



国防特色教材·信息与通信工程

自适应信号处理技术

ZISHIYING XINHAO CHULI JISHU

赵春晖 张朝柱 王立国 崔颖 编著

 北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

北京航空航天大学出版社 哈尔滨工程大学出版社
哈尔滨工业大学出版社 西北工业大学出版社



国防特色教材·信息与通信工程

自适应信号处理技术

赵春晖 张朝柱 王立国 崔颖 编著

北京理工大学出版社

北京航空航天大学出版社 哈尔滨工程大学出版社
哈尔滨工业大学出版社 西北工业大学出版社

内容简介

本书系统地介绍了自适应信号处理的基本理论、基本算法和典型应用。从最优准则方面看,本书主要涉及最小均方误差准则和最小二乘准则,在自适应非线性信号处理中,结合实际需要,也涉及最小均方误差准则。从滤波器结构方面看,主要介绍横向滤波器和格型滤波器以及典型的非线性滤波器。在应用方面,重点介绍自适应信号处理的四种典型应用:自适应模拟、自适应逆模拟、自适应干扰对消和自适应预测,以及盲自适应信号处理算法及应用。

全书共分 11 章:主要包括绪论、维纳滤波、最小均方自适应算法、改进型的最小均方算法、最小均方误差线性预测及自适应格型滤波、线性最小二乘滤波、最小二乘横向滤波自适应算法、最小二乘格型滤波自适应算法、非线性自适应滤波及其算法、自适应信号处理的应用,盲自适应信号处理算法及应用。另外,本书附有可供学生进行计算机仿真的实验范例。

本书可作为通信、电子信息工程专业及其他相关专业大学高年级学生和研究生的一门教材,也可作为从事信号与信息处理领域研究的工程技术人员的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

自适应信号处理技术/赵春晖等编著. —北京:北京理工大学出版社, 2009. 8
国防特色教材. 信息与通信工程
ISBN 978-7-5640-2383-6

I. 自… II. 赵… III. 自适应控制-信号处理-高等学校-教材 IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 108509 号

自适应信号处理技术

赵春晖 张朝柱 王立国 崔颖 编著
责任编辑 周艳红

*

北京理工大学出版社出版发行

北京市海淀区中关村南大街 5 号 (100081) 发行部电话: 010-68944990 传真: 010-68944450

<http://www.bitpress.com.cn>

北京地质印刷厂印刷 全国各地新华书店经销

*

开本: 787 毫米×960 毫米 1/16 印张: 15.5 字数: 314 千字
2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷 印数: 1~3000 册
ISBN 978-7-5640-2383-6 定价: 38.00 元

前 言

自适应信号处理是现代信号与信息处理学科的一个重要分支，自适应滤波理论和技术是统计信号处理和非平稳信号处理的重要组成部分。在通信、雷达、控制、声纳、遥感、生物医学等工程领域具有广泛的应用。

本书旨在介绍自适应信号处理的基本理论、基本算法和典型应用。全书共分11章。其中：第1章主要介绍自适应信号处理的基本概念、自适应信号处理技术的发展过程和自适应信号处理的基本应用。第2、3、4、5章主要介绍基于最小均方误差准则下的最优滤波及其自适应算法，包括维纳滤波、最小均方自适应算法、改进型最小均方自适应算法、线性预测及自适应格型滤波。第6、7、8章主要介绍基于最小二乘准则下的最优滤波及其自适应算法，包括最小二乘滤波、最小二乘横向滤波自适应算法、最小二乘格型滤波自适应算法。第9章主要介绍非线性滤波及其自适应算法。包括Volterra级数滤波器及LMS和RLS Volterra级数自适应滤波器、形态滤波器理论及自适应算法、层叠滤波器理论及自适应算法。第10章主要介绍自适应信号处理的典型应用，包括自适应模拟与系统辨识、自适应逆模拟、自适应干扰对消、自适应预测。第11章主要介绍盲自适应信号处理算法及应用。

