全国研究生入学

数学统考应试指导

李恒沛　王日爽　萧亮壮　编

广西科学技术出版社

全国研究生入学

数学统考应试指导

李恒沛　王月爽　萧亮壮　编

*

广西科学技术出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行

广西民族印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1／32　印张 21.25　字数 475,000

1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷

印　数：1—6,300 册

ISBN 7-80565-029-2
O·3

定价：6.15 元

内容简介

本书是根据国家教委颁发的报考硕士研究生的《数学复习大纲》编写的，积编了大纲要求掌握的全部内容，以作为考生备考的得力工具。全书分四篇十一章：第一篇高等数学（含八章）；第二篇线性代数（含一章）；第三篇复变函数（含一章）；第四篇概率论（含一章）。每章由内容摘要、例题选析两部分组成。各章都对基本概念、定理、公式和法则系统地、纲要性地加以归纳，并对近几年各大学招考研究生的数学试题进行精选分类，编入例题选析中，从而保证在深度、广度上达到数学统考应试水平。

书末附有一九八七、八八年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学副题（预备卷）和试题（正式考卷），共计四套（每套分试卷一～试卷五），均有详细解答。

本书是全国报考硕士研究生的考生数学应试的复习指导书。对于各类高校大学生，数学教师，成人高校学员也有一定的参考价值。

序

本书是我系李恒沛副教授、王日爽教授、萧亮壮副教授为帮助报考硕士研究生的考生复习数学而编写的指导书，是考生备考的得力工具.

从1987年开始，按国家教委规定，全国研究生入学数学考试实行统一命题. 作者多年参加全国研究生入学数学试卷的评阅工作，熟知数学统考的命题要求，又收集了大量的最新资料，使本书内容在编排上，目标明确，更富于针对性、可靠性，在深度、广度上都达到了数学统考应试水平.

从已进行过的两届数学统考来看，主要着重于基本概念、基本理论和基本方法的训练，而不是扣偏题，出难题和怪题. 无论考试的形式怎样，题目的类型如何，考生只要掌握了以上“三基”，就能运用自如，在统考中考出好的水平. 作者正是基于这一宗旨，密切联系教学实际，及时编写了这本书. 全书集编了国家教委颁发的硕士生入学考试《数学复习大纲》所要求掌握的全部内容，共分四篇十一章，包括高等数学、线性代数、复变函数、概率论等内容. 各章既有简明概括的内容摘要，又有典型的例题分析与详解，尤其突出方法的论述和解题的技巧. 此外，收集了一九八七、八八年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学副题、试题，共计四套（每套分试卷一～试卷五），全部附有详细解答，以

加强考生数学应试能力的模拟训练。

本书的出版，必将有助于有志报考研究生的考生全面掌握数学统考的内容，提高考生的应试水平。故此特向广大考生推荐这本书。

北京航空航天大学数学物理系教授
李心灿
一九八八年春

目　　录

第一篇　高 等 数 学

第一章　函数、极限与连续……………………………………（ 1 ）
§1.1 内容摘要………………………………………………（ 1 ）
1．函数…………………………………………………（ 1 ）
2．极限…………………………………………………（ 3 ）
3．连续…………………………………………………（ 6 ）
§1.2 例题选析（ 23题 ）……………………………………（ 8 ）
第二章　一元函数微分学……………………………………（ 22 ）
§2.1 内容摘要………………………………………………（ 22 ）
1．导数与微分 …………………………………………（ 22 ）
2．中值定理 ……………………………………………（ 28 ）
3．罗比塔(L'Hospital)法则……………………………（ 30 ）
4．台劳(Taylor)公式 …………………………………（ 31 ）
5．导数的应用 …………………………………………（ 32 ）
§ 2.2　例题选析(25题) ……………………………………（ 36 ）
第三章　一元函数积分学……………………………………（ 62 ）
§ 3.1　内容摘要 …………………………………………（ 62 ）
1．　不定积分的概念与性质 …………………………（ 62 ）
2．　不定积分的求法 …………………………………（ 63 ）
3．　定积分的概念与性质 ……………………………（ 71 ）

4. 微积分学基本定理 …………………………… (73)
5. 定积分的计算方法 …………………………… (74)
6. 定积分的应用 …………………………………… (75)
7. 广义积分……………………………………………… (80)
§ 3.2 例题选析(54题)……………………………… (82)
第四章 空间解析几何 …………………………… (131)
§ 4.1 内容摘要……………………………………… (131)
1. 矢量代数………………………………………… (131)
2. 平面与直线 ……………………………………… (138)
3. 常见的二次曲面 ………………………………… (141)
§ 4.2 例题选析(10题)……………………………… (144)
第五章 多元函数微分学 ………………………… (152)
§ 5.1 内容摘要 ……………………………………… (152)
1. 二元函数概念 …………………………………… (152)
2. 二元函数的极限与连续 ………………………… (153)
3. 多元函数微分法 ………………………………… (154)
4. 几何应用………………………………………… (161)
5. 多元函数的极值 ………………………………… (163)
§ 5.2 例题选析(30题)……………………………… (164)
第六章 多元函数积分学 ………………………… (191)
§ 6.1 内容摘要……………………………………… (191)
1. 二重积分………………………………………… (191)
2. 三重积分………………………………………… (197)
3. 曲线积分 ………………………………………… (202)
4. 曲面积分 ………………………………………… (206)
5. 各类积分之间的联系 …………………………… (210)
6. 散度与旋度 ……………………………………… (212)

