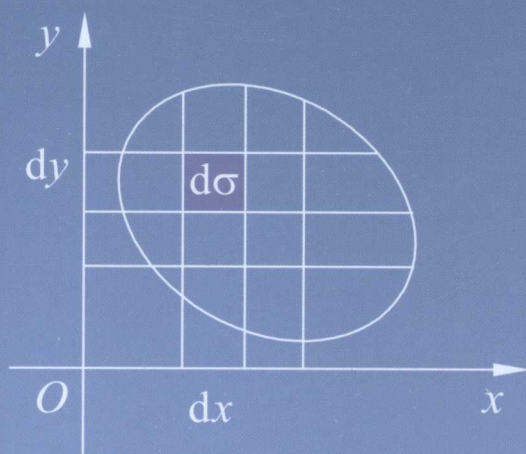


全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

主 编 刘增玉 郭连英
副主编 文冀中 于 烱



- 以应用为目的，以必需够用为度
- 注重思路引导，强调基础知识掌握
- 注重能力培养，弱化理论证明和复杂计算
- 理论联系实际，贯彻由浅入深的教学原则，精选例题及习题
- 模块化教学，为不同专业或专业方向提供了更大的选择空间



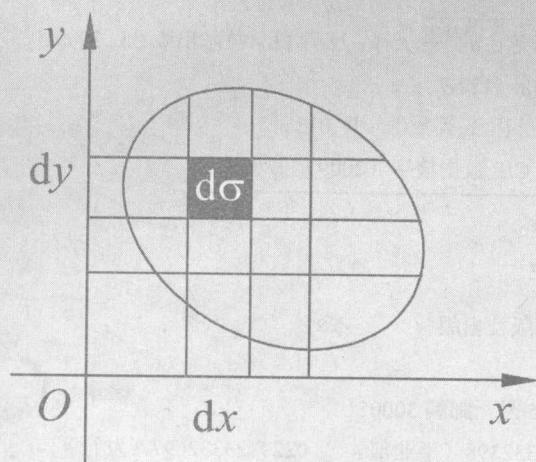
天津科学技术出版社

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

主 编 刘增玉 郭连英

副主编 文冀中 于 烱



 天津科学技术出版社

内 容 提 要

本书在认真总结、分析、吸收全国高职高专院校高等数学教学改革经验的基础上编写的。从高职高专人才培养目标出发,精选了教学内容,注重理论联系实际,适当降低了难度,遵循循序渐进的教学原则,精心配置了每节例题、习题,以便于学生对有关知识点的掌握与巩固。

本书分为一元微积分、微分方程、拉普拉斯变换、向量代数与空间解析几何、多元微积分、级数、线性代数、复变函数八个模块,共十二章。各专业可根据专业需求和教学时数选择讲授。

本书可作为三年制高职高专院校各专业及成人高等学校各专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘增玉等主编. —天津:天津科学技术出版社, 2009.5

ISBN 978-7-5308-5122-7

I. 高… II. 刘… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 053126 号

责任编辑:刘丽燕

责任印制:白彦生

天津科学技术出版社出版

出版人:胡振泰

天津市西康路 35 号 邮编 300051

电话:(022) 23332398 (事业部) (022) 23332697 (发行)

网址:www.tjkjcs.com.cn

新华书店经销

北京奥隆印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 22.5 字数 576 000

2009 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

定价:33.00 元

教材编写委员会

主 任：池宇峰

副主任：池寒峰 张 剑 姜天鹏

委 员：（以下排名按姓氏拼音字母的先后顺序为序）

郭连英 郭志明 侯学群 隽青龙 李 瑜

刘泽云 刘增玉 罗庆丽 马 鑫 任 玲

苏勇历 孙少平 文冀中 吴 鹏 于 欣

于 烱 张 陇 张相红 张月岭 朱鹏华

前 言

高等职业教育是高等教育的重要组成部分,其目的是为国家现代化建设培养技能型、复合型和应用型高级技术人才,随着经济的发展和社会的进步,高职教育发挥着越来越重要的作用。高等数学不仅是高职高专院校的一门重要的基础课、工具课,也是一门解决实际问题、广泛应用的基础学科,它对培养、提高学生的思维能力和唯物主义世界观的形成发挥着特有的作用。