另外，为便于读者学习和利用自适应信号处理的基本理论和基本算法进行相应的仿真研究，书后提供了10个自适应信号处理的典型实验范例。并附有矩阵和向量的基础知识、输入信号自相关矩阵以及时间平均自相关矩阵的主要性质。

本书结合了作者多年在自适应信号处理领域的教学心得，并融入了作者多年来从事非线性信号处理领域的研究所取得的部分科研成果，同时参考了国内外较新的同类教材和论文撰写而成。

本书的编写与出版得到了“十一五”国防特色学科专业教材出版计划和哈尔滨工程大学信息与通信工程学院、教务处等部门的大力支持，在此表示诚挚的感谢！同时对本书参考文献的相关作者表示感谢！

由于编者水平有限，书中难免还存在一些错误和缺点，希望广大读者批评指正。

编著者

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 自适应滤波的基本概念	1
1.2 自适应信号处理的发展过程	2
1.3 自适应信号处理的应用	3
第 2 章 维纳滤波	6
2.1 问题的提出	6
2.2 离散形式维纳滤波器的解	6
2.3 离散形式维纳滤波器的性质	8
2.3.1 正交原理的几何解释	8
2.3.2 正交原理推论	8
2.3.3 最小均方误差	9
2.4 横向滤波器的维纳解	9
2.4.1 横向滤波器的维纳-霍夫方程及其解	9
2.4.2 横向滤波器的误差性能	10
第 3 章 最小均方自适应算法	17
3.1 最陡下降法	17
3.1.1 最陡下降法的基本思想	17
3.1.2 最小均方误差最陡下降法	18
3.2 牛顿法	24
3.2.1 牛顿法的基本思想	24
3.2.2 最小均方误差牛顿法	25
3.3 LMS 算法	29
3.3.1 LMS 算法描述	29
3.3.2 LMS 算法的收敛性	31
3.3.3 LMS 算法的权向量噪声	35

3.3.4	LMS 算法的期望学习曲线	38
3.3.5	LMS 算法的性能	40
3.4	LMS 牛顿算法	42
第 4 章	改进型最小均方自适应算法	45
4.1	归一化 LMS 算法	45
4.1.1	基于约束优化问题求解归一化 LMS 算法	45
4.1.2	归一化 LMS 算法小结	47
4.2	块 LMS 算法	48
4.2.1	块自适应滤波器	48
4.2.2	块 LMS 算法描述	49
4.2.3	块 LMS 算法的收敛性	50
4.2.4	块 LMS 算法块长度的选择	50
4.3	快速块 LMS 算法	51
第 5 章	最小均方误差线性预测及自适应格型算法	53
5.1	最小均方误差线性预测	53
5.1.1	前向线性预测	53
5.1.2	后向线性预测	56
5.1.3	前向与后向线性预测的关系	58
5.2	Levinson-Durbin 算法	59
5.2.1	Levinson-Durbin 算法的导出	60
5.2.2	Levinson-Durbin 算法的几点说明	62
5.3	格型滤波器	64
5.3.1	格型滤波器的导出	64
5.3.2	格型滤波器的性质	66
5.3.3	格型滤波器的结构形式	67
5.4	最小均方误差自适应格型算法	68
5.4.1	自适应格型块处理迭代算法	68
5.4.2	自适应格型随机梯度算法	71
第 6 章	线性最小二乘滤波	74
6.1	问题的提出	74
6.2	线性最小二乘滤波的正则方程	76

