

開明新編解析幾何學

劉薰宇編

開明新編解析幾何學

劉燕寧編著

江苏工业学院图书馆
藏书章

開明書店印行

開明新編解析幾何學

一九四八年五月初版 一九五〇年三月三版

每冊基價十一·〇〇

編著者 劉 薰 宇

發行者 上海福州路
開明書店
代表人范洗人

印刷者 開明書店

有著作權 ■ 不准翻印

(150 P.) W

守

目 次

第一章 直坐標——點..... 1

線段的正負(1) 平面上點的位置(2) 直坐標(2) 點的坐標和牠的畫法(3) 兩點間的距離(5) 線段中點的坐標(6) 依定比內分線段(6) 依定比外分線段(7) 三角形的面積(9) 面積的正負(10)

第二章 直線..... 15

直線的傾斜角(15) 直線的傾斜率(15) 含傾斜率的直線方程式(17) 平行於一條坐標軸的直線的方程式(18) 定理——任意直線的方程式(18) 定理——一次方程式(20) 一直線的決定(21) 過一點且含定傾斜率的直線方程式(21) 通過兩點的直線的方程式(23) 兩點方程式的行列式形式(23) 兩直線的交角(23) 兩直線互相平行的條件(24) 兩直線互相垂直的條件(25) 含法線的直線方程式(27) 經過原點的直線(28) 交點距方程式(28) 直線方程式形式的變換(29) 由直線方程式一般的形式變到法線形(30) 直線方程式的應用(32) 直線方程式的‘本質常數’(34) 直線方程式的決定法(35) 直線系(36) 從一直線到一點的距離(38) d 的符號(40) 從平行於坐標軸的直線到一定點的距離(40) 定理——經過兩直線交點的直線(43) 定理——三直線集交於一點(44) 兩直線交角的平分線的方程式(45) 定理——同一方程式(47)

第三章 軌跡——曲線..... 52

定義——方程式的軌跡(52) 解析幾何上的問題(53) 方程式的圖線(53) 定理——因式(54) 點和圖形的對稱(56) 軌跡的對稱(57) 交點距(59) 圖線的限制(60) 無限的擴張(62) 圖線的交點和次數(63) 方程式的探究(63) 軌跡的決定(64)

第四章 圓..... 70

已知圓的中心和半徑求牠的方程式(70) 前節的逆定理(70) 三個本質常數(73) 切線的方程式(76) 在圓周上一點和圓相切的直線(76) 已定

傾斜率的切線(77) 法線(78) 兩圓的交角(78) 定理——經過兩定點的圓系(80) 根軸(81) 切線的長(81)

第五章 坐標的轉換 89

坐標軸的改變(89) 坐標軸的遷移(89) 由遷移坐標而簡化方程式(90) 方程式 $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ (91) 坐標軸的轉移(91) 定理——消去 xy 的項(92) 直角坐標軸一般的轉換(93)

第六章 拋物線 97

圓錐曲線(97) 圓錐曲線的分類(97) 拋物線(97) 拋物線的方程式(97) 焦點和準線的位置(98) 畫拋物線(98) 軸和頂點(99) y 軸上的焦點(99) 弦(99) 拋物線的較一般的方程式(101) 軸平行於 y 軸(102) 切線(104) 曲線的傾斜率(105) 拋物線的傾斜率(105) 拋物線的切線(106) 任意曲線的傾斜率(106) 法線(107) 拋物線的法線(108) 次切線和次法線(108) 拋物線的性質(109) 定傾斜率的切線(112) 拋擲物的經路(114) 切點弦(115) 平行弦的中點(116) 圓錐曲線的直徑(116)

第七章 橢圓 122

橢圓(122) 橢圓的方程式(123) 畫橢圓(123) 第二焦點和第二準線(124) 軸,頂點和中心(125) 離心率(125) 通徑(125) 用長軸作縱坐標(125) 定理——焦點半徑的和(126) 已知中心的橢圓(129) 定理—— $Ax^2 + Ey^2 + Cx + Dy + E = 0$ 方程式(130) 橢圓的傾斜率(132) 橢圓的切線(133) 定傾斜率的切線(134) 定理——法線的性質(136) 切點弦(138) 平行弦的中點(139) 定理——共軛直徑(141) 共軛直徑(141) 定理——在直徑端點的切線(142) 共軛直徑的端點(143) 定理——共軛直徑間的角(143) 輔助圓(144) 離心角(145) 定理——橢圓的大輔助圓(145) 離心角(145)