本教材是全国高等职业、高等专科学校“高等数学”基础课教材,是依照教育部颁布的《高职高专教育数学课程教学基本要求》,从高职院校的人才培养目标出发,并结合作者多年来积累的高职高专“高等数学”教学经验编写而成的,充分体现了“以应用为目的、以必需够用为度”的高职教学基本原则。内容包括一元微积分、微分方程、拉普拉斯变换、向量代数与空间解析几何、多元微积分、级数、线性代数、复数与复变函数共八个模块。教师可以根据学生的专业特点选学不同的模块,学生也可以根据自己的爱好进行有选择的自学。

本教材内容具有以下特点:

1、结合高职高专学生特点,较好地处理了初等数学与高等数学的衔接,符合高职高专学生的认知结构。在内容处理上兼顾了对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力培养。

2、注重以实例引入概念,并最终回到数学应用的思想,突出强调数学概念与实际问题的联系,加强学生对数学的应用意识和兴趣,培养学生用数学的原理和方法消化吸收工程概念和工程原理及专业知识的能力。

3、缓解了目前高等数学教学中存在的内容多与课时少的矛盾,恰当地把握教学内容的深度和广度,不过分追求理论上的严密性,尽可能显示微积分的直观性与应用性,适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性。

4、注意对有关概念及结果实际情况的解释,力求表述确切、思路清晰、通俗易懂,并注重数学思想与方法的阐述。注意培养学生的综合素质,体现数学课程改革的新思路——数学教学不仅要具备工具功能,而且还要具备思维训练和文化素质教育的功能,也就是要立足于综合素质教育,重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力。

5、每一章节后都配有精选的习题和自测题,可供学生边学边练并及时地检验学习效果。

本书由刘增玉、郭连英担任主编,文冀中、于烺任副主编,郭志明、朱鹏华、于欣、侯学群、张隲、吴鹏、孙少平、罗庆丽也参与了本书的编写。其中第一至第四章由刘增玉编写;第五章由郭志明编写;第六章由朱鹏华编写;第七章由于欣编写;第八章由侯学群编写;第九章由张隲编写;第十章由吴鹏编写;第十一章由孙少平编写;第十二章由罗庆丽编写。

鉴于我们的研究能力、学术水平有限,书中难免有疏漏之处,恳切期望读者给予指正,以便进一步修改完善。

编 者

2009年6月

目 录

第一模块 一元微积分

第一章 极限与连续.....2	第二章 导数与微分.....44
第一节 函数.....2	第一节 导数的概念.....44
一、集合.....2	一、引例.....44
二、区间.....2	二、导数的定义.....45
三、邻域.....3	三、函数的可导性与连续性的关系..49
四、函数.....3	习题 2-1.....50
五、反函数.....8	第二节 导数的运算法则.....51
六、基本初等函数.....8	一、函数求导的四则运算法则.....51
七、复合函数.....12	二、反函数的求导法则.....52
八、初等函数.....13	三、复合函数求导法则.....53
习题 1-1.....14	习题 2-2.....54
第二节 极限的概念.....15	第三节 隐函数与参数式函数的导数.....55
一、数列的极限.....15	一、隐函数的导数(对数求导法) ..55
二、函数的极限.....17	二、参数式函数的导数.....58
习题 1-2.....20	三、初等函数的导数.....59
第三节 极限的运算法则.....21	习题 2-3.....60
一、四则运算法则.....21	第四节 高阶导数.....60
二、复合函数的极限运算法则.....24	习题 2-4.....62
三、极限不等式.....25	第五节 微分及其应用.....63
习题 1-3.....25	一、微分定义及几何意义.....63
第四节 极限存在准则.....26	二、微分公式及运算法则.....66
一、夹逼准则.....26	三、微分在近似计算中的应用.....67
二、单调有界收敛准则.....27	习题 2-5.....68
习题 1-4.....31	自我检测二.....69
第五节 无穷小 无穷大 无穷小的比较.....32	第三章 导数的应用.....71
一、无穷小.....32	第一节 中值定理.....71
二、无穷大.....33	一、罗尔(Rolle)定理.....71
三、无穷小的比较.....34	二、拉格朗日(Lagrange)中值定理.72
习题 1-5.....36	三、柯西(Cauchy)中值定理.....74
第六节 函数的连续性.....38	习题 3-1.....74
一、函数连续性的概念.....38	第二节 洛必达法则.....75
二、连续函数的四则运算.....40	一、 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.....75
三、复合函数的连续性.....40	二、其他类型的未定式.....77
四、反函数的连续性.....41	习题 3-2.....79
五、初等函数的连续性.....41	第三节 函数的单调性与极值.....80
六、闭区间上连续函数的性质.....41	一、函数单调性的判别法.....80
习题 1-6.....42	二、函数的极值及其求法.....81
自我检测一.....43	

