開明新編解析幾何學

劉薰宇編

開明新編解析幾何學

劉薰宇編著

開明書店印行

開明新編解析幾何學
一九四八年五月初版 一九五〇年三月三版
每册基價十一・〇〇
編著者 劉薰宇
上海福州路
發行者 開明書店
代表人范洗人
印刷者 開明書店

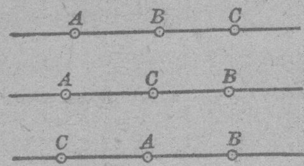
(150 P.) W 守

目　次

第一章

直坐標——點

1. 【線段的正負】 在無限直線上任意用兩點截取一段如第1圖的 AB,稱爲線段. 初等幾何中只研究線段長短的關係,不問牠的方向,所以 AB 和 BA 相等. 但在近世幾何中,線段的方向和牠的長短一般地重要.



第 1 圖

方向原是相對的,如圖以 A 點做標準,則可說 B 點在牠的右邊;但若以 B 點做標準,則可說 A 點在牠的左邊. 同樣的理由,用 A 點做標準,AB 的方向和 BA 的就恰相反;若用 B 點做標準,則 BA 和 AB 的方向也相反.

對於兩個相反的方向,我們可以任意假定一個是正的,則另一個便是負的;所以假定 AB 爲正,則 BA 爲負,因此:

$$AB=-BA,$$

或

$$AB+BA=0.$$

在 AB 線段上若另有一點 C,則一共成了三條線段 AB, BC 和 AC. 因了 C 點對於 AB 的位置關係不同,也就有三種形式,如第1圖所示. 這三條線段的關係若照初等幾何,不問牠們的方向,則可得不同的三個式子,就是:

$$(1)\quad AB+BC=AC,$$

$$(2)\quad AB-CB=AC,$$

$$(3)\quad BC-BA=AC.$$

但若照上面所說的,用 A 點做標準,由 A 向右爲正,向左爲負,則(1)式中,AB, BC 和 AC 都是正的;(2)式中 AB, AC 是正

的，BC 卻是負的而等於‘$-CB$’；(3) 式中 AB 是正的，AC，BC 都是負的，所以 AB 等於‘$-BA$’.

由此，(1)(2)(3) 三個式子都可用 (1) 式來代表；換句話說，無論 C 點對於 AB 的位置關係怎樣，下列的關係都可以成立；即：

$$AB+BC=AC.$$

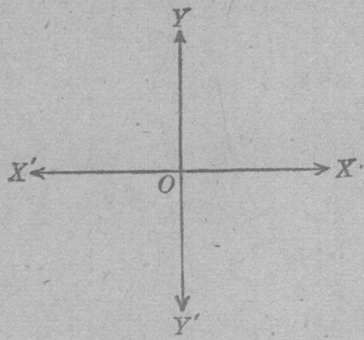
2. 【平面上點的位置】 學過地理的人，總都已知道，地球上一個地方的位置，須得知道牠的經度和緯度纔能決定；如上海在東經 116°29′，北緯 39°53′；倫敦在西經 5′，北緯 51°32′ 便是．經度是用經過格林維契的做標準，緯度是用地球的赤道做標準．所以上海在格林維契的東，倫敦卻在牠的西；而上海和倫敦都在赤道的北．倘若只知道紐約是西經 74°6′，我們不過知道牠在格林維契西邊 74°6′ 的那條經線上面，至於牠是在北半球或南半球，就莫名其妙了；所以必須還要知道牠是在北緯 40°25′12″，牠在地球上的位置纔能確定．

地球的表面我們可當作一個平面看，上海，倫敦或紐約，我們可以當作這平面上的一點．由上面的說法可以知道，一個點在平面上的位置，須有兩個不同的量纔能決定．

在這裏有一個疑問可以發生，譬如說，甲地在乙地的東北五里，倘若乙地是我們已經知道的；那末，甲地的位置不是也就可以明瞭了麼？這不是只有一個量嗎？但仔細分析一下，‘東北五里’所含的實在是兩個不同的量；(1)‘東北’所表示的是從東方轉向北方 45 度；(2)‘五里’所表示的是從乙到甲的直線距離有五里．

3. 【直坐標】 依前節所說的，平面上一點的位置須有兩個不同的量纔能決定；但位置本是相對的，所以就得有兩個決定位置的標準．在平面上取直角相交的兩條直線來作決定這平面