第八章 雙曲線 150

雙曲線(150) 雙曲線的方程式(151) 雙曲線的形式(152) 第二焦點和第二準線(152) 軸,頂點,和中心(152) 離心率(153) 通徑(153) 實軸作 y 軸(153) 漸近線(153) 定理——雙曲線的漸近線(154) 畫雙曲線

(155) 共軛雙曲線(155) 正雙曲線(155) 定理——從焦點到一點的距離(158) 已知中心的雙曲線(158) 定理—— $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ 方程式(159) 橢圓和雙曲線(160) 雙曲線的傾斜率(161) 雙曲線的切線(161) 定傾斜率的切線(162) 定理——雙曲線的切線(162) 直徑(166) 定理——共軛直徑(166) 共軛直徑(167) 定理——共軛直徑的位置(167) 定理——共軛直徑的端點(167) 直徑的端點(168) 定理——共軛雙曲線的直徑(168) 定理——共軛直徑(169) 共軛直徑的端點(169) 用漸近線作軸(170) 正雙曲線的坐標軸移到漸近線(171)

第九章 圓錐曲線通論.....176

定理——二次方程式(176) 定理——任意圓錐曲線的方程式(176) 圓錐曲線的分類(176) 具心圓錐曲線(178) 標準方程式(178) θ 角的選擇(178) 遷移具心圓錐曲線的原點(178) 消去 xy 的項(179) 拋物線方程式的變換(181) 圓錐曲線的分化(182) 判別式(183) 總結(187) 圓錐曲線和圓錐(188) 求漸近線(190) 經過兩圓錐曲線交點的圓錐曲線系(192) 經過五點的圓錐曲線(194) 極和極線(195) 幾種重要曲線的極和極線(195) 定理——極線的對應關係(196)

第十章 斜坐標——極坐標——坐標的互換.....202

三種坐標(202) 斜坐標(202) 兩點間的距離(203) 依定比內分線段(203) 經過原點的直線的方程式(204) 交點距方程式(205) 直坐標和斜坐標的互換(205) 從直坐標到斜坐標(206) 從斜坐標到直坐標(207) 斜坐標軸原點的遷移(209) 斜坐標軸的移轉(210) 斜坐標軸的轉換(211) 極坐標(212) 極坐標中的量的正負(213) 直坐標和極坐標的互換(214) 極坐標中的方程式(216) 一個方程式的探究(217) 軌跡的極坐標方程式(221) 直線(221) 圓(222) 圓錐曲線(222) 柿形曲線(224) 西莎哀特(225) 兩倍立方體(226) 反形(227) 反形變換的方程式(228) 圓錐曲線的反形(230) 定理——兩圓的交角(231) 定理——兩線的交角(232)

第十一章 點——平面——線.....234

空間和點的位置(234) 符號的規定(235) 兩點間的距離(236) 直線的方向角(237) 定理——直線的方向餘弦(237) 依定比分線段(239) 線段

的射影(242) 射影的長(242) 定理——折線的射影(243) 面的方程式(244) 平面的法線式(244) 定理——一次方程式(245) 平面的交點距方程式(246) 經過三點的平面(246) 垂直於一直線的平面(248) 兩直線的夾角(249) 兩平面的交角(250) 幾個特殊的平面(251) 從一點到一平面的距離(252) 定理——經過一直線的平面(256) 直線(256) 直線的對稱方程式(256) 將直線方程式變成對稱形(257) 直線的射影面(258) 經過一定點垂直於一定平面的直線(259) 直線的媒介變數方程式(259) 兩直線的關係(260) 別的坐標(262)

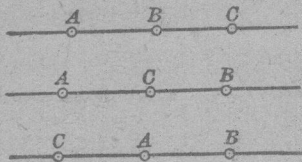
第十二章 面.....263

球(268) 平行於一軸的圓柱(268) 一個面的痕(269) 一個面的周(270) 頂在原點的錐(270) 對於面的探究(272) 二次面或圓錐面(274) 橢圓面(274) 單頁雙曲線面(275) 漸近錐(275) 雙頁雙曲線面(276) 橢圓拋物線面(277) 雙曲線拋物線面(277) 一般的三元二次方程式(278) 任意方程式的軌跡(279) 旋轉面(282) 動直線面(284) 曲線的方程式(286) 一個變數的消去(287) 一曲線的媒介方程式(287)