三、函数在闭区间上的 最大值和最小值	84
习题 3-3	86
第四节 曲线的凹凸性与拐点 函数作图	86
一、曲线的凹凸性与拐点	86
二、函数作图	88
习题 3-4	89
自我检测三	90
第四章 不定积分	91
第一节 不定积分的概念与性质	91
一、原函数与不定积分	91
二、不定积分的几何意义	93
三、基本积分公式	94
四、不定积分的性质	95
习题 4-1	96
第二节 换元积分法	97
一、第一类换元法	97
二、第二类换元法	102
习题 4-2	106
第三节 分部积分法	107
习题 4-3	110
自我检测四	110
第五章 定积分	113

第一节 定积分的概念和性质	113
一、定积分问题举例	113
二、定积分的定义	115
三、定积分的性质	118
习题 5-1	119
第二节 微积分基本公式	120
一、变上限积分及其导数	121
二、牛顿—莱布尼兹 (Newton-leibniz) 公式	122
习题 5-2	124
第三节 定积分的换元积分法 与分部积分法	124
一、定积分的换元积分法	124
二、分部积分法	127
习题 5-3	128
第四节 定积分应用举例	128
一、定积分的元素法	129
二、平面图形的面积	129
三、体积	131
四、定积分的其他应用	133
习题 5-4	135
第五节 反常积分	135
习题 5-5	137
自我检测五	138

第二模块 微分方程

第六章 微分方程	141
第一节 微分方程的基本概念	141
习题 6-1	143
第二节 可分离变量的微分方程	144
习题 6-2	148
第三节 一阶线性微分方程	148
习题 6-3	151
第四节 可降阶的高阶微分方程	151
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	152
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	152
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	154
习题 6-4	155
第五节 二阶常系数齐次线性微分方程	155

一、二阶齐次线性微分方程解的 性质和通解结构	156
二、二阶常系数齐次线性微分 方程的解法	157
习题 6-5	160
第六节 二阶常系数非齐次线性 微分方程	160
一、二阶常系数非齐次线性微分 方程的性质和通解结构	160
二、 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	161
三、 $f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ 型	164
习题 6-6	166
自我检测六	166

第三模块 拉普拉斯变换

第七章 拉普拉斯变换	169
第一节 拉氏变换的概念与性质	169
一、拉氏变换的概念	169

二、拉氏变换的性质	171
习题 7-1	176
第二节 拉氏逆变换	176

一、简单的拉氏逆变换	176	一、微分方程的拉氏变换解法	179
二、用部分分式法分解象函数	178	二、线性系统的传递函数	181
习题 7-2	179	习题 7-3	183
第三节 拉氏变换的应用	179	自我检测七	184

第四模块 向量代数与空间解析几何

第八章 向量代数与空间解析几何	186	第三节 平面与直线	196
第一节 向量及其线性运算	186	一、点的轨迹方程的概念	196
一、空间直角坐标系	186	二、平面	197
二、向量与向量的线性运算	187	三、直线	200
三、向量的坐标表示式	189	四、平面、直线间的夹角	201
四、用坐标表示向量的模和 方向余弦	191	习题 8-3	204
习题 8-1	192	第四节 曲面与曲线	205
第二节 向量的乘法运算	192	一、几种常见的曲面及其方程	205
一、向量的数量积	192	二、二次曲面	208
二、向量的向量积	195	三、曲线	209
习题 8-2	196	习题 8-4	212
		自我检测八	212