上一點的位置的標準，這是極通常而且便當的。

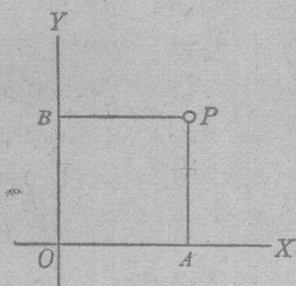


第 2 圖

如第 2 圖中，XOX' 和 YOY' 兩條直線相交成直角，就可用來決定牠們所包含的平面上各點的位置．這稱爲‘直角坐標’，或簡稱爲‘直坐標’．XOX' 和 YOY' 稱爲‘坐標軸’；而 XOX' 稱爲‘横坐標軸’，或‘x 軸’，YOY' 稱爲‘縱坐標軸’，或‘y 軸’，牠們的交點 O 稱爲‘原點’．

XOX' 和 YOY' 將平面分成四個‘象限’，這是平面三角中已經講過的，不用再加說明了．

4.【點的坐標和牠的畫法】 如第 3 圖從 P 點向兩坐標軸各作平行線 PB 和 PA，則 BP 稱爲 P 點的横坐標，AP 稱爲牠的縱坐標．因爲從直線外的一點只能作一條直線和牠平行，所以若 P 點的位置一定，則 BP 和 AP 的方向和長短也一定．反過來，若 BP 和 AP 的方向和長短一定，則 P 點的位置也就決定了．若 BP 和 AP 的長相應地等於 a 和 b 個單位，則 a, b 稱爲 P 的坐標，我們記成 (a, b)．



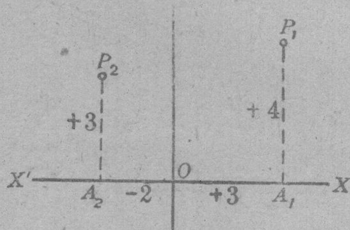
第 3 圖

横坐標以原點作標準向右爲正，向左爲負；縱坐標以原點作標準，向上爲正，向下爲負．因此，在各個象限中，點的符號都不相同：

第一象限……$(+,+)$，　第二象限……$(-,+)$，
第三象限……$(-,-)$，　第四象限……$(+,-)$.

實際上，已知道 P 點的坐標要將牠畫出，並不定要作 BP, AP 兩平行線；因爲 $OAPB$ 旣是一個平行四邊形，OA 和 BP 便相等．所以若 P 的坐標爲 (a,b)，先在橫坐標上取一 A 點使 OA 等於 a，然後平行於縱坐標，從 A 取 AP 使等於 b，則 P 點就是所求的。

例如 P_1 的坐標爲 $(+3,+4)$，先從 O 向右(正)在 OX 上取 OA_1 等於 3 單位，得 A_1 點，再從 A_1 向上(正)和 OY 平行，取 A_1P_1 等於 4 單位，就得 P_1 點.



第 4 圖

又 P_2 的坐標爲 $(-2,+3)$，先從 O 向左(負)在 OX' 上取 OA_2 等於 2，得 A_2 點，再從 A_2 向上(正)和 OY 平行，取 A_2P_2 等於 3，就得 P_2 點.

〔注意〕 坐標的單位可以任意定，但通常橫坐標和縱坐標總用一樣的單位，普通用的方格紙，若沒有什麼不便當，則以 1 小方格，2 小方格或 3 小方格的一邊爲單位 1.

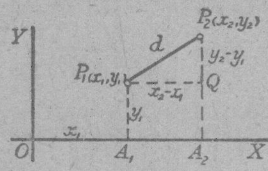
習題一

1. $(0,0)$，$(0,b)$，$(a,0)$ 這三點各在什麼地方？

2. 用適當的單位畫出下列各點：

(a) $(0,1)$；　(b) $(1,0)$；　(c) $(1,1)$；
(d) $(-1,1)$；　(e) $(-1,-1)$；　(f) $(1,-1)$；
(g) $(2,3)$；　(h) $(-2,3)$；　(i) $(3,-2)$；
(j) $(0,-2\frac{1}{2})$；　(k) $(-3.7,0)$；　(l) $(-1\frac{1}{2},-1\frac{3}{4})$；
(m) $(-4,3.2)$；　(n) $(3,-\sqrt{2})$；　(o) $(-\sqrt{2},\sqrt{3})$.

5. 【兩點間的距離】 若 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 兩點的坐標已經知道的時候，則牠們中間的距離 d 很容易求出。



第 5 圖

如第 5 圖先畫 P_1 和 P_2 的坐標，又畫 P_1Q 垂直於 A_2P_2，則

$$P_1Q = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1,$$

和 $$QP_2 = A_2P_2 - A_2Q = y_2 - y_1,$$

但 P_1QP_2 是一個直角三角形，依照畢塔果拉士的定理，

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1Q}^2 + \overline{QP_2}^2$$

所以 $$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

習 題 二

求下列各題兩點間的距離，並照第 5 圖畫出來：

1. $(3, 3)$ 和 $(7, 6)$.　　**2.** $(-6, 2)$ 和 $(6, -3)$.