6.2.1	正则方程的推导	76
6.2.2	正则方程的矩阵形式	77
6.2.3	根据数据矩阵构建的正则方程	78
6.3	线性最小二乘滤波的性能	80
6.3.1	正交原理的推论	80
6.3.2	最小平方和误差	80
6.4	线性最小二乘滤波的向量空间法分析	81
6.4.1	向量空间理论	81
6.4.2	线性最小二乘滤波的向量空间解释	84
6.4.3	线性最小二乘数据扩充更新关系	87
6.4.4	线性最小二乘时间更新	89
第 7 章	最小二乘横向滤波自适应算法	93
7.1	递归最小二乘算法	93
7.1.1	RLS 算法的导出	93
7.1.2	RLS 算法小结	96
7.2	RLS 算法的收敛性	97
7.2.1	RLS 算法的均值	97
7.2.2	RLS 算法的均方偏差	98
7.2.3	RLS 算法的期望学习曲线	99
7.3	RLS 算法与 LMS 算法的比较	100
7.4	最小二乘快速横向滤波算法	100
7.4.1	FTF 算法中的四个横向滤波器	101
7.4.2	横向滤波算子的时间更新	109
7.4.3	FTF 算法中的时间更新	112
7.4.4	FTF 算法描述	119
7.4.5	FTF 算法的性能	121
第 8 章	最小二乘格型滤波自适应算法	123
8.1	最小二乘格型滤波器	123
8.1.1	最小二乘前向预测误差的阶更新	123
8.1.2	最小二乘后向预测误差的阶更新	125
8.1.3	最小二乘格型结构	125
8.2	LSL 自适应算法	126

8.2.1	LSL 算法导出	126
8.2.2	LSL 算法小结	128
8.2.3	LSL 算法的性能	129
第 9 章	非线性滤波及其自适应算法	131
9.1	非线性滤波概述	131
9.2	Volterra 级数滤波器	132
9.2.1	连续的 Volterra 级数滤波器	133
9.2.2	离散的 Volterra 级数滤波器	133
9.3	LMS Volterra 级数滤波器	135
9.4	RLS Volterra 级数滤波器	137
9.5	形态滤波器结构元优化设计的自适应算法	138
9.5.1	形态滤波器的基本理论	139
9.5.2	误差准则	140
9.5.3	腐蚀与膨胀的自适应算法	141
9.6	自适应加权组合广义形态滤波器	145
9.6.1	广义形态滤波器的基本理论	145
9.6.2	广义形态滤波器加权组合自适应算法	145
9.7	层叠滤波器的自适应优化算法	147
9.7.1	层叠滤波器的基本理论	147
9.7.2	层叠滤波器最优估计算法	150
9.7.3	自适应层叠滤波器	157
第 10 章	自适应信号处理的应用	159
10.1	自适应模拟与系统辨识	159
10.1.1	系统辨识基本理论	159
10.1.2	Volterra 模型系统辨识	162
10.1.3	改进的 Volterra 模型系统辨识	164
10.1.4	FIR 滤波器综合的自适应模拟	168
10.2	自适应逆模拟	172
10.2.1	自适应逆模拟概述	172
10.2.2	自适应信道均衡	174
10.2.3	IIR 滤波器的自适应综合	180
10.3	自适应干扰对消	184

10.3.1	自适应干扰对消的原理	184
10.3.2	平稳噪声对消解	186
10.3.3	作为陷波滤波器的自适应干扰对消器	188
10.4	自适应预测	191
10.4.1	自适应预测概述	191
10.4.2	自适应预测器用于对消周期干扰	191
10.4.3	自适应谱线增强器	193
第 11 章	盲自适应信号处理算法及应用	196
11.1	盲系统辨识算法	196
11.1.1	基于自相关的 AR 模型的盲辨识算法	196
11.1.2	基于最大峰度准则的非因果 AR 系统辨识算法	200
11.2	盲均衡算法	205
11.2.1	Bassgang 类盲均衡算法	205
11.2.2	自适应频域最小差错概率均衡算法	212
11.2.3	过采样与独立分量分析的盲均衡算法	215
11.2.4	基于高阶统计量的盲均衡算法	218
计算机实验	222	
实验 1	LMS 算法的收敛性	222
实验 2	LMS 自适应线性预测	222
实验 3	LMS 自适应模型识别	223
实验 4	LMS 自适应均衡	224
实验 5	RLS 自适应线性预测	225
实验 6	RLS 自适应模型识别	226
实验 7	RLS 自适应均衡	226
实验 8	自适应格型块处理迭代算法仿真	226
实验 9	自回归模型的盲辨识	226
实验 10	基于恒模算法的盲均衡	227
附录 A 矩阵和向量	228	
A.1	矩阵	228
A.2	向量	229
A.3	二次型	230

