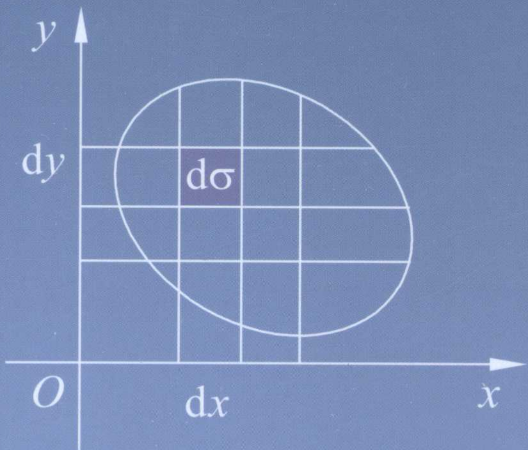
全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

主　编　刘增玉　郭连英
副主编　文冀中　于　烊



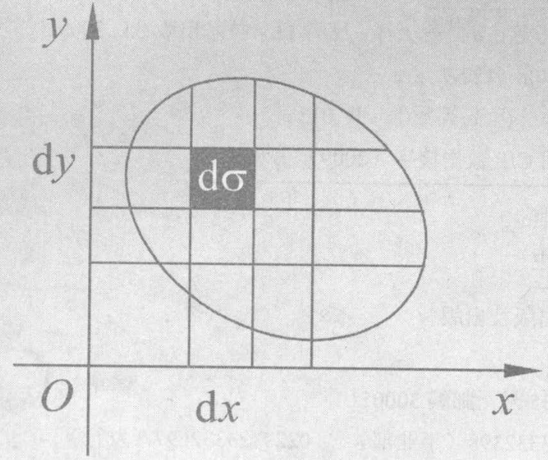
- 以应用为目的，以必需够用为度
- 注重思路引导，强调基础知识掌握
- 注重能力培养，弱化理论证明和复杂计算
- 理论联系实际，贯彻由浅入深的教学原则，精选例题及习题
- 模块化教学，为不同专业或专业方向提供了更大的选择空间

天津科学技术出版社

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

主　编　刘增玉　郭连英
副主编　文冀中　于　烊



天津科学技术出版社

内容提要

本书在认真总结、分析、吸收全国高职高专院校高等数学教学改革经验的基础上编写的。从高职高专人才培养目标出发，精选了教学内容，注重理论联系实际，适当降低了难度，遵循循序渐进的教学原则，精心配置了每节例题、习题，以便于学生对有关知识点的掌握与巩固。

本书分为一元微积分、微分方程、拉普拉斯变换、向量代数与空间解析几何、多元微积分、级数、线性代数、复变函数八个模块，共十二章。各专业可根据专业需求和教学时数选择讲授。

本书可作为三年制高职高专院校各专业及成人高等学校各专业的教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/刘增玉等主编. —天津：天津科学技术出版社，2009.5

ISBN 978-7-5308-5122-7

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 053126 号

责任编辑:刘丽燕

责任印制:白彦生

天津科学技术出版社出版

出版人:胡振泰

天津市西康路 35 号 邮编 300051

电话:（022）23332398（事业部） （022）23332697（发行）

网址:www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

北京奥隆印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 22.5 字数 576 000

2009 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

定价:33.00 元

教材编写委员会

主　任：池宇峰

副主任：池寒峰　张　剑　姜天鹏

委　员：（以下排名按姓氏拼音字母的先后顺序为序）

郭连英　郭志明　侯学群　隽青龙　李　瑜

刘泽云　刘增玉　罗庆丽　马　鑫　任　玲

苏勇历　孙少平　文冀中　吴　鹏　于　欣

于　烊　张　陇　张相红　张月岭　朱鹏华

前　言

高等职业教育是高等教育的重要组成部分，其目的是为国家现代化建设培养技能型、复合型和应用型高级技术人才，随着经济的发展和社会的进步，高职教育发挥着越来越重要的作用。高等数学不仅是高职高专院校的一门重要的基础课、工具课，也是一门解决实际问题、广泛应用的基础学科,它对培养、提高学生的思维能力和唯物主义世界观的形成发挥着特有的作用。