3. $(6, 2)$ 和 $(-2, -4)$.　　**4.** $(-\frac{1}{2}, 5)$ 和 $(-8\frac{1}{2}, -3)$.

求下列各兩點間的距離：

5. $(2, 1)$ 和 $(5, 1)$.　　**6.** $(0, 0)$ 和 $(2, 5)$.

7. $(6, 0)$ 和 $(0, 5)$.　　**8.** $(0, 0)$ 和 (a, b).

9. $(-6, 0)$ 和 $(0, -6)$.　　**10.** $(0, 0)$ 和 $\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

11. 證明從原點 O 到 $P(x, y)$ 的距離爲 $\sqrt{x^2 + y^2}$.

12. 若 P_1 在第二象限，P_2 在第四象限，畫圖並證明第 5 節的公式.

13. 證明 $(7, 2)$ 和 $(1, -6)$ 在以 $(4, -2)$ 爲圓心的圓周上；並求這個圓的半徑.

14. 若 $(6, 2)$ 和 $(3, k)$ 的距離爲 5，求 k 的值．將圖畫出.

將下面的三點作頂點畫三角形，由牠們各邊的長證明是正

三角形,等腰三角形,直角三角形;並且,其中有兩個若當作三角形看,則牠們的面積等於零:

15. $(-4,3),(2,-5),(3,2)$.

16. $(4,0),(-4,0),(0,-4\sqrt{3})$.

17. $(2,3),(-4,1),(6,-2)$.

18. $(-6,8),(6,-8),(8,6)$.

19. $(5,1),(2,-2),(8,4)$.

20. $(-1,-1),(0,0),(3,3)$.

21. $(4,1),(1,3),(-3,1),(-2,-1)$,是四邊形的頂點,將這個四邊形畫出,並且求牠的兩對角線的長.

22. 將直線 AB 和牠的垂直平分線作坐標軸,證明這垂直平分線上的點到 A 和 B 的距離相等.

23. 證明:若(x,y)到$(2,3)$,$(4,5)$的距離相等則 $x+y=7$.

24. 三角形的頂點為$(2,3)$,$(4,5)$,$(6,1)$,求牠的外心(x,y).

6.【線段中點的坐標】 在第6圖中 $P_0(x_0,y_0)$是 P_1P_2 的中點,因為 B_0P_0 和 A_0P_0 相應地是梯形 $B_1P_1P_2B_2$和$A_1A_2P_2P_1$的中線,由初等幾何,這很容易明白,

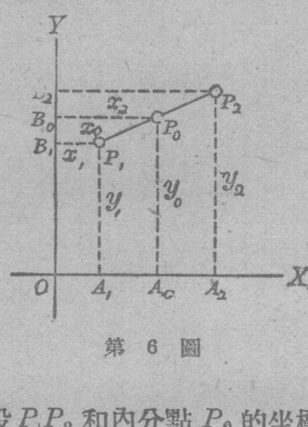
$$B_0P_0=\tfrac{1}{2}(B_1P_1+B_2P_2),$$

和 $$A_0P_0=\tfrac{1}{2}(A_1P_1+A_2P_2),$$

所以我們可以得出下面的公式:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$$

和 $$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}.$$



第 6 圖

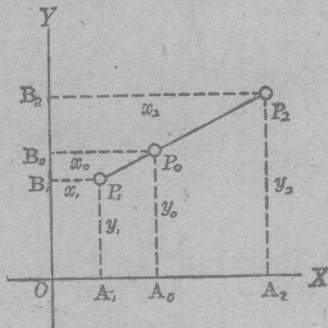
7.【依定比內分線段】 設線段 P_1P_2 和內分點 P_0 的坐標

各為(x_1, y_1)，(x_2, y_2)和(x_0, y_0)，

而
$$P_1P_0 : P_0P_2 = m : n.$$

因為
$$\frac{A_1A_0}{A_0A_2} = \frac{P_1P_0}{P_0P_2} = \frac{m}{n},$$

即
$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{m}{n},$$



第 7 圖

將x_0當作未知數解這方程式，則，

$$x_0 = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}.$$

同樣地
$$y_0 = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}.$$

設
$$\frac{m}{n} = \lambda,$$

則
$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

〔注意〕 前節所得的公式只是本節的特例，因為中點就是內分線段成相等的兩部分的點，即$m=n$，而$\lambda=1$.