A.4 特征值和特征向量.....	230
A.5 实对称矩阵.....	231
附录 B 相关矩阵.....	233
附录 C 时间平均相关矩阵.....	234
参考文献	236

第1章 绪 论

1.1 自适应滤波的基本概念

信号在采集和传输过程中往往会掺杂着噪声和干扰，信号处理的主要任务之一就是从中滤除噪声和干扰，从而提取有用信息，这一处理过程称为滤波。完成滤波功能的系统称为滤波器。人们对滤波器的研究就是在某种最优准则下如何设计最优滤波器的问题。20世纪40年代，维纳（Wiener）建立了在最小均方误差准则下的最优滤波理论（亦称维纳滤波理论），这一滤波理论要求：① 输入信号是广义平稳的；② 输入信号的统计特性已知。到了60年代，随着空间技术的发展，卡尔曼（Kalman）建立了适于非平稳信号处理的卡尔曼滤波理论。无论是维纳滤波，还是卡尔曼滤波，它们都需要输入信号的统计特性先验知识，而这些先验知识是由外界环境决定的，这往往是未知的或变化的，因此，无法满足最优滤波的要求。这就促使人们开始研究自适应滤波。

自适应滤波是研究一类结构和参数可以改变或调整的系统，这种系统能够通过和外界环境的接触来改善自身的信号处理性能，称为自适应系统。这类系统可以自动适应信号传送变化的环境和要求，无须知道信号的结构和先验知识，无须精确设计信号处理系统的结构和参数。

自适应系统是一类时变的非线性系统。自适应系统的非线性特性主要是由系统对不同信号环境实现自身调整确定的。例如，一个自适应滤波器的输入仅为有用信号时，它可以调整为一个全通系统；若输入为有用信号并掺杂噪声或干扰时，则它可根据噪声的特点，自动调整为一个带通或带阻系统。自适应系统的时变特性主要是由其自适应响应（自适应学习）过程确定的。当自适应过程结束，系统调整不再进行时，有一类自适应系统可成为线性系统，并称为线性自适应系统；与之相对应，存在另一类自适应系统，当系统调整不再进行时该系统仍具有非线性特性，这类自适应系统称为非线性自适应系统。由于线性自适应系统设计简便且易于数学处理，所以使用广泛。

自适应系统一般分为开环自适应系统和闭环自适应系统：开环自适应系统是对输入信号或环境特性进行测量，用测量得到的信息形成公式或算法，并用以调整自适应系统本身；而闭环自适应系统是利用系统调整所得结果的有关知识去优化系统的某种性能，因此，这类系统是带有性能反馈的自适应系统。开环与闭环自适应系统的原理框图如图1-1和图1-2所示。从图中可以看出：开环自适应系统的自适应算法仅由输入信号确定；而闭环自适应系统的自适应算法不仅取决于输入信号，而且还与输出结果有关，是由二者共同确定的。

当具体设计一个自适应系统时，是选择开环还是选择闭环，应考虑很多因素。其中输入信号以及性能指示信号的可利用性是要考虑的一个主要因素。一般开环自适应系统运算速度较快，相对容易实现，但它的适应性较差，应用面窄；而闭环自适应系统由于存在着性能反馈，能够自身优化系统结构和参数，使系统的适应性和可靠性得以改善。本书主要介绍闭环自适应系统。