第五模块 多元微积分

第九章 多元函数微积分	215	习题 9-3	228
第一节 多元函数	215	第四节 复合函数的求导法则	229
一、区域	215	一、多元复合函数的求导法则	229
二、二元函数	216	二、隐函数的求导法	232
习题 9-1	219	习题 9-4	234
第二节 偏导数	220	第五节 二重积分	235
一、偏导数的概念	220	一、二重积分的概念	235
二、高阶偏导数	223	二、二重积分的性质	237
习题 9-2	224	习题 9-5	238
第三节 全微分	224	第六节 二重积分的计算方法	238
一、全微分的定义	224	习题 9-6	243
二、全微分在近似计算中的 应用举例	227	自我检测九	244

第六模块 级数

第十章 级数	246	习题 10-2	254
第一节 常数项级数的概念和性质	246	第三节 绝对收敛与条件收敛	255
一、基本概念	246	一、交错级数及其审敛法	255
二、级数的基本性质	248	二、任意项级数、绝对收敛 与条件收敛	256
习题 10-1	249	习题 10-3	258
第二节 正项级数及其审敛法	250	第四节 幂级数	258
一、基本定理	250	一、函数项级数	258
二、比较审敛法	250	二、幂级数	259
三、比值审敛法	252		

三、幂级数的运算	262
习题 10-4	265
第五节 傅立叶级数	265
一、三角函数系与三角级数	266
二、周期为 2π 的函数展开成 傅立叶级数	266
三、正弦级数与余弦级数	269

习题 10-5	272
第六节 以 $2l$ 为周期的函数展开为 傅立叶级数	272
习题 10-6	274
自我检测十	275

第七模块 线性代数

第十一章 行列式 矩阵 线性方程组	277
第一节 行列式的定义和性质	277
一、二阶行列式	277
二、三阶行列式	278
三、 n 阶行列式	281
四、行列式的性质	282
习题 11-1	284
第二节 矩阵的概念及其运算	285
一、矩阵的基本概念	285
二、矩阵的运算	287
习题 11-2	290
第三节 逆矩阵	290
一、逆矩阵的概念与性质	291
二、逆矩阵的求法	291
三、利用逆矩阵求线性方程组和 矩阵方程的解	293

习题 11-3	295
第四节 矩阵的初等变换 矩阵的秩	295
一、矩阵的初等变换	296
二、矩阵的秩	296
习题 11-4	298
第五节 分块矩阵	299
一、分块矩阵的加法	299
二、分块矩阵的乘法	300
三、分块对角矩阵的逆矩阵	302
习题 11-5	303
第六节 线性方程组	304
一、高斯消元法	304
二、一般线性方程组解的讨论	306
习题 11-6	312
自我检测十一	312

第八模块 复数与复变函数

第十二章 复数与复变函数	316
第一节 复数	316
一、复数的概念	316
二、复数的几何表示	316
三、复数的三种形式及运算	317
习题 12-1	320
第二节 复变函数	321
一、复变函数的概念	321
二、映射的概念	321

习题 12-2	322
第三节 复变函数的极限与连续性	323
一、复变函数的极限	323
二、复变函数的连续性	324
习题 12-3	324
自我检测十二	324
附录一 正弦型曲线	325
附录二 习题参考答案	327
参考文献	352

第一模块 一元微积分

知识结构:

- 极限与连续
- 导数与微分
- 导数的应用
- 不定积分
- 定积分

第一章 极限与连续

极限是高等数学的一个重要概念，极限理论是微积分的根基；连续性是函数的一种属性。本章在介绍极限理论的基础上，讨论函数的连续性。

第一节 函 数

一、集合

集合是现代数学的一个最基本的概念，数学的各个分支普遍运用集合的表示方法和符号。在中学阶段已经学习过集合的知识，现在把其中部分内容进行回顾。

1. 集合的概念

定义 1 具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**。如某学校图书馆的藏书；所有的自然数；方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的实数解等，都分别构成一个集合。集合通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示。