8. 【依定比外分線段】 若P_0外分線段P_1P_2，則P_0P_2為負；或P_1P_0為負；故，

$$\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} = -\frac{m}{n},$$

或
$$\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{m}{n};$$

而
$$x_0 = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}.$$

同樣地
$$y_0 = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}.$$

但若設　$-\dfrac{m}{n}=\lambda$,

則
$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$
$$y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

習　題　三

下列的各對坐標是一條線段的兩端點的；試求牠們的中點；(1 到 6 口答)。

1. $(7,4),(3,2)$.　　**2.** $(6,-4),(-2,-2)$.

3. $(-3,1),(2,7)$.　　**4.** $(4,-1),(-4,1)$.

5. $(a,1),(1,a)$.　　**6.** $(0,0),(0,\frac{2}{3})$.

7. $(7.3,4.5),(2.9,12.3)$.

8. $(14.7,-14.7),(0,12.2)$.

9. $(-2.8,6.4),(-3.9,7.2)$.

10. $(-3\frac{3}{8},-7\frac{5}{8}),(2\frac{3}{4},-4\frac{1}{2})$.

下列坐標各各表示一線段的兩端點，依照各題所給的比求各分點，並畫圖表示：

11. $(2,1),(3,-9)$; $4:1$.　　**12.** $(5,-2),(5,3)$; $2:3$.

13. $(-4,1),(5,4)$; $5:2$.　　**14.** $(8,5),(-13,-2)$; $4:3$.

下列坐標各各表示一條線段的兩端點，試求牠們的兩個三等分點：

15. $(-1,2),(-10,-1)$.　　**16.** $(11,6),(2,3)$.

17. $(7,8),(1,-6)$.

18. $(7,2),(-1,4)$和$(3,-6)$為三角形的三頂點，求牠的每邊的中點，並且將圖畫出來.

19. 求前題三角形的三中線的交點.

(應用初等幾何中重心的定理).

20. $A(4,7)$, $B(5,3)$ 和 $C(6,9)$ 爲三角形的頂點，求這三角形各邊的中點.

21. 若線段的一端點是$(4,6)$，中點是$(5,2)$，求他一端點.

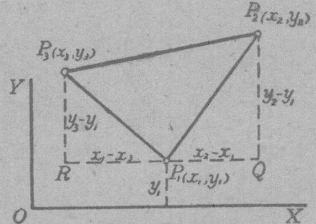
22. ABC 三角形的頂點爲 (x_1,y_1), (x_2,y_2), 和 (x_3,y_3)，試證明牠的重心是：

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\qquad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

9. 【三角形的面積】 如第8圖 $P_1P_2P_3$ 爲一個三角形，經過 P_1 作 RQ，平行於 OX，並且從 P_3 和 P_2 作 RQ 的垂線，則

$$\triangle P_1P_2P_3=\text{梯形 } P_3RQP_2-\triangle RP_1P_3-\triangle P_1QP_2$$

$$=\frac{1}{2}RQ(RP_3+QP_2)-\frac{1}{2}RP_1\cdot RP_3-\frac{1}{2}P_1Q-QP_2.$$



第 8 圖

所以，

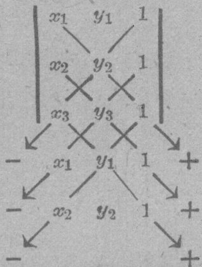
$$\triangle P_1P_2P_3=\tfrac{1}{2}(x\,y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3).$$

若是用行列式表示，那末

$$\triangle P_1P_2P_3=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

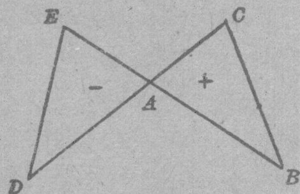
〔注意一〕 多角形的面積可分成若干個三角形來求各面積的和.

〔注意二〕 沒有學過行列式的,上式可照下法計算:



將直線所連的每三個數相乘,依箭頭所指示的符號而求這六個乘積的代數和.

10. 【面積的正負】 和線段以及角一般,面積也可分成正負兩種,若從一個頂點起,順了多角形的邊,照着鐘錶的指針轉動的相反方向轉過去,則面積爲正;反過來,若依照鐘錶的指針轉動的方向轉過來,則面積爲負,所以在第9圖中,$\triangle ABC$的面積是正的,$\triangle ADE$的面積就是負的.



第 9 圖

習題四

在方格紙上畫下面的各個三角形,依公式求牠們的面積,再由圖上來覆證所得的結果:

1. $(3,3),(-1,-2),(-3,4)$.

2. $(0,0),(12,-4),(3,6)$.

3. $(1,3),(3,0),(-4,3)$.

4. $(-2,-2),(0,0),(5,5)$.

5. 求四邊形 $(4,5),(2,-3),(0,7),(9,2)$ 的面積,並且在方格紙上畫圖來覆證所得的結果.