本教材是全国高等职业、高等专科教育“高等数学”基础课教材，是依照教育部颁布的《高职高专教育数学课程教学基本要求》，从高职院校的人才培养目标出发，并结合作者多年来积累的高职高专“高等数学”教学经验编写而成的，充分体现了“以应用为目的、以必需够用为度”的高职教学基本原则。内容包括一元微积分、微分方程、拉普拉斯变换、向量代数与空间解析几何、多元微积分、级数、线性代数、复数与复变函数共八个模块。教师可以根据学生的专业特点选学不同的模块，学生也可以根据自己的爱好进行有选择的自学。

本教材内容具有以下特点：

1、结合高职高专学生特点，较好地处理了初等数学与高等数学的衔接，符合高职高专学生的认知结构。在内容处理上兼顾了对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力培养。

2、注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，突出强调数学概念与实际问题的联系，加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生用数学的原理和方法消化吸收工程概念和工程原理及专业知识的能力。

3、缓解了目前高等数学教学中存在的内容多与课时少的矛盾，恰当地把握教学内容的深度和广度，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示微积分的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性。

4、注意对有关概念及结果实际情况的解释，力求表述确切、思路清晰、通俗易懂，并注重数学思想与方法的阐述。注意培养学生的综合素质，体现数学课程改革的新思路——数学教学不仅要具备工具功能，而且还要具备思维训练和文化素质教育的功能，也就是要立足于综合素质教育，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力。

5、每一章节后都配有精选的习题和自测题，可供学生边学边练并及时地检验学习效果。

本书由刘增玉、郭连英担任主编，文冀中、于烊任副主编，郭志明、朱鹏华、于欣、侯学群、张陇、吴鹏、孙少平、罗庆丽也参与了本书的编写。其中第一至第四章由刘增玉编写；第五章由郭志明编写；第六章由朱鹏华编写；第七章由于欣编写；第八章由侯学群编写；第九章由张陇编写；第十章由吴鹏编写；第十一章由孙少平编写；第十二章由罗庆丽编写。

鉴于我们的研究能力、学术水平有限，书中难免有疏漏之处，恳切期望读者给予指正，以便进一步修改完善。

编　者

2009 年 6 月

目 录

第一模块 一元微积分

第二模块 微分方程

第三模块 拉普拉斯变换

第四模块 向量代数与空间解析几何

第五模块 多元微积分

第六模块 级 数

第七模块 线性代数

第八模块 复数与复变函数

第一模块　一元微积分

知识结构：

- 极限与连续
- 导数与微分
- 导数的应用
- 不定积分
- 定积分

第一章 极限与连续

极限是高等数学的一个重要概念，极限理论是微积分的根基；连续性是函数的一种属性．本章在介绍极限理论的基础上，讨论函数的连续性．

第一节 函 数

一、集合

集合是现代数学的一个最基本的概念，数学的各个分支普遍运用集合的表示方法和符号．在中学阶段已经学习过集合的知识，现在把其中部分内容进行回顾．

1. 集合的概念

定义 1 具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**．如某学校图书馆的藏书；所有的自然数；方程 $x^2-4x+3=0$ 的实数解等，都分别构成一个集合．集合通常用大写字母 A，B，C,$\cdots$ 表示．

组成某一集合的对象称为该集合的**元素**．元素通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示．集合中的元素具有**确定性**、**互异性**和**无序性**．

若 a 是集合 A 的元素，记作“$a\in A$”，读作“a 属于 A”；否则记作“$a\notin A$”（或 $a\overline{\in} A$），读作“a 不属于 A”．

2. 集合的表示法

通常集合的表示方法用列举法和描述法．

（1）**列举法** 把集合中的元素一一列举出来，写在大括号｛ ｝内，每个元素只写一次，不分次序．如小于 10 的正偶数构成的集合表示为 $A=\{2,4,6,8\}$；满足不等式 $|x+1|\leqslant 2$ 的所有整数构成的集合表示为 $B=\{-3,-2,-1,0,1\}$．