组成某一集合的对象称为该集合的**元素**。元素通常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示。集合中的元素具有**确定性、互异性和无序性**。

若 a 是集合 A 的元素，记作“ $a \in A$ ”，读作“ a 属于 A ”；否则记作“ $a \notin A$ ”（或 $a \bar{\in} A$ ），读作“ a 不属于 A ”。

2. 集合的表示法

通常集合的表示方法用列举法和描述法。

(1) **列举法** 把集合中的元素一一列举出来，写在大括号 $\{ \}$ 内，每个元素只写一次，不分次序。如小于 10 的正偶数构成的集合表示为 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ；满足不等式 $|x+1| \leq 2$ 的所有整数构成的集合表示为 $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ 。

(2) **描述法** 把集合中元素所具有的共同属性描述出来，写在大括号 $\{ \}$ 内。不等式 $|x+1| \leq 2$ 的所有实数解构成的集合表示为 $B = \{x | -3 \leq x \leq 1, x \in R\}$ 。

集合中的元素都是数时称为**数集**。常见的数集有自然数集 N ，整数集 Z ，有理数集 Q ，实数集 R ，正整数集 N^+ 。

二、区间

区间是高等数学中常用的实数集，分为有限区间和无限区间，具体定义如下。

设 a, b 为任意实数, 且 $a < b$.

1. 有限区间

开区间: $(a, b) = \{x \mid a < x < b, x \in R\}$

闭区间: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in R\}$

半开区间: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b, x \in R\}$; $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b, x \in R\}$.

a, b 称为区间的端点, $b - a$ 称为区间的长度.

2. 无限区间

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a, x \in R\}$; $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a, x \in R\}$;

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b, x \in R\}$; $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b, x \in R\}$;

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in R\}$.

三、邻域

设 $x_0 \in R$, $\delta > 0$, 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

其中 x_0 称为邻域中心, δ 称为邻域半径.

从数轴上看, $U(x_0, \delta)$ 表示到点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合, 如图 1-1. 故有

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\} = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

在点 x_0 的 δ 邻域中去掉中心点 x_0 的集合, 称为点 x_0 的去心 δ 邻域, 如图 1-2, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 因而有

$$\dot{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

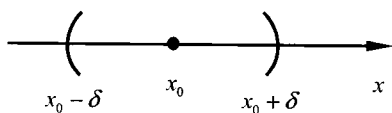


图 1-1

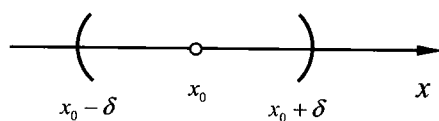


图 1-2

如 $U(1, 0.02) = (0.98, 1.02)$, $\dot{U}(1, 0.02) = (0.98, 1) \cup (1, 1.02)$.

x_0 的左 δ 邻域: $(x_0 - \delta, x_0)$; x_0 的右 δ 邻域: $(x_0, x_0 + \delta)$.

四、函数

在自然现象或实际问题中, 常会发生一个量随另一个量的变化而变化的情况, 如自由落体中物体下落的距离 s 随时间 t 而改变, 圆的面积 A 随半径 r 的改变而改变. 我们将两个量之间的这种关系定义为函数关系.

1. 函数的概念

定义 2 设 x, y 是两个变量, 数集 $D \subseteq R$ 且 $D \neq \emptyset$. 如果 $\forall x \in D$ (“ $\forall$ ”表示“对任意的”), 按照某种对应法则 f , y 都有确定的值与之对应, 称 y 为 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, $x \in D$.

自变量 x 的取值范围 (数集 D) 称为函数的定义域, 记作 D_f .

如果自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值只有一个, 称函数为单值函数, 否则称为多值函数. 如 $y = x + 1$ 为单值函数, $y^2 = x + 1$ 为多值函数.

以后凡是没有特殊说明时, 均指单值函数.

由函数定义知道, 对 D_f 中任意给定的数值 x_0 , y 都有确定的值 y_0 与之对应, 称 y_0 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$.

