确定一个最多是三次的整函数$g(x)$，当$x=0,1,3,5$时，它取得值 $y=0, 0.208, 0.84, 1.92$. 問 $g(2)$与 $g(4)$是多少？何处是函数的其他零点？

答：$y=0.004x^3+0.020x^2+0.184x$，$g(2)=0.48$，$g(4)=1.312$．不存在其他(实)的零点．

33. 扇形中心角 $x(0\leqslant x<2\pi)$是多少时，弦才二等分所屬扇形的面积？

解：所考虑的方程是$\frac{1}{2}x=\sin x$，它的解是 $x=1.895=\text{arc}\,108^\circ 36'$．

34. 試决定函数

$$y=\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}\quad(a<b<c)$$

的零点、极点及正負号，以及函数图形的漸近綫．(参閱第 9 題．)

答：零点 $x=a$，$x=b$；极点 $x=c$，漸近綫 $y=x+c-a-b$．

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & <a & a & a<x<b & b & b<x<c & >c \\ y & <0 & 0 & >0 & 0 & <0 & >0 \end{array}.$$

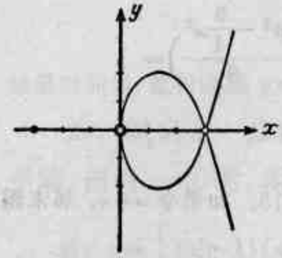

图 16

35. 試繪曲綫 $y^2=(x-a)^2(x-b)^2\times\times(x-c)$的草图[①]，其中 $a<c<b$.

解：只有当 $x=a$ 及 $x\geqslant c$ 时函数才存在(有实的函数值). $x=a$ 是一个孤立点，$x=c$ 与 $x=b$ 是零点. $x=b$, $y=0$ 是一个二重点(图16).

36. 設曲綫图形是缺去与坐标軸的交点的单位圓，求它的方程.

解：当 $x=0$, $y=\pm1$ 及 $x=\pm1$, $y=0$ 时函数有空隙. 所以方程 $y=\dfrac{x(1-x^2)^{3/2}}{x-x^3}$满足本題的条件.

37. 試討論曲綫

$$y=f(x)=\frac{1}{2}\eta\left\{\frac{x-a}{\xi-a}\left(1-\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)+\frac{x-b}{\xi-b}\left(1+\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)\right\},$$

如果 $a\leqslant x\leqslant b$ 且 $a<\xi<b$.

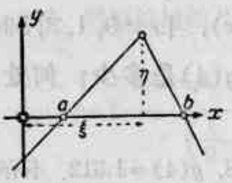

图 17

解：1) $x<\xi$, $y=\dfrac{\eta}{\xi-a}(x-a)$, 2) $x>\xi$, $y=\dfrac{\eta}{\xi-b}(x-b)$. 曲綫是由两条从点$(\xi,\eta)$作出的半直綫所构成，它們与 x 軸交于点 $x=a$ 与$x=b$, 然而交点(ξ,η)不属于此曲綫(图17).

38. 試計算 $\log_2 3$.

解：我們有 $\log_2 3=\dfrac{\lg 3}{\lg 2}=1.5849$.

39. 怎样的对数曲綫 $y=\log_a x$ 通过点(ξ,η)?

解：对数的底必須是 $a=\xi^{\frac{1}{\eta}}$ $(\xi>0,\ \eta\neq0)$. 若 $\eta=0$, $\xi\neq1$, 則本題沒有解. 如果 $\xi=1$, $\eta=0$, 那末 a 是不定的.

---

① 原題是 $y=(x-a)(x-b)\sqrt{x-c}$. 改了之后，使題目、解答以及草图相一致——譯者.