第一章

直坐標——點

1. 【線段的正負】 在無限直線上任意用兩點截取一段如第1圖的 AB ，稱為線段。初等幾何中只研究線段長短的關係，不問牠的方向，所以 AB 和 BA 相等。但在近世幾何中，線段的方向和牠的長短一般地重要。



第 1 圖

方向原是相對的，如圖以 A 點做標準，則可說 B 點在牠的右邊；但若以 B 點做標準，則可說 A 點在牠的左邊。同樣的理由，用 A 點做標準， AB 的方向和 BA 的就恰相反；若用 B 點做標準，則 BA 和 AB 的方向也相反。

對於兩個相反的方向，我們可以任意假定一個是正的，則另一個便是負的；所以假定 AB 為正，則 BA 為負，因此：

$$AB = -BA,$$

或

$$AB + BA = 0.$$

在 AB 線段上若另有一點 C ，則一共成了三條線段 AB ， BC 和 AC 。因了 C 點對於 AB 的位置關係不同，也就有三種形式，如第1圖所示。這三條線段的關係若照初等幾何，不問牠們的方向，則可得不同的三個式子，就是：

$$(1) \quad AB + BC = AC,$$

$$(2) \quad AB - CB = AC,$$

$$(3) \quad BC - BA = AC.$$

但若照上面所說的，用 A 點做標準，由 A 向右為正，向左為負，則(1)式中， AB ， BC 和 AC 都是正的；(2)式中 AB ， AC 是正

的， BC 卻是負的而等於 $'-CB'$ ；(3) 式中 AB 是正的， AC, BC 都是負的，所以 AB 等於 $'-BA'$ 。

由此，(1)(2)(3) 三個式子都可用(1)式來代表；換句話說，無論 C 點對於 AB 的位置關係怎樣，下列的關係都可以成立；

$$\text{即：} \quad AB + BC = AC.$$

2. 【平面上點的位置】 學過地理的人，總都已知道，地球上一個地方的位置，須得知道牠的經度和緯度纔能決定；如上海在東經 $116^{\circ}29'$ ，北緯 $39^{\circ}53'$ ；倫敦在西經 $5'$ ，北緯 $51^{\circ}32'$ 便是。經度是用經過格林維契的做標準，緯度是用地球的赤道做標準。所以上海在格林維契的東，倫敦卻在牠的西；而上海和倫敦都在赤道的北。倘若只知道紐約是西經 $74^{\circ}6'$ ，我們不過知道牠在格林維契西邊 $74^{\circ}6'$ 的那條經線上面，至於牠是在北半球或南半球，就莫名其妙了；所以必須還要知道牠是在北緯 $40^{\circ}25'12''$ ，牠在地球上的位置纔能確定。

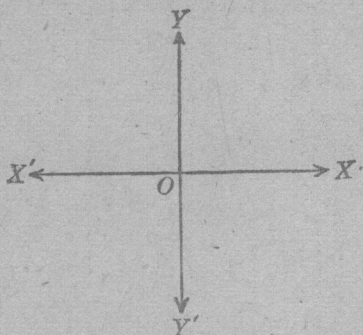
地球的表面我們可當作一個平面看，上海，倫敦或紐約，我們可以當作這平面上的一點。由上面的說法可以知道，一個點在平面上的位置，須有兩個不同的量纔能決定。

在這裏有一個疑問可以發生，譬如說，甲地在乙地的東北五里，倘若乙地是我們已經知道的；那末，甲地的位置不是也就可知明瞭了麼？這不是只有一個量嗎？但仔細分析一下，‘東北五里’所含的實在是兩個不同的量；(1)‘東北’所表示的是從東方轉向北方 45 度；(2)‘五里’所表示的是從乙到甲的直線距離有五里。

3. 【直坐標】 依前節所說的，平面上一點的位置須有兩個不同的量纔能決定；但位置本是相對的，所以就得有兩個決定位置的標準。在平面上取直角相交的兩條直線來作決定這平面

上一點的位置的標準，這是極通常而且便當的。

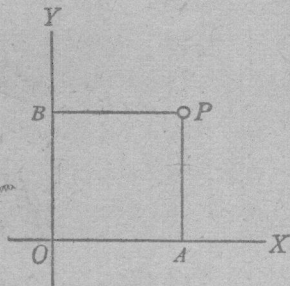
如第 2 圖中， XOX' 和 YOY' 兩條直線相交成直角，就可用來決定牠們所包含的平面上各點的位置。這稱為‘直角坐標’，或簡稱為‘直坐標’。 XOX' 和 YOY' 稱為‘坐標軸’；而 XOX' 稱為‘橫坐標軸’，或‘ x 軸’， YOY' 稱為‘縱坐標軸’，或‘ y 軸’，牠們的交點 O 稱為‘原點’。