§ 6.2　例题选析(32题)……………………………(213)
第七章　无穷级数 ……………………………(242)
§ 7.1　内容摘要……………………………(242)
1.　常数项级数 ……………………………(242)
2.　幂级数……………………………(247)
3.　台劳级数……………………………(250)
4.　富里哀级数 ……………………………(253)
§ 7.2　例题选析(25题)……………………………(256)
第八章　常微分方程 ……………………………(277)
§ 8.1　内容摘要……………………………(277)
1.　一般概念……………………………(277)
2.　一阶微分方程 ……………………………(278)
3.　可降阶的高阶微分方程……………………………(282)
4.　线性微分方程 ……………………………(283)
5.　常系数齐次线性微分方程……………………………(284)
6.　常系数非齐次线性微分方程 ……………………………(285)
7.　欧拉方程 ……………………………(287)
8.　微分方程的幂级数解法 ……………………………(287)
9.　常系数线性微分方程组 ……………………………(287)
§ 8.2　例题选析(30题)……………………………(288)

第二篇　线 性 代 数

第九章　线性代数 ……………………………(320)
§ 9.1　内容摘要……………………………(320)
1.　行列式……………………………(320)
2.　矩阵 ……………………………(325)

3. 线性方程组 …………………………………… (332)
4. 线性空间与线性变换 ………………………… (335)
5. 二次型………………………………………… (340)
§ 9.2 例题选析(23题)………………………… (344)

第三篇 复变函数

第十章 复变函数 …………………………………… (369)
§ 10.1 内容摘要 …………………………………… (369)
1. 复变函数的基本概念 ………………………… (369)
2. 复变函数的积分 …………………………… (374)
3. 幂级数……………………………………… (376)
4. 罗朗(Laurent)级数…………………………… (378)
5. 留数及其应用 ……………………………… (380)
6. 保角映射 …………………………………… (382)
§ 10.2 例题选析(20题) ………………………… (384)

第四篇 概率论

第十一章 概率论 …………………………………… (405)
§ 11.1 内容摘要…………………………………… (405)
1. 事件与概率 ………………………………… (405)
2. 随机变量及其分布 ………………………… (409)
3. 随机变量的数字特征 ……………………… (417)
4. 大数定律与中心极限定理…………………… (419)
§ 11.2 例题选析 (30题)………………………… (421)

附录Ⅰ 一九八七年全国攻读硕士学位研究生入学考试
数学副题及参考答案 ……………………… (449)
(试卷一～试卷五)
一九八八年全国攻读硕士学位研究生入学考试
数学副题及参考答案 ……………………… (498)
(试卷一～试卷五)
附录Ⅱ 一九八七年全国攻读硕士学位研究生入学考试
数学试题及参考答案 ……………………… (555)
(试卷一～试卷五)
一九八八年全国攻读硕士学位研究生入学考试
数学试题及参考答案 ……………………… (609)
(试卷一～试卷五)

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限与连续

§1.1　内容摘要

1. 函数

(1) 定义

设有两个非空实数集X、Y，若对X中的每一个数x，依照对应法则f都对应Y中唯一的一个数y，则称对应法则f是定义在数集X上的函数（或称映射）. 记为

$$f:\quad X \longrightarrow Y,$$

其中集X称为函数的定义域，X中的任一数x根据法则f所对应的y，称为f在x的函数值，记为$y=f(x)$. 函数值集合

$$f(X)=\{y \mid y=f(x),\ x\in X\}\subset Y$$

称为函数的值域. 若把x作为在X中取所有值的变量，y作为在Y中取值的变量，则称x为函数f的自变量，y为函数f的因变量.

(2) 几种特性

有界性　若存在正的常数M，使对任意$x\in X$，有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 f 在数集 X 上有界.

单调性 若函数 $f(x)$, $x \in X$, 对 X 上任意 x_1 与 x_2, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 f 在 X 上单调增加（或单调减少）.

奇偶性 设函数 $f(x)$, $x \in X$, 其中 X 为对称于原点的数集, 即当 $x \in X$, 有 $-x \in X$, 且

$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{或} f(-x) = f(x))$$

则函数 f 在 X 上为奇函数（或偶函数）.

周期性 设函数 $f(x)$, $x \in X$, 若存在正数 p, 对任意 $x \in X$, 有 $x + p \in X$, 且

$$f(x+p) = f(x),$$

则称函数 f 为周期函数, p 称为函数 f 的一个周期.