函数值的全体构成的集合称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 记作 R_f , 即

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

说明 对应关系符号 f 也可用其他字母表示, 如 g 、 ϕ 、 ψ 等.

如果两个函数的定义域和对应法则分别相同, 称这两个函数为相同的函数 (此时值域必定相同). 如函数 $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是相同的函数; 而 $y = x + 1$ 与 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 是不同的函数, 因

为 $y = x + 1$ 的定义域为实数集 R , 而函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 1\}$, 因为定义域不同, 所以是不同的函数.

通常将函数的定义域和对应法则称为函数的两要素.

例 1 设函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 2$, 求 $f(1)$, $f(\frac{1}{x})$.

解 $f(1) = 1^2 + \frac{1}{1} - 2 = 0$, $f(\frac{1}{x}) = (\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{\frac{1}{x}} - 2 = \frac{1}{x^2} + x - 2$.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f , 取定一个 $x_0 \in D_f$, 就有一个对应的 y_0 , 由 x_0, y_0 构成的一组实数对 (x_0, y_0) 对应 xOy 平面上的一个点. 当 x 取遍 D_f 上所有值时, 得到 xOy 平面上的点集 M :

$$M = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

点集 M 称为函数 $y = f(x)$ 的图象 (或图形). 图形 M 在 x 轴上的垂直投影点集就是 D_f , 在 y 轴上的垂直投影点集就是 R_f , 如图 1-3.

如果一个函数在自变量的不同取值范围内有不同的对应法则, 这种函数称为分段函数. 下面举几个分段函数的例子.

例 2 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

其定义域 $D_f = \mathbb{R}$, 值域 $R_f = \{0, 1\}$.

例3 符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

其定义域 $D_f = \mathbb{R}$, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$. 如图 1-4.

对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$ 或 $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

例4 取整函数

$$y = [x] = n, \quad n \leq x < n+1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

对任意实数 x , $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 其定义域 $D_f = \mathbb{R}$, 值域 $R_f = \mathbb{Z}$. 如图 1-5.

如 $[0.2] = 0$, $[-3.1] = -4$, $[5] = 5$.

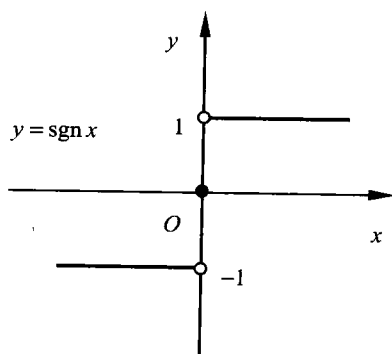


图 1-4

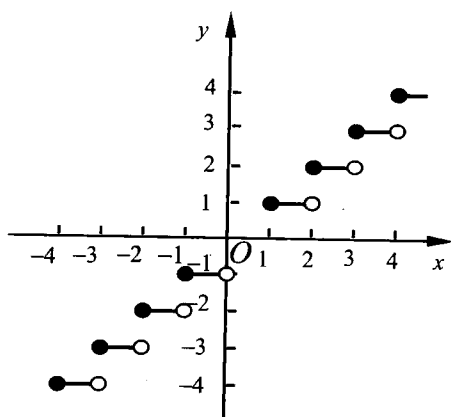


图 1-5

例5 函数

$$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

定义域 $D_f = \mathbb{R}$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$. 如图 1-6.

2. 函数的几种特性

(1) 奇偶性

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对

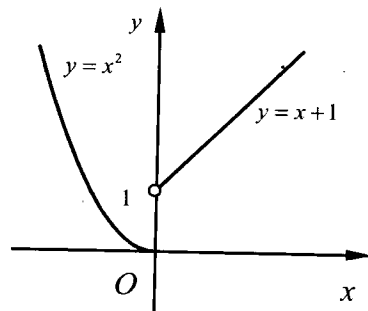


图 1-6

称. $\forall x \in D_f$, 如果有 $f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$), 称 $y = f(x)$ 为奇函数 (偶函数).

如果 $f(-x) \neq -f(x)$, 且 $f(-x) \neq f(x)$, 称函数 $y = f(x)$ 为非奇非偶函数.

