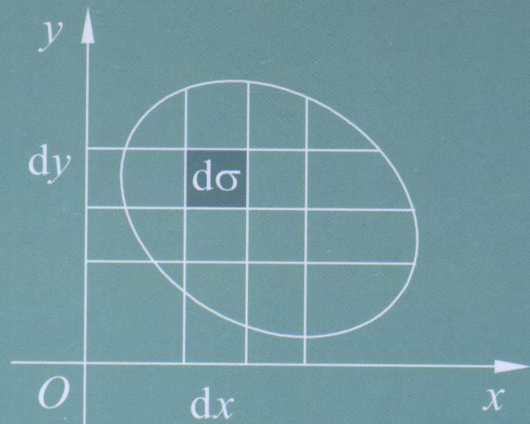
全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

（上册）

主　编　赵建玲　刘志刚
副主编　邓超公　赵燕冰



- 以应用为目的，以必需够用为度
- 注重思路引导，强调基础知识掌握
- 注重能力培养，弱化理论证明和复杂计算
- 理论联系实际，贯彻由浅入深的教学原则，精选例题及习题
- 模块化教学，为不同专业或专业方向提供了更大的选择空间

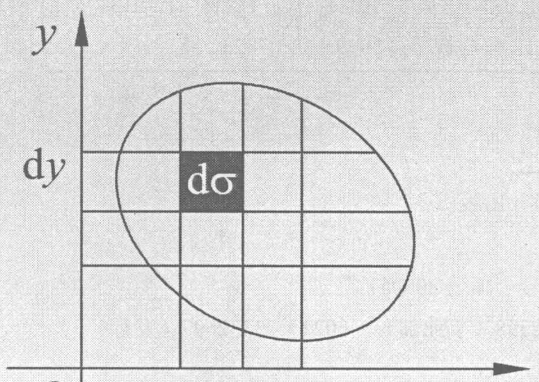
天津科学技术出版社

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

（上册）

主　编　赵建玲　刘志刚
副主编　邓超公　赵燕冰



天津科学技术出版社

内 容 提 要

本书以教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》（教高[2006] 16号）和最新颁布的《高职高专教育数学课程教学基本要求》为指导，从高职高专人才培养目标出发，在认真总结、分析、汲取部分高职高专院校高等数学课程教学改革经验的基础上编写而成。本书遵循“以应用为目的、以必需够用为度”的原则，合理编排教学内容，适当降低难度，注重理论联系实际和实践能力的培养，突出内容的实用性和课时安排的灵活性。本书将教材与辅导融为一体，每节精心配置了例题、习题，以便学生巩固所学知识；每章末配有“本章小结”，便于学生滚动复习；书末附有数学用表和习题答案，供课堂教学和学生学习参考。

全书分为上、下两册，共十三章。本书为上册，共八章，包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、拉普拉斯变换。

本书主要作为高职高专院校工科类各专业高等数学课程的教学用书，也可作为成人高等学校各专业高等数学课程的教学用书，还可作为学生“专接本”和各类考试的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上/赵建玲等主编. —天津：天津科学技术出版社，2009.5

ISBN 978-7-5308-4970-5

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 078232 号

责任编辑:杨庆华

责任印制:王 莹

天津科学技术出版社出版

出版人:胡振泰

天津市西康路 35 号 邮编 300051

电话（022）23332398（事业部） （022）23332697（发行）

网址:www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

北京奥隆印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 33.75 字数 864 000

2009 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

定价:52.00 元（共两册）

编委会

《全国高职高专教育“十一五”规划教材》

前 言

高等数学作为高职高专院校工科类专业重要的一门基础课、工具课，它对培养和提高学生的思维能力，使学生形成正确的世界观、价值观具有重要的作用。长期以来，高职高专院校一直使用本科教材或本科院校编写的教材，教学一线教师深感现有教材不能很好满足高职高专课堂教学需要，一方面理论难度大，不符合高职高专院校学生基础和认知水平，教学内容深度和广度很难把握；另一方面内容安排不符合教学实际需要，教师在教学中需要进行大量的删减和整合，不仅不利于学生课后自学，而且还会影响教学质量和实践能力的培养。为此，我们在认真总结、分析、汲取部分高职高专院校高等数学课程教学改革经验的基础上，通过所有参编者的集思广益和通力合作，才形成和编写出这套适合高职高专院校使用的高等数学教材。

本教材从高职高专院校的人才培养目标出发，遵循“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，以素质教育和创新能力的培养为导向，从高职高专学生基础出发，本着教师既好教学生又好学的基本要求，充分体现“理论联系实际，深化基本概念，淡化理论证明，强化基本计算，注重能力培养，突出实用性，适合专业需要”的高等职业教育的特色，力求做到结构合理，内容先进，条理清晰，重点突出，难点分散，教学与辅导并用。