（2）**描述法** 把集合中元素所具有的共同属性描述出来，写在大括号｛ ｝内．不等式 $|x+1|\leqslant 2$ 的所有实数解构成的集合表示为 $B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1,\ x\in R\}$．

集合中的元素都是数时称为数集．常见的数集有自然数集 N，整数集 Z，有理数集 Q，实数集 R，正整数集 N^*．

二、区间

区间是高等数学中常用的实数集，分为有限区间和无限区间，具体定义如下．

设a,b为任意实数，且$a<b$.

1. 有限区间

开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b,x\in R\}$

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in R\}$

半开区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b,x\in R\}$；　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b,x\in R\}$.

a,b称为区间的端点，$b-a$称为区间的长度.

2. 无限区间

$(a,+\infty)=\{x|x>a,\ x\in R\}$；　$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a,\ x\in R\}$；

$(-\infty,b)=\{x|x<b,\ x\in R\}$；　$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b,\ x\in R\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in R\}$.

三、邻域

设$x_0\in R$，$\delta>0$，开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$称为点$x_0$的**$\delta$邻域**，记作$U(x_0,\ \delta)$，即

$$U(x_0,\ \delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

其中x_0称为**邻域中心**，δ称为**邻域半径**.

从数轴上看，$U(x_0,\ \delta)$表示到点x_0的距离小于δ的点的集合，如图1-1．故有

$$U(x_0,\ \delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

在点x_0的δ邻域中去掉中心点x_0的集合，称为点x_0的去心δ邻域，如图1-2，记作$\mathring{U}(x_0,\ \delta)$，因而有

$$\mathring{U}(x_0,\ \delta)=(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$$

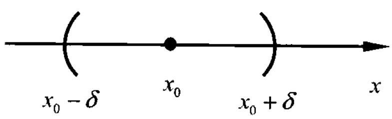


图 1-1

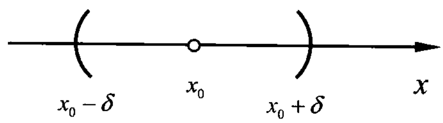


图 1-2

如$U(1,\ 0.02)=(0.98,\ 1.02)$，$\mathring{U}(1,\ 0.02)=(0.98,\ 1)\cup(1,\ 1.02)$.

x_0的左δ邻域：$(x_0-\delta,\ x_0)$；　x_0的右δ邻域：$(x_0,\ x_0+\delta)$.

四、函数

在自然现象或实际问题中，常会发生一个量随另一个量的变化而变化的情况，如自由落体中物体下落的距离s随时间t而改变；圆的面积A随半径r的改变而改变．我们将两个量之间的这种关系定义为函数关系.

1. 函数的概念

定义 2　设 x, y 是两个变量，数集 $D \subseteq R$ 且 $D \neq \Phi$．如果 $\forall x \in D$（“$\forall$”表示“对任意的”），按照某种对应法则 f，y 都有确定的值与之对应，称 y 为 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，$x \in D$．

自变量 x 的取值范围（数集 D）称为函数的**定义域**，记作 D_f．

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，称函数为单值函数，否则称为多值函数．如 $y=x+1$ 为单值函数，$y^2=x+1$ 为多值函数．

以后凡是没有特殊说明时，均指单值函数．

由函数定义知道，对 D_f 中任意给定的数值 x_0，y 都有确定的值 y_0 与之对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$．

函数值的全体构成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 R_f，即

$$R_f=\{y \mid y=f(x),\ x \in D_f\}$$

说明　对应关系符号 f 也可用其他字母表示，如 g、ϕ、ψ 等．

如果两个函数的定义域和对应法则分别相同，称这两个函数为相同的函数（此时值域必定相同）．如函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数；而 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是不同的函数，因为 $y=x+1$ 的定义域为实数集 R，而函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 1\}$，因为定义域不同，所以是不同的函数．