如 $f(x) = x^2 + 1$ 为偶函数, $f(x) = x^3 + x$ 为奇函数, $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ 为非奇非偶函数.

由奇偶函数定义知, 奇函数图象关于原点对称 (图 1-7), 偶函数图象关于 y 轴对称 (图 1-8).

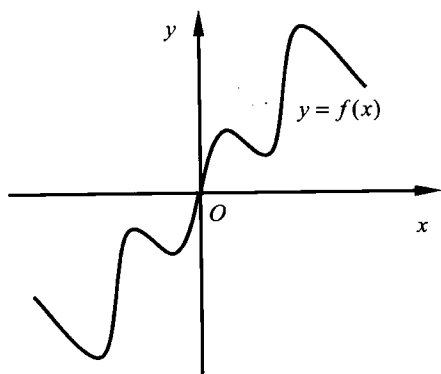


图 1-7

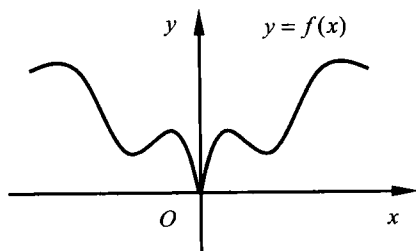


图 1-8

任意一个定义在对称区间上的函数 $f(x)$, 总能表示成一个奇函数与一个偶函数之和. 事

实上, $F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 为偶函数, $G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 为奇函数, 而 $f(x) = F(x) + G(x)$.

(2) 单调性

定义 4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f , 如果 $\forall x_1 < x_2 \in I \subseteq D_f$, 都有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (} f(x_1) > f(x_2) \text{)},$$

称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调增加 (单调减少). 单调增加或单调减少的函数统称为单调函数. 单调增加函数的图象沿 x 轴正方向上升, 单调减少函数的图象沿 x 轴正方向下降. 如图 1-9、1-10 所示.

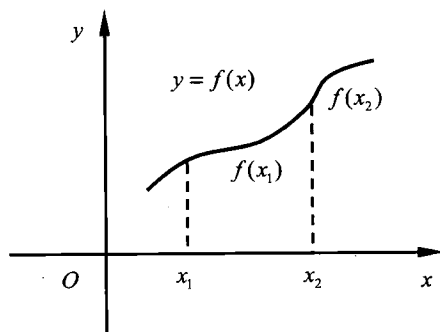


图 1-9

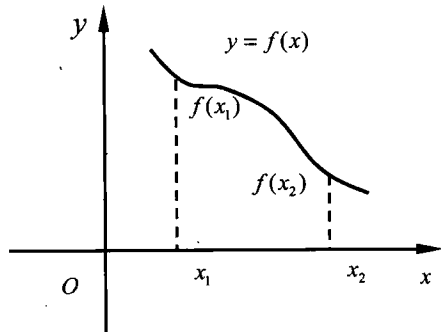


图 1-10

注意 如果一个函数在某一个定义区间上单调增加,而在另一个定义区间上单调减少,则在整个定义域上不具备单调性.如函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调减少;在区间 $(0, +\infty)$ 内单调增加,因此在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

(3) 有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f , $I \subseteq D_f$. 如果存在正数 M , 使 $\forall x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果对于任何正数 M , 总存在 $x_0 \in I$, 使 $|f(x_0)| > M$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界.

由绝对值不等式知, $|f(x)| \leq M$ 等价于 $-M \leq f(x) \leq M$, 因此当函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界时, 函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图象必介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间, 如图 1-11.

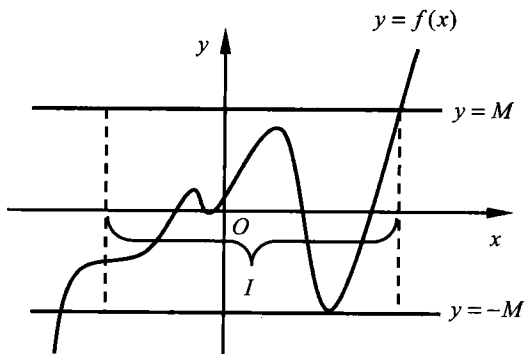


图 1-11

注意 考虑函数的有界性时,不但要注意函数本身的特点,还要注意自变量的取值范围.如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 因为 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|\sin x| \leq 1$; 而函数

$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 在 $(1, 2)$ 内有界.