若函数 f 有最小的正周期, 则称这个最小正周期为函数 f 的周期.

(3) 复合函数

设 $y = f(u)$, $u \in B$; $u = g(x)$, $x \in A$, 且

$$E = \{x \mid x \in A,\ g(x) \in B\} \neq \phi,$$

若对任何一个 $x \in E$, 依照对应法则 g 对应唯一个 $u \in B$, 再依照对应法则 f 对应唯一的一个 y. 因此, 对于每一个 $x \in E$, 都有唯一确定的 y 与之相对应, 这就在 E 上定义了一个函数, 此函数称为由函数 f 与 g 复合所成的 E 上的复合函数, 记为

$$y = f[g(x)], \quad x \in E,$$

或简记为 fog.

(4) 反函数

设 $y=f(x)$，　$x\in A$，其值域为 $f(A)$，若对于 $f(A)$ 中每一个 y，有唯一的一个 $x\in A$ 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 $f(A)$ 上定义了一个函数，这个函数称为函数 f 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\qquad y\in f(A)$$

或

$$f^{-1}:\quad f(A)\longrightarrow A.$$

(5) 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等统称为基本初等函数.

凡是由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合所构成的函数称为初等函数.

2. 极限

(1) 定义

数列的极限

若对任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$，则称数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于数 A，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

若数列 $\{x_n\}$ 极限不存在，则称它是发散的。

函数 $f(x)$ 的极限

若对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

类似可以写出当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义. 注意：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=A.$$

（2）存在准则

1° 数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是：对于任给的$\varepsilon>0$，总存在一个自然数N，当m、$n>N$时，恒有$|x_m-x_n|<\varepsilon$（Cauchy收敛准则）.

2° 单调有界数列必有极限.

3° 若存在某自然数N_0，当$n>N_0$时，总有$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=c$，则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=c$（夹逼法则）.

对于函数$f(x)$极限存在的判定，也有类似上述三条准则.

（3）数列极限的性质

1° 若数列$\{x_n\}$有极限（即收敛），则它的极限是唯一的.

2° 若数列$\{x_n\}$有极限，则它必为有界数列，但其逆不一定成立.

3° 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$， $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$，且$A<B$，则存在自然数$N$，当$n>N$时，有$x_n<y_n$.

（4）函数极限的性质

1° 若函数$f(x)$有极限，则其极限是唯一的.

2° 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在某个$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\leqslant M$，其中$M$为一个正数.

3° 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$A>0$（或$A<0$），则存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）.

（5）无穷小与无穷大

1° 无穷小：若变量的极限等于零，则称此变量在一定趋向下为无穷小。

2° 无穷大：若变量的极限等于∞，则称此变量在一定趋向下为无穷大。

(6) 等价无穷小

设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，　$g(x)\neq 0$，

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$ 与$g(x)$是等价无穷小（$x\to x_0$），且记为

$$f(x)\sim g(x)\quad (x\to x_0)。$$

例如：

$$\sin x\sim x \qquad (x\to 0)$$

$$\operatorname{tg} x\sim x \qquad (x\to 0)$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2} \qquad (x\to 0)$$

$$e^x-1\sim x \qquad (x\to 0)$$

$$\ln(1+x)\sim x \qquad (x\to 0)$$

$$(1+x)^a-1\sim ax \qquad (x\to 0)$$

$$\arcsin x\sim x \qquad (x\to 0)$$

$$\operatorname{arc\,tg} x\sim x \qquad (x\to 0)$$

(7) 求极限的若干方法

1° 利用极限定义；

2° 利用代数式化简；

3° 利用极限运算法则；

4° 利用夹逼法则；

5° 利用“单调有界变量必有极限”法则；

6° 利用两个重要极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

或
$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

7° 利用无穷小性质（例如，有界变量与无穷小的乘积是无穷小.）；

8° 利用等价无穷小.

除此之外，还有许多求极限的方法，以后会经常遇到.

3. 连续

(1) 定义

1° 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续；

2° 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续；

3° 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

上述三种定义是等价的.

(2) 左连续与右连续

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左（右）邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)\quad (\text{或}\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0))$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左（或右）连续。

函数$f(x)$在点 x_0 连续的充要条件是函数$f(x)$在点 x_0 既左连续又右连续，即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任意一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；

若函数 $f(x)$ 在(a,b) 内连续，且 $f(x)$ 在点 a 右连续，在点 b 左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。

(3) 在闭区间上连续函数的性质

1° 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有最小值与最大值。

2° 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界。

3° 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$（称之为介值定理）。

4° 若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$（即$f(a)$与$f(b)$异号），则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$(称之为零点存在定理或称根的存在定理)。

(4) 间断点及其类型

1° 定义

若函数 $f(x)$ 的定义域内的点 x_0 不满足连续性定义，则称点 x_0 为函数$f(x)$的间断点（或不连续点）。或 $f(x)$在点 x_0 无定义，或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，那么，