通常将函数的定义域和对应法则称为函数的两要素．

例1　设函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}-2$，求 $f(1), f(\dfrac{1}{x})$．

解　$f(1)=1^2+\dfrac{1}{1}-2=0$，　$f(\dfrac{1}{x})=(\dfrac{1}{x})^2+\dfrac{1}{\frac{1}{x}}-2=\dfrac{1}{x^2}+x-2$．

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，取定一个 $x_0 \in D_f$，就有一个对应的 y_0，由 x_0, y_0 构成的一组实数对 (x_0, y_0) 对应 xOy 平面上的一个点．当 x 取遍 D_f 上所有值时，得到 xOy 平面上的点集 M：

$$M=\{(x,\ y) \mid y=f(x), x \in D_f\}$$

点集 M 称为函数 $y=f(x)$ 的**图象**（或图形）．图形 M 在 x 轴上的垂直投影点集就是 D_f，在 y 轴上的垂直投影点集就是 R_f，如图 1-3．

如果一个函数在自变量的不同取值范围内有不同的对应法则，这种函数称为**分段函数**．下面举几个分段函数的例子．

例2　狄利克雷（Dirichlet）函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

其定义域 $D_f=R$，值域 $R_f=\{0,1\}$.

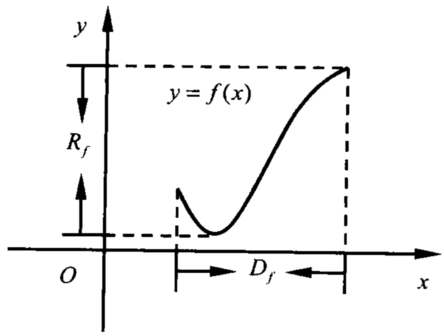


图 1-3

例3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

其定义域 $D_f=R$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$. 如图 1-4.

对任意的 $x\in R$，有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 或 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$.

例4　取整函数

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n\in Z$$

对任意实数 x，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，其定义域 $D_f=R$，值域 $R_f=Z$. 如图 1-5. 如 $[0.2]=0$，$[-3.1]=-4$，$[5]=5$.

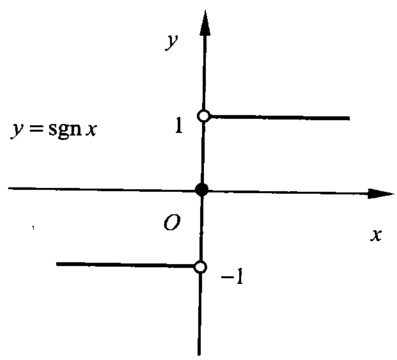


图 1-4

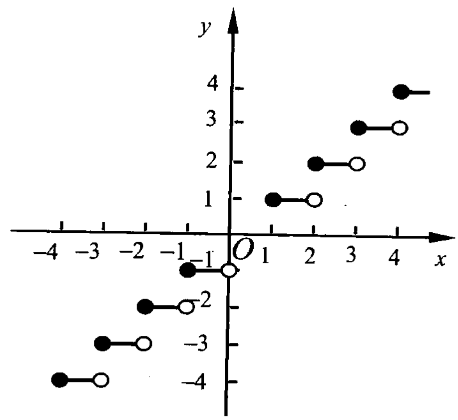


图 1-5

例5　函数

$$y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\x+1, & x>0\end{cases}$$

定义域 $D_f=R$，值域 $R_f=[0,+\infty)$. 如图 1-6.