(4) 周期性

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f , 如果存在不为零的数 T , 使 $\forall x \in D_f$, 有 $x \pm T \in D_f$, 且 $f(x \pm T) = f(x)$ 恒成立, 称函数 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期.

显然, 若 T 为函数 $f(x)$ 的周期, 则 $kT (k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期. 通常所说的函数的周期指最小正周期.

如函数 $\sin x, \cos x$ 的周期为 2π , $\tan x, \cot x$ 的周期为 π .

由周期函数定义知, 周期为 T 的函数的图象沿 x 轴方向每相隔 T 重复一次, 如图 1-12.

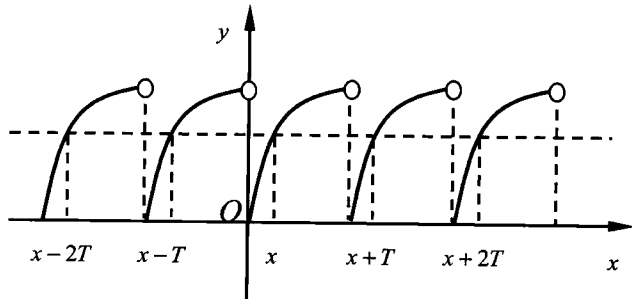


图 1-12

五、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f ，值域 R_f 。因为 R_f 是由函数值组成的数集，所以对每一个 $y_0 \in R_f$ ，必定有 $x_0 \in D_f$ ，使 $f(x_0) = y_0$ ，但这样的 x_0 可能不止一个，如图 1-13。

定义 7 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f ，值域为 R_f 。若 $\forall y \in R_f$ ， D_f 中有唯一的 x 与之对应，使得 $f(x) = y$ ，则得到一个以 y 为自变量的函数，称之为 $y = f(x)$ 的**反函数**，记作 $x = f^{-1}(y)$ ，其定义域为 R_f ，值域为 D_f 。由于习惯上自变量用 x 表示，故将 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$ 。

并非任何函数都存在反函数。但单调函数一定存在反函数，且有如下定理。

定理 如果 $y = f(x)$ ， $x \in D_f$ 是单调增加（减少）函数，则它一定存在反函数 $y = f^{-1}(x)$ ， $x \in R_f$ ，且该反函数与 $y = f(x)$ 具有同样的单调性。

由反函数定义知，函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数，且它们的图象关于直线 $y = x$ 对称，见图 1-14。

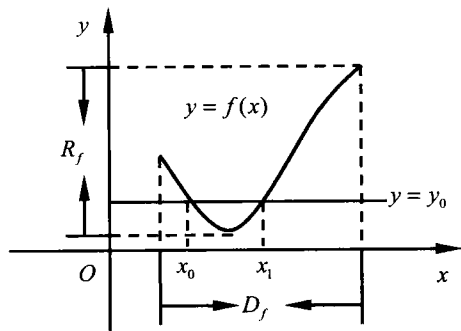


图 1-13

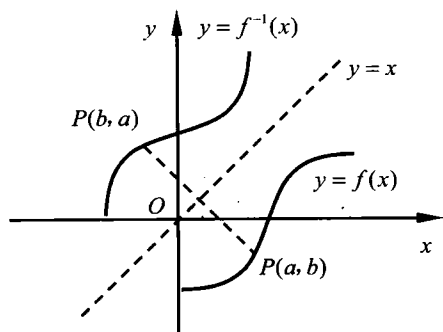


图 1-14

六、基本初等函数

以前已经学习过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五种函数，今后接触的函数大部分是它们经过某种运算得到的。现将这五种函数简单总结如下：

1. 幂函数

定义 8 形如 $y = x^\alpha$ (α 是常数) 的函数称为**幂函数**。其定义域视 α 的值而定。

$y = x^\alpha$ 中， $\alpha = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 是最常见的幂函数，图形如图 1-15。