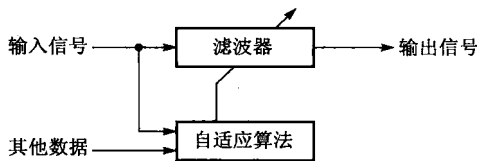


图 1-1 开环自适应系统

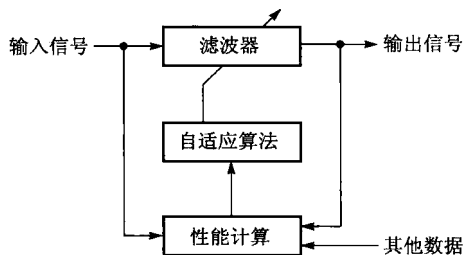


图 1-2 闭环自适应系统

1.2 自适应信号处理的发展过程

自适应信号处理由优化理论发展而来。通信领域中的优化理论的研究可以追溯到 20 世纪 20 年代，Nyquist 及 Hareley 研究了频带及信噪比问题。1942 年，Wiener 研究了基于最小均方差(MMSE)准则的在可加噪声中信号的最优滤波问题，并利用维纳—霍夫(Wiener-Hopf)方程给出了对连续信号情况的最优解。基于 MMSE 准则的最优滤波器称为维纳滤波器。1947 年，Levenson 给出了对于离散信号的维纳—霍夫方程的矩阵形式和解方程的一种递推算法。1960 年，Kalman 在 Wiener 工作的基础上，提出了基于 MMSE 的对于动态系统的离散形式递推算法，这就是有名的卡尔曼滤波算法，他的工作是最优滤波器研究的又一重大进展。

对最优化电子系统的研究及实际的需要，推动了对自适应信号处理系统的研究。20 世纪 50 年代末，自适应天线这一术语首先由 Van Atta 等人用来描述“自定相天线系统”。而自适应滤波器则最先由 Jakowatz 等人于 20 世纪 60 年代初用来描述一个从噪声中提取出现时刻随机的信号的系统。

自 20 世纪 60 年代开始，在许多领域出现了对自适应滤波技术的开创性研究工作。在这些工作的基础上，再加之大规模集成电路技术、计算机技术的飞速发展，自适应滤波技术在 40 多年来获得了极大的发展和广泛的应用，成为最活跃的研究领域之一。

自适应技术的发展都是与自适应滤波理论及算法研究不可分的。1959 年，Windrows 和 Hoff 提出的最小均方(LMS)算法对自适应技术的发展起了极大的作用。由于 LMS 算法简单和易于实现，它已被广泛应用。对算法的性能和改进算法已做了相当多的研究，并且至今仍然是一个重要的研究课题。1996 年，Hassibi 等证明 LMS 算法在准则下为最优，因此，在

理论上证明了算法具有坚实性,这是 LMS 算法研究的一个重要进展。当输入相关矩阵的特征值分散时,算法的收敛性变差。为了改善 LMS 算法的收敛性,文献中已提出了包括变长算法在内的很多改进算法。在这些算法中,由 Nagumo 等人提出的归一化算法得到了较广泛的应用。LMS 算法属于随机梯度算法类,属于这一类的还有梯度格型和其他一些梯度算法。但是 LMS 算法是最重要和应用最广泛的算法。

第二类重要算法是最小乘 (LS) 算法。LS 算法最早在 1795 年由高斯 (Gauss) 提出。但是直接利用 LS 算法时运算量大,且每一新输入数据必须对所有数据处理一次,因此,在自适应滤波中应用有限。递推最小二乘算法 (RLS) 通过递推方式寻求最优解,复杂度比直接 LS 算法小,获得了广泛应用。许多学者推导了 RLS 算法,其中包括 1950 年 Plackett 的工作。1994 年, Sayed 和 Kailath 建立了 Kalman 滤波和 RLS 算法的对应关系。这不但使人们对 RLS 算法有进一步的理解,而且 Kalman 滤波的大量研究成果可应用于自适应滤波处理,对自适应滤波技术起了重要的推动作用。1983 年, McWhirter 提出了一种可用 Kung 的 Systolic 处理结构实现的 RLS 算法。这一方法由 Ward 等和 McWhirter 进一步发展为用于空域自适应滤波的 QR 分解 LS 算法。该算法不是针对输入数据的相关矩阵进行递推,有很好的数据稳定性,而且可用 Systolic 处理结构高效地实现,因此,在空余处理中获得广泛应用。