本教材内容安排合理，难度适宜，深入浅出，通俗易懂，富有启发性和针对性，有利于激发学生的学习兴趣和大面积提高教学质量。同时还具有以下五个方面的特色：

1、较好地解决了初等数学与高等数学的衔接，符合高职高专学生的基础和认知水平。

2、理论联系实际，从生产、生活实例引入概念，并应用数学知识分析、解决实际问题，加强了学生对数学知识应用意识和兴趣的培养，突出基础课为专业课服务的最终目的。

3、尽量保持数学自身的系统性与逻辑性，不过分追求理论上的严密性，尽可能体现直观性教学原则，降低不必要的抽象思维，有利于教学内容深度和广度的把握。

4、根据专业需要，便于模块教学，并可以根据开设时限进行弹性取舍，从而缓解了目前高等数学教学中存在的内容多与课时少的矛盾。

5、将高等数学内容和工程数学内容巧妙地融合在一起，不仅适合各种专业的需要，而且还适合不同开设时限的需要，既经济又实用。

本书由赵建玲、刘志刚担任主编，邓超公、赵燕冰担任副主编。

鉴于我们的研究能力、学术水平有限，书中难免有疏漏与错误之处，恳切期望同行、读者给予批评指正，以便进一步修改完善。

编　者

2009 年 8 月

目　录

第一章　函　　数

高等数学以变量为研究对象．变量间最基本的关系可以由函数反映出来，故而探讨和学习高等数学，首先要深入了解函数的概念和性质．

中学教科书已经介绍过一些函数的概念与性质．本章将在此基础上，全面深入的介绍函数的定义、各种性质和相关概念．

第一节　函数的概念和特性

一、区间与邻域

1．区间

区间是高等数学中常用的数集，所有区间都是实数集 R 的子集（R 自身也是一种区间）．现将所学过的区间的表示归纳如下：设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，则有限区间为

开区间　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

左闭右开区间　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

左开右闭区间　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$．

其中 a 和 b 称为**区间的端点**，它们在数轴上都表示点 a 与点 b 之间的线段（如图 1.1）．

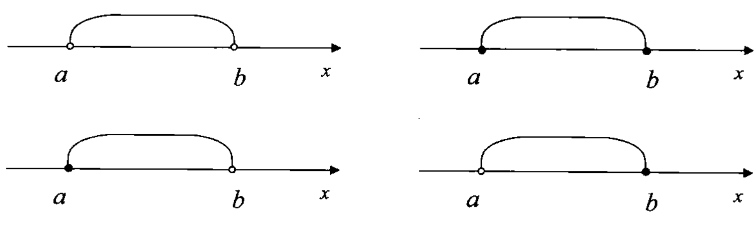


图 1.1

无限区间为

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$；

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$；

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in \mathrm{R}\}$.

它们在数轴上表示射线或直线．（如图 1.2）

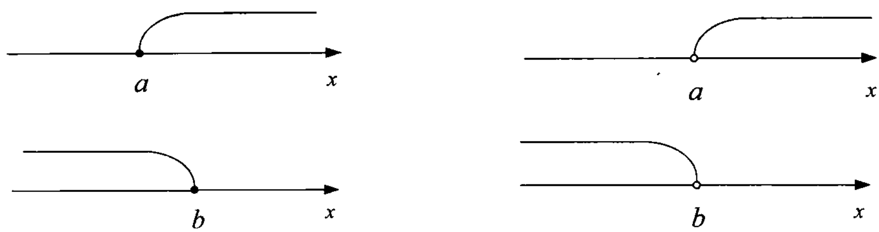


图 1.2

以后凡是不需要辩明所论区间是否包含端点，以及是有限区间或是无限区间时，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

2. 邻域

邻域也是高等数学中常用的概念．以点 x_0 为中心的任何开区间称为 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$．

开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$（其中 $\delta>0$），称为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．从数轴上看，点 x_0 的 δ 邻域就是以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间（如图 1.3）．

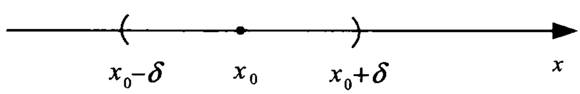


图 1.3

在点 x_0 的 δ 邻域中去掉中心 x_0 后，称为**点 x_0 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ （如图 1.4）．

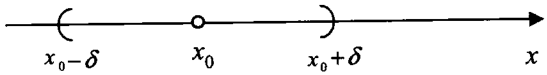


图 1.4

注意：$|x-x_0|>0$ 表示 $x\neq x_0$，即邻域内不包含点 x_0．

例如 $U(2,0.1)=\{x\mid |x-2|<0.1\}$ 表示点 2 的 0.1 邻域，也可表示为开区间 $(1.9,2.1)$．$\mathring{U}(3,0.3)=\{x\mid 0<|x-3|<0.3\}$ 表示点 3 的 0.3 去心邻域，它可用两个开区间的并集表示为 $(2.7,3)\cup(3,3.3)$．