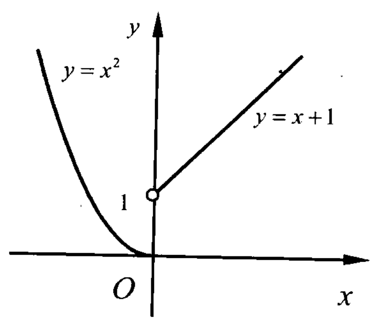


图 1-6

2. 函数的几种特性

（1）奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对

称．$\forall x \in D_f$，如果有 $f(-x)=-f(x)$（$f(-x)=f(x)$），称 $y=f(x)$ 为**奇函数**（**偶函数**）．

如果 $f(-x)\neq -f(x)$，且 $f(-x)\neq f(x)$，称函数 $y=f(x)$ 为**非奇非偶函数**．

如 $f(x)=x^2+1$ 为偶函数，$f(x)=x^3+x$ 为奇函数，$f(x)=x^3+x^2-1$ 为非奇非偶函数。

由奇偶函数定义知，奇函数图象关于原点对称（图 1-7），偶函数图象关于 y 轴对称（图 1-8）．

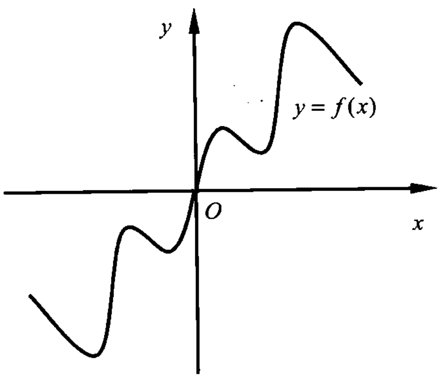


图 1-7

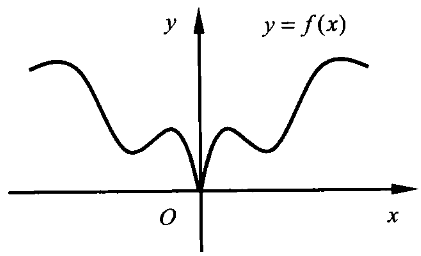


图 1-8

任意一个定义在对称区间上的函数 $f(x)$，总能表示成一个奇函数与一个偶函数之和．事实上，$F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数，$G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数，而 $f(x)=F(x)+G(x)$．

（2）单调性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，如果 $\forall x_1<x_2\in I\subseteq D_f$，都有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2)),$$

称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加（单调减少）．单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**．单调增加函数的图象沿 x 轴正向上升，单调减少函数的图象沿 x 轴正向下降．如图 1-9、1-10 所示．

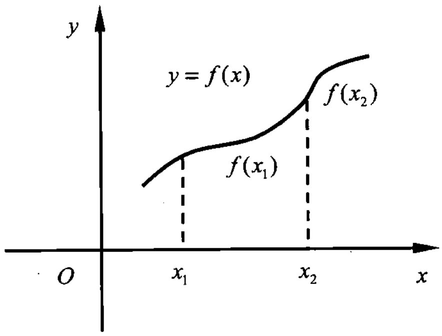


图 1-9

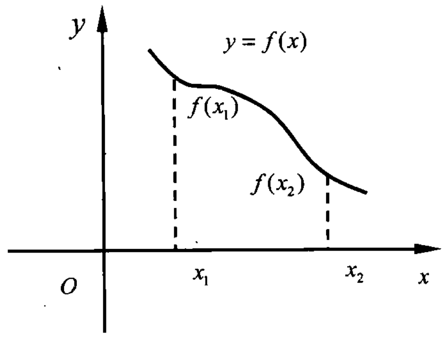


图 1-10

注意　如果一个函数在某一个定义区间上单调增加，而在另一个定义区间上单调减少，则在整个定义域上不具备单调性. 如函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调减少；在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

（3）有界性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，$I\subseteq D_f$. 如果存在正数 M，使 $\forall x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**. 如果对于任何正数 M，总存在 $x_0\in I$，使 $|f(x_0)|>M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

由绝对值不等式知，$|f(x)|\leqslant M$ 等价于 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，因此当函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界时，函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图象必介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间，如图 1-11.

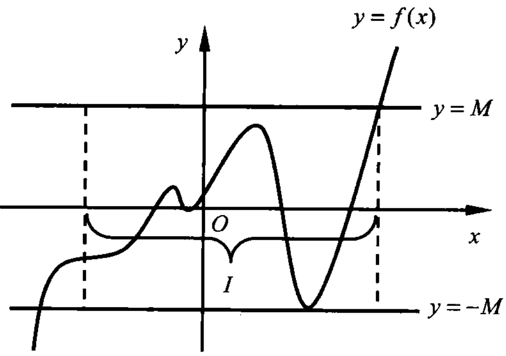


图 1-11

注意　考虑函数的有界性时，不但要注意函数本身的特点，还要注意自变量的取值范围. 如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $(1,2)$ 内有界.