采样矩阵求逆 (SMI) 算法是另一种重要的自适应算法。SMI 算法又称为直接矩阵求逆 (DMI) 算法。1974 年, Reed 等人首先系统地讨论了 SMI 算法。SMI 算法可以实现很高的处理速度,因此,在雷达等系统中获得了广泛应用。K. Teitlebaum 在其关于林肯实验室雷达的文中叙述了基于直接对数据矩阵进行处理的算法。该算法同样也采用 Systolic 处理结构进行处理。

最小方差无失真响应 (MVDR) 算法属于另一类重要的自适应算法。1969 年, Capon 在研究高分辨率测向的论文中讨论了在保证信号方向增益条件下,使自适应矩阵输出方差最小的准则,即最小方差无失真响应 (MVDR) 准则。该论文是研究 MVDR 算法的最早工作之一。

1.3 自适应信号处理的应用

本节简要地介绍闭环自适应系统的几个主要应用领域,有关详细内容将在第 10 章中具体阐述。

首先,将图 1-2 所示闭环自适应系统的性能反馈过程更确切地用图 1-3 来描述。图 1-3 中输入信号记为 $u(n)$, $d(n)$ 表示一个自适应系统的期望响应信号,即图 1-2 中的其他数据,自适应系统的实际输出记为 $y(n)$,误差信号 $e(n)$ 是期望响应信号 $d(n)$ 与实际输出信号 $y(n)$ 之差。采用这个误差信号,闭合性能反馈环按照某种使量度误差最小化的自适应算法来调整自适应系统的结构和参数,从而改变了系统的响应性能。

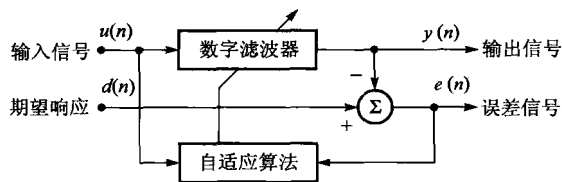


图 1-3 闭环自适应系统的结构模型

下面给出闭环自适应系统的几个应用示例。

图 1-4 所示的是自适应建模的原理性框图。图 1-4 (a) 是正向建模，图 1-4 (b) 是逆向建模。在正向建模中，自适应处理器调整自己的权系数，使得输出响应 $y(n)$ 尽可能逼近未知系统（被建模系统）的输出 $d(n)$ 。如果激励源的频率成分固定，且未知系统内部噪声 $v(n)$ 很小，那么自适应处理器将调整自己成为未知系统的一个好模型，自适应正向建模有时也称为系统辨识。正向建模已广泛应用于自适应控制系统、数字滤波器设计、相干估计和地球物理中。在逆向建模中，自适应处理器调整自己的权系数以成为被建模系统的逆系统，即把被建模系统的输出转换为输入信号的时延 $u(n-\Delta)$ ，这里延迟时间 Δ 包括被建模系统和自适应处理器中引起的时延。如果输入信号的频谱固定且噪声 $v(n)$ 很小，那么，自适应处理器调整权系数的结果是使自己成为未知系统的逆系统的好模型。逆向建模常用于自适应控制、语音分析、信道均衡、解卷积、数字滤波器设计等方面。