第 2 圖

XOX' 和 YOY' 將平面分成四個‘象限’，這是平面三角中已經講過的，不用再加說明了。

4. 【點的坐標和牠的畫法】 如第 3 圖從 P 點向兩坐標軸各作平行線 PB 和 PA ，則 BP 稱為 P 點的橫坐標， AP 稱為牠的縱坐標。因為從直線外的一點只能作一條直線和牠平行，所以若 P 點的位置一定，則 BP 和 AP 的方向和長短也一定。反過來，若 BP 和 AP 的方向和長短一定，則 P 點的位置也就決定了。若 BP 和 AP 的長相應地等於 a 和 b 個單位，則 a, b 稱為 P 的坐標，我們記成 (a, b) 。



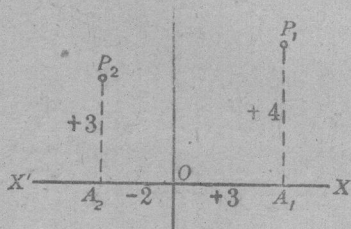
第 3 圖

橫坐標以原點作標準向右為正，向左為負；縱坐標以原點作標準，向上為正，向下為負。因此，在各個象限中，點的符號都不相同：

第一象限……(+, +), 第二象限……(-, +),
 第三象限……(-, -), 第四象限……(+, -).

實際上，已知道 P 點的坐標要將地畫出，並不定要作 BP , AP 兩平行線；因為 $OAPB$ 既是一個平行四邊形， OA 和 BP 便相等。所以若 P 的坐標為 (a, b) ，先在橫坐標上取一 A 點使 OA 等於 a ，然後平行於縱坐標，從 A 取 AP 使等於 b ，則 P 點就是所求的。

例如 P_1 的坐標為 $(+3, +4)$ ，先從 O 向右(正)在 OX 上取 OA_1 等於 3 單位，得 A_1 點，再從 A_1 向上(正)和 OY 平行，取 A_1P_1 等於 4 單位，就得 P_1 點。



第 4 圖

又 P_2 的坐標為 $(-2, +3)$ ，先從 O 向左(負)在 OX' 上取 OA_2 等於 2，得 A_2 點，再從 A_2 向上(正)和 OY 平行，取 A_2P_2 等於 3，就得 P_2 點。

〔注意〕坐標的單位可以任意定，但通常橫坐標和縱坐標總用一樣的單位，普通的方格紙，若沒有什麼不便當，則以 1 小方格，2 小方格或 3 小方格的一邊為單位 1。

習 題 一

1. $(0, 0)$, $(0, b)$, $(a, 0)$ 這三點各在什麼地方?

2. 用適當的單位畫出下列各點:

- (a) $(0, 1)$; (b) $(1, 0)$; (c) $(1, 1)$;
 (d) $(-1, 1)$; (e) $(-1, -1)$; (f) $(1, -1)$;
 (g) $(2, 3)$; (h) $(-2, 3)$; (i) $(3, -2)$;
 (j) $(0, -2\frac{1}{2})$; (k) $(-3.7, 0)$; (l) $(-1\frac{1}{2}, -1\frac{3}{4})$;
 (m) $(-4, 3.2)$; (n) $(3, -\sqrt{2})$; (o) $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

5. 【兩點間的距離】若 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 兩點的坐標已經知道的時候，則牠們中間的距離 d 很容易求出。

如第 5 圖先畫 P_1 和 P_2 的坐標，又畫 P_1Q 垂直於 A_2P_2 ，則

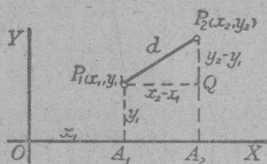
$$P_1Q = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1,$$

和 $QP_2 = A_2P_2 - A_2Q = y_2 - y_1,$

但 P_1QP_2 是一個直角三角形，依照關塔果拉士的定理，

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1Q}^2 + \overline{QP_2}^2$$

所以
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



第 5 圖

習 題 二

求下列各題兩點間的距離，並照第 5 圖畫出來：

1. $(3, 3)$ 和 $(7, 6)$.

2. $(-6, 2)$ 和 $(6, -3)$.

3. $(6, 2)$ 和 $(-2, -4)$.

4. $(-\frac{1}{2}, 5)$ 和 $(-8\frac{1}{2}, -3)$.