二、函数

1. 函数及相关概念

定义 1　设 x、y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于 D 中的每个数 x，按照某个对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是定义在 D 上 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$．其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的定义域．

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$．**全体函数值的集合称为函数的值域**，记为 M，即 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$．

（1）函数的两要素

函数的对应法则和定义域称为函数的两要素．

函数的对应法则指的是由自变量的取值确定因变量值的法则．

例如：函数 $f(x)=3x^2-2x+5$ 所确定的对应法则为：$f(\quad)=3(\quad)^2-2(\quad)+5$．

于是　$f(2)=3\times2^2-2\times2+5=13$；

$f(x+1)=3(x+1)^2-2(x+1)+5$．

自变量的取值范围称为函数的定义域．

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin(2x-1)$ 的定义域．

解 要使函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin(2x-1)$ 有意义，则必有

$$\begin{cases}4-x^2>0,\\-1\leqslant 2x-1\leqslant 1.\end{cases}\qquad 即\begin{cases}-2<x<2,\\0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

解得 $0\leqslant x\leqslant 1$，

于是所求函数的定义域为 $[0,1]$.

两个函数相同的充要条件是它们的对应法则和定义域都相同.

例 2 下列函数是否相同？为什么？

（1） $y=x$ 与 $y=|x|$；

（2） $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；

（3） $y=\sqrt[3]{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{t}$.

解 （1） $y=x$ 与 $y=|x|$ 不是相同的函数，因为对应规则不相同.

（2） $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 不是相同的函数，因为定义域不相同.

（3） $y=\sqrt[3]{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{t}$ 是相同的函数，因为对应规则和定义域都相同.

说明： 函数与自变量用什么字母表示没有关系.只要对应规则和定义域都相同，则就表示同一个函数.

（2）函数的记号

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号除用 f 外，也可改用其他字母如 φ、g、F 等，相应地函数记作 $y=\varphi(x)$， $y=g(x)$， $y=F(x)$ 等.

2. *函数的表示法*

函数常用的表示方法有解析法、表格法和图像法.

在用解析法表示函数时，经常遇到下面几种情况

（1）分段函数

在自变量不同的取值范围内用不同的解析式表示的函数称为分段函数.

如函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\-x, & x<0.\end{cases};$$

狄利可雷 (Dirichlet) 函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$；

符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

以上函数都是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数

应当指出，分段函数仍然只是一个函数，而不能看成是几个函数，其**定义域应是各部分自变量取值范围的并集**.

例 3 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ \sin x, & x>0.\end{cases}$$

求 $f(-\sqrt{2})$、$f(\frac{\pi}{6})$、$f(\frac{\pi}{2})$.

解 $f(-\sqrt{2})=(-\sqrt{2})^2=2$ $f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ $f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$

（2）隐函数

如果因变量可以用自变量的解析式 $y=f(x)$ 表示，这种形式的函数通常称为**显函数**.

如果函数的因变量与自变量的对应法则是由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 确定的，称这种由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为**隐函数**.

例如由方程 $x+y^3-1=0$ 确定了 y 是 x 的隐函数，若解出 y 得显函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$，这个过程叫做隐函数的显化．隐函数的显化有时是困难的，甚至是不可能的.

在以后的学习中会经常遇到隐函数，多数情况下不要求显化.

（3）参数式函数

用参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$（$t$ 为参数）表示的变量 y 与 x 之间的函数关系，称为由参数方程所确定的函数，简称**参数式函数**．例如函数 $y=2(x-2)^2$ 可以表示为参数式函数

$$\begin{cases}x=t+2,\\ y=2t^2.\end{cases}\quad (t\in\mathbf{R}).$$

三、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M．如果对于任一数值 $y\in M$，按照 $y=f(x)$ 的关系，都可确定唯一的 $x\in D$ 与之对应，这样就得到一个定义在 M 上的 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 M，值域为 D．相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数．

习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量．所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$ 来表示 $y=f(x)$ 的反函数．显然，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数．并由定义可知，反函数的定义域等于直接函数的值域，反函数的值域等于直接函数的定义域．

可以证明，**在同一坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称**．如图 1.5 所示．

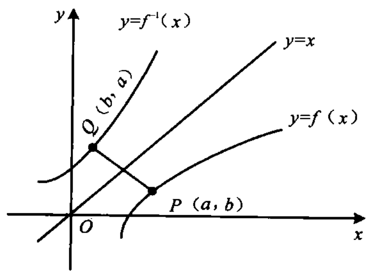


图 1.5

定理（反函数存在定理）　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调函数，则函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有反函数．

例如　函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，有反函数 $y=-\sqrt{x}$；$y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，有反函数 $y=\sqrt{x}$．

四、函数的几种特性

1．函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义（I 可以是 $f(x)$ 的整个定义域，也可以只是其定义域的一部分），如果存在正数 M，对任意 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$