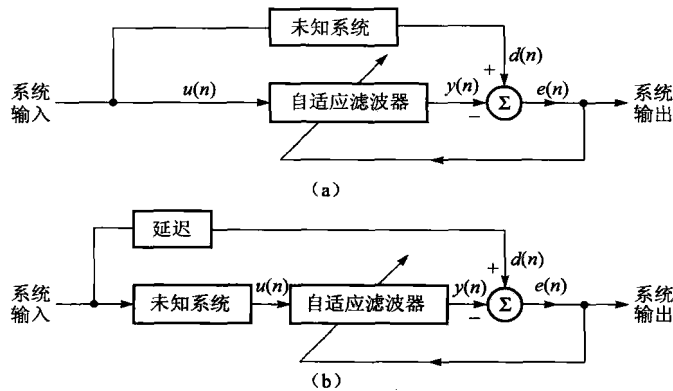


图 1-4 自适应建模原理框图

(a) 正向建模；(b) 逆向建模

图 1-5 所示的是自适应干扰对消器的基本结构，它在许多方面有广泛应用。这里期望响应 $d(n)$ 是信号与噪声之和，即 $d(n) = u(n) + v(n)$ ，自适应处理器的输入是与 $v(n)$ 相关的另一个噪声 $v'(n)$ 。当 $u(n)$ 与 $v(n)$ 不相关时，自适应处理器将调整自己的参数，以力图使 $y(n)$ 成为 $v(n)$ 的最优估计 $\hat{v}(n)$ 。这样， $e(n)$ 将逼近信号 $u(n)$ ，且其均方值 $E[e^2(n)]$ 为最小。噪声 $v(n)$ 就

得到一定程度的对消。

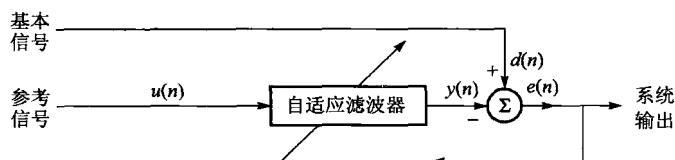


图 1-5 自适应干扰对消

图 1-6 所示的是自适应预测原理框图。自适应滤波器的输入信号为 $u(n)$ ，期望响应 $d(n)$ 是 $n+\Delta$ 时刻的信号值 $u(n+\Delta)$ ，滤波器的输出信号是预测值 $\hat{u}(n+\Delta)$ 。自适应滤波器的参数被复制到从动处理器，后者的输出是 $\hat{u}(n+\Delta)$ 。自适应预测可用于语音编码、谱估计、谱线增强、信号白化等方面。

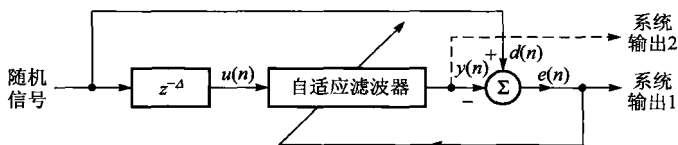


图 1-6 自适应预测原理框图

在以上的几个自适应应用示例中，读者应注意研究各种信号的接入方法以及各实用方框图与图 1-3 中的原理方框图的一致性。设计自适应滤波器时，首先要确定滤波器的结构，然后设计自适应算法，以调整滤波器参数，其目标是使某一特定的代价函数最小化。

第 2 章 维纳滤波

2.1 问题的提出

图 2-1 给出了离散形式维纳滤波器原理框图，滤波器的单位冲激响应为 $h(n)$ 。现要用滤波器 $h(n)$ 对输入信号 $u(n)$ 进行处理，对期望响应 $d(n)$ 进行估计，即滤波器的输出 $y(n)$ 为期望响应 $d(n)$ 的一个估值 $\hat{d}(n)$ ，则估计误差为 $e(n) = d(n) - y(n)$ 。其要求是在给定的约束条件以及最优准则下来设计最优滤波器。