（4）周期性

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，如果存在不为零的数 T，使 $\forall x\in D_f$，有 $x\pm T\in D_f$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**.

显然，若 T 为函数 $f(x)$ 的周期，则 $kT(k=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期. 通常所说的函数的周期指**最小正周期**.

如函数 $\sin x$、$\cos x$ 的周期为 2π，$\tan x$、$\cot x$ 的周期为 π.

由周期函数定义知，周期为 T 的函数的图象沿 x 轴方向每相隔 T 重复一次，如图 1-12.

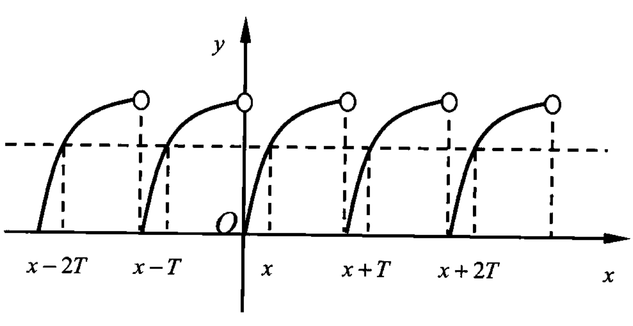


图 1-12

五、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域 R_f．因为 R_f 是由函数值组成的数集，所以对每一个 $y_0\in R_f$，必定有 $x_0\in D_f$，使 $f(x_0)=y_0$，但这样的 x_0 可能不止一个，如图 1-13.

定义 7　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f．若 $\forall y\in R_f$，D_f 中有唯一的 x 与之对应，使得 $f(x)=y$，则得到一个以 y 为自变量的函数，称之为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 R_f，值域为 D_f．由于习惯上自变量用 x 表示，故将 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$．

并非任何函数都存在反函数．但单调函数一定存在反函数，且有如下定理．

定理　如果 $y=f(x)$，$x\in D_f$ 是单调增加（减少）函数，则它一定存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R_f$，且该反函数与 $y=f(x)$ 具有同样的单调性．

由反函数定义知，函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，且它们的图象关于直线 $y=x$ 对称，见图 1-14.

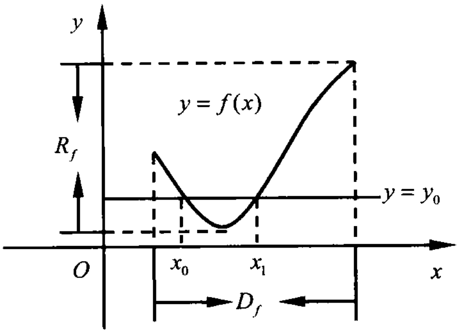


图 1-13

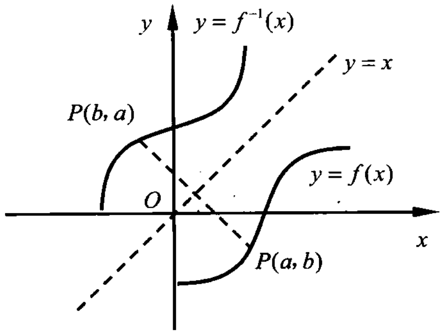


图 1-14

六、基本初等函数

以前已经学习过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五种函数，今后接触的函数大部分是它们经过某种运算得到的．现将这五种函数简单总结如下：

1．幂函数

定义 8　形如 $y=x^{\alpha}$（α 是常数）的函数称为**幂函数**．其定义域视 α 的值而定．

$y=x^{\alpha}$ 中，$\alpha=1、2、3、\dfrac{1}{2}、-1$ 是最常见的幂函数，图形如图 1-15.