求下列各兩點間的距離：

5. $(2, 1)$ 和 $(5, 1)$.

6. $(0, 0)$ 和 $(2, 5)$.

7. $(6, 0)$ 和 $(0, 5)$.

8. $(0, 0)$ 和 (a, b) .

9. $(-6, 0)$ 和 $(0, -6)$.

10. $(0, 0)$ 和 $(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$.

11. 證明從原點 O 到 $P(x, y)$ 的距離為 $\sqrt{x^2 + y^2}$.

12. 若 P_1 在第二象限， P_2 在第四象限，畫圖並證明第 5 節的公式。

13. 證明 $(7, 2)$ 和 $(1, -6)$ 在以 $(4, -2)$ 為圓心的圓周上；並求這個圓的半徑。

14. 若 $(6, 2)$ 和 $(3, k)$ 的距離為 5，求 k 的值。將圖畫出。將下面的三點作頂點畫三角形，由牠們各邊的長證明是正

三角形,等腰三角形,直角三角形;並且,其中有兩個若當作三角形看,則牠們的面積等於零:

15. $(-4, 3), (2, -5), (3, 2)$.

16. $(4, 0), (-4, 0), (0, -4\sqrt{3})$.

17. $(2, 3), (-4, 1), (6, -2)$.

18. $(-6, 8), (6, -8), (8, 6)$.

19. $(5, 1), (2, -2), (8, 4)$.

20. $(-1, -1), (0, 0), (3, 3)$.

21. $(4, 1), (1, 3), (-3, 1), (-2, -1)$, 是四邊形的頂點, 將這個四邊形畫出, 並且求牠的兩對角線的長。

22. 將直線 AB 和牠的垂直平分線作坐標軸, 證明這垂直平分線上的點到 A 和 B 的距離相等。

23. 證明: 若 (x, y) 到 $(2, 3), (4, 5)$ 的距離相等則 $x+y=7$ 。

24. 三角形的頂點為 $(2, 3), (4, 5), (6, 1)$, 求牠的外心 (x, y) 。

6. 【線段中點的坐標】 在第6圖中 $P_0(x_0, y_0)$ 是 P_1P_2 的中點, 因為 B_0P_0 和 A_0P_0 相應地是梯形 $B_1P_1P_2B_2$ 和 $A_1A_2P_2P_1$ 的中線, 由初等幾何, 這很容易明白,

$$B_0P_0 = \frac{1}{2}(B_1P_1 + B_2P_2),$$

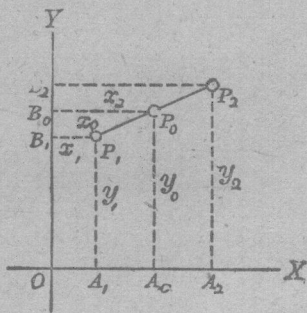
和 $A_0P_0 = \frac{1}{2}(A_1P_1 + A_2P_2),$

所以我們可以得出下面的公式:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

和

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



第 6 圖

7. 【依定比內分線段】 設線段 P_1P_2 和內分點 P_0 的坐標

各爲 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 和 (x_0, y_0) ,

而 $P_1P_0 : P_0P_2 = m : n$.

因爲 $\frac{A_1A_0}{A_0A_2} = \frac{P_1P_0}{P_0P_2} = \frac{m}{n}$,

即 $\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{m}{n}$,

將 x_0 當作未知數解這方程式, 則,

$$x_0 = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}.$$

同樣地 $y_0 = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$.

設 $\frac{m}{n} = \lambda$,

則

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

〔注意〕前節所得的公式只是本節的特例, 因爲中點就是內分線段成相等的兩部分的點, 即 $m=n$, 而 $\lambda=1$.

8. 【依定比外分線段】若 P_0 外分線段 P_1P_2 , 則 P_0P_2 爲負; 或 P_1P_0 爲負; 故,

$$\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} = -\frac{m}{n},$$

或

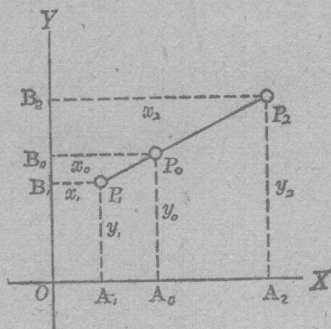
$$\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{m}{n};$$