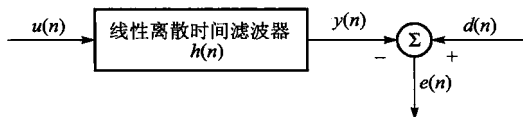


图 2-1 离散形式维纳滤波器原理框图

在这里，约束条件如下。

- (1) 滤波器是离散时间滤波器。
- (2) 滤波器是线性的。
- (3) 滤波器为无限冲激响应 (IIR) 滤波器，有限冲激响应滤波器可以看成是它的一个特例。

最优准则为最小均方误差 (MMSE) 准则。如果输入信号 $u(n)$ 和期望响应 $d(n)$ 平稳且联合平稳，则所得最优滤波器为维纳滤波器，这就是离散形式维纳滤波器的问题描述。其本质如下：给定一个输入信号 $u(n)$ ，设计一个线性离散滤波器 $h(n)$ ，对期望响应 $d(n)$ 估计，使得其估计误差 $e(n)$ 的均方值为最小。

2.2 离散形式维纳滤波器的解

如图 2-1 所示，设滤波器的单位冲激响应 $h(n)$ 用 w_0, w_1, w_2, \dots 表示，则滤波器的输出 $y(n)$ 为线性卷积和，即

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k u(n-k), \quad n=0,1,2,\dots \quad (2-1)$$

由于采用最小均方误差准则，所以，代价函数为均方误差，即

$$J = E[e^2(n)] \quad (2-2)$$

显然，代价函数 J 是滤波器的系数 $w_k (k=0,1,2,\dots)$ 的函数。为了设计最优滤波器，即选择最优滤波器系数，使代价函数 J 达到其最小值，定义代价函数 J 的梯度向量为 ∇J ，其第 k 个元素为

$$\nabla_k J = \frac{\partial J}{\partial w_k}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (2-3)$$

因此，若梯度向量 ∇J 的所有元素同时都等于零，即

$$\nabla_k J = 0, \quad k=0,1,2,\dots \quad (2-4)$$

则滤波器就是在均方误差意义下最优。

将式 (2-2) 代入式 (2-3)，可得

$$\begin{aligned} \nabla_k J &= \frac{\partial J}{\partial w_k} = \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial w_k} \\ &= 2E\left[\frac{\partial e(n)}{\partial w_k} e(n)\right] \\ &= -2E[u(n-k)e(n)], \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (2-5)$$

将式 (2-5) 的最后结果代入式 (2-4) 中，得到维纳滤波器最优解的等效形式为

$$E[u(n-k)e_o(n)] = 0, \quad k=0,1,2,\dots \quad (2-6)$$

式中， $e_o(n)$ 表示滤波器工作在最优条件下的估计误差。

根据式 (2-6) 可得结论：使均方误差代价函数 J 达到最小值的充要条件是其相应的估计误差 $e_o(n)$ 正交于用于估计期望响应的每个输入样本值。这就是线性最小均方估计的正交原理，它是线性优化滤波理论中最重要的原理之一。有关正交原理的几何解释及相关推论后面有详细介绍。

利用式 (2-6)，可以得到离散形式维纳滤波器的另一个充要条件。将式 (2-1) 代入式 (2-6)，可得

$$\begin{aligned} E[u(n-k)e_o(n)] &= E\{u(n-k)[d(n) - y_o(n)]\} \\ &= E\{u(n-k)[d(n) - \sum_{i=0}^{\infty} w_{oi}u(n-i)]\} = 0, \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (2-7)$$

式中， $y_o(n)$ 为滤波器工作在最优条件的输出； w_{oi} 为最优滤波器冲激响应的第 i 个系数。

将式 (2-7) 进行整理，可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{oi} E[u(n-k)u(n-i)] = E[u(n-k)d(n)], \quad k=0,1,2,\dots \quad (2-8)$$

式中， $E[u(n-k)u(n-i)] = r(i-k)$ 为滤波器输入的自相关函数； $E[u(n-k)d(n)] = p(-k)$ 为滤