而

$$x_0 = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}.$$

同樣地

$$y_0 = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}.$$



第 7 圖

但若設 $-\frac{m}{n} = \lambda$,

則

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

習題三

下列的各對坐標是一條線段的兩端點的；試求牠們的中點：
(1到6口答)。

1. $(7, 4), (3, 2)$.
2. $(6, -4), (-2, -2)$.
3. $(-3, 1), (2, 7)$.
4. $(4, -1), (-4, 1)$.
5. $(a, 1), (1, a)$.
6. $(0, 0), (0, \frac{2}{3})$.
7. $(7.3, 4.5), (2.9, 12.3)$.
8. $(14.7, -14.7), (0, 12.2)$.
9. $(-2.8, 6.4), (-3.9, 7.2)$.
10. $(-3\frac{3}{8}, -7\frac{5}{8}), (2\frac{3}{4}, -4\frac{1}{2})$.

下列坐標各各表示一線段的兩端點，依照各題所給的比求各分點，並畫圖表示：

11. $(2, 1), (3, -9)$; 4:1.
12. $(5, -2), (5, 3)$; 2:3.
13. $(-4, 1), (5, 4)$; 5:2.
14. $(8, 5), (-13, -2)$; 4:3.

下列坐標各各表示一條線段的兩端點，試求牠們的兩個三等分點：

15. $(-1, 2), (-10, -1)$.
16. $(11, 6), (2, 3)$.
17. $(7, 8), (1, -6)$.

18. $(7, 2), (-1, 4)$ 和 $(3, -6)$ 為三角形的三頂點，求牠的每邊的中點，並且將圖畫出來。

19. 求前題三角形的三中線的交點。

(應用初等幾何中重心的定理)。

20. $A(4, 7)$, $B(5, 3)$ 和 $C(6, 9)$ 為三角形的頂點, 求這三角形各邊的中點。

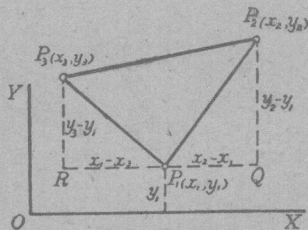
21. 若線段的一端點是 $(4, 6)$, 中點是 $(5, 2)$, 求他一端點。

22. ABC 三角形的頂點為 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 和 (x_3, y_3) , 試證明牠的重心是:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

9. 【三角形的面積】 如第8圖 $P_1P_2P_3$ 為一個三角形, 經過 P_1 作 RQ , 平行於 OX , 並且從 P_3 和 P_2 作 RQ 的垂線, 則

$$\begin{aligned} \Delta P_1P_2P_3 &= \text{梯形 } P_3RQP_2 - \Delta RP_1P_3 - \Delta P_1QP_2 \\ &= \frac{1}{2}RQ(RP_3 + QP_2) - \frac{1}{2}RP_1 \cdot RP_3 - \frac{1}{2}P_1Q \cdot QP_2. \end{aligned}$$



第 8 圖

所以,

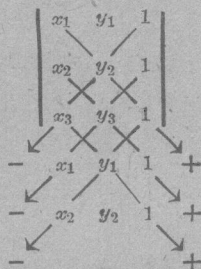
$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}(x_2y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

若是用行列式表示, 那末

$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

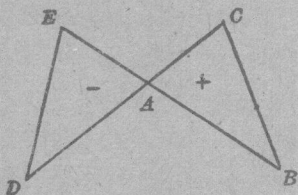
【注意一】 多角形的面積可分成若干個三角形來求各面積的和。

〔注意二〕 沒有學過行列式的，上式可照下法計算：



將直線所連的每三個數相乘，依箭頭所指示的符號而求這六個乘積的代數和。

10. 【面積的正負】 和線段以及角一般，面積也可分成正負兩種，若從一個頂點起，順了多角形的邊，照着鐘錶的指針轉動的相反方向轉過去，則面積為正；反過來，若依照鐘錶的指針轉動的方向轉過來，則面積為負，所以在第9圖中， $\triangle ABC$ 的面積是正的， $\triangle ADE$ 的面積就是負的。



第 9 圖

習 題 四

在方格紙上畫下面的各個三角形，依公式求牠們的面積，再由圖上來覆證所得的結果：

1. $(3, 3), (-1, -2), (-3, 4)$.

2. $(0, 0), (12, -4), (3, 6)$.

3. $(1, 3), (3, 0), (-4, 3)$.

4. $(-2, -2), (0, 0), (5, 5)$.

5. 求四邊形 $(4, 5), (2, -3), (0, 7), (9, 2)$ 的面積，並且在方格紙上畫圖來覆證所得的結果。