普通高等院校大学数学系列教材

线性代数教程

胡劲松　王正华　编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等院校大学数学系列教材

线性代数教程

胡劲松　王正华　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

线性代数是经济管理类与工科类专业的重要基础课程之一. 本书是根据经济管理类和理工类的线性代数课程教学基本要求，参考教育部最新颁布的全国硕士研究生数学入学考试大纲编写而成的.

全书主要内容有行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量和方阵的对角化、二次型，内容丰富、结构合理、逻辑清晰、可读性强.

本书可作为一般普通高等院校经济管理类各专业、理工类各专业（非数学专业）的“线性代数”课程教材，也可供相关教师和专科、职业学院学生参考或选用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程/胡劲松，王正华编著. —北京：科学出版社，2009
（普通高等院校大学数学系列教材）
ISBN 978-7-03-024974-6

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①胡…②王… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 115857 号

责任编辑：王 静 房 阳 / 责任校对：张怡君
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 8 月第一次印刷 印张：14 1/2
印数：1—6 000 字数：278 000

定价：22. 00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《普通高等院校大学数学系列教材》编委会

主　任：李顺初

副主任：伊良忠　秦昌明

编　委：胡劲松　华　巍　陈子春　王正华

郑鹏社　王玉兰　徐艳艳　蒲　俊

前　言

随着近年来大学数学课程教学改革的不断发展，“线性代数”课程学时减少，而内容和深度增加. 我们对《线性代数简明教程》（伊良忠主编，西南交通大学出版社）作了较大修改，并且认真地阅读了经济管理类以及理工类的线性代数课程教学基本要求，参考了大量的线性代数和高等代数教材及全国硕士研究生数学入学考试复习参考书等，借鉴其经验，吸取其长处，努力使本书适应教学改革不断发展的需要. 总的来说，本书有以下一些特点：

第一，重点突出，简明扼要. 本书在选材上以基本概念与基本方法为核心，如第4章，对“向量空间”这个非常抽象的概念，我们虽然给出了具体的定义，但还是以简单的$\mathbf{R}^n$（n维向量空间）为例，详细地介绍了向量空间的基本内容；在叙述上也力求清晰易懂，对过繁过难的定理或结论，我们都通过具体的例子或有一定逻辑性的阐述加以说明或予以论述，如在很多《线性代数》教材里都略去证明过程的“惯性定律”，我们用矩阵的初等变换给出了实例推导，从而让学生比较容易理解抽象的代数问题，既有利于培养学生的综合概括和抽象思维能力，又有利于学生掌握线性代数知识和对后继课程的学习.

第二，内容丰富，结构合理. 本书参考了众多的相关教材和参考书，并充分融入了编者多年的教学心得与体会. 比如，在第3章判断向量组线性相关性的问题上给出了一种简单的方法；第6章还给出了判断二次型类型的“初等变换法”. 这些方法都有很强的实用性，且都是在一般教材里几乎不曾出现过的方法，开拓了学生的视野. 每章的最后都进行小结，以总结本章的主要内容及基本要求；在结构安排上，由浅入深，将学生难以理解而教学过程中又必须涉及的复数问题附在书末. 这样可以减少篇幅，便于教学，以适应学时减少的教学方案. 还可以使某些章节的内容根据学生的不同层次、不同专业等具体情况适当予以取舍，而不影响本书的连贯性.

第三，例题紧扣教学内容，习题丰富且有层次. 因为学时少、内容多，所以本书在例题和习题的配置上，着重注意基本内容的训练，同时又有适当的提高题. 在注意加强应用、适当淡化技巧的基础上，我们选择的都是紧扣教学内容的典型例题，以方便教师教学和学生自学. 习题和总习题按由易到难的次序编排在每一章节后面，以便读者能够正确利用每节（或每章）所学理论和方法解决问题. 书后还附有习题答案与提示，供学生解答后对照. 另外，我们在每个章节的习题或总习题里还配有相当数量的判断辨析题和选择题，在保证教学基本要求的前提下留有一定难度的思考问题，这有助于学生对基本概念、基本理论的更深一步理解和对所学知识的

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

巩固. 也扩大了本书的适应面,提升了本书的伸缩性.

本书由胡劲松负责执笔第 3～6 章并统稿;王正华负责执笔第 1、2 章. 参加本书审稿的有四川大学彭联刚教授、西华大学秦昌明教授和伊良忠教授. 他们都认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢.

本书的编写与出版得到了西华大学的学校领导、教务处以及数学与计算机学院的大力支持,在此一并致谢!

由于编者的水平有限,疏漏和不妥之处在所难免. 恳请使用本书的老师和同学提出批评和建议,使本书在教学实践的过程中不断完善.

编　者

2008 年 12 月

目　　录

第 1 章　行　列　式

线性代数是研究离散变量之间的线性关系的一门基础学科，它在经济学及其他领域中是必不可少的理论基础. 而行列式是线性代数中的一个重要概念，也是研究线性代数的一个重要工具. 本章主要介绍行列式的概念、行列式的性质，以及行列式的计算方法. 对于行列式的应用，本章最后介绍求解含有 n 个方程的 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　行列式的定义

1.1.1　行列式的引入

行列式起源于解方程个数与未知量个数相同的线性方程组(即一次方程组). 例如，用中学学过的消元法解关于未知量 x_1,x_2 的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，线性方程组(1.1.1)有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

在(1.1.2)式中，其分母都是由线性方程组(1.1.1)的未知量的系数构成，把这四个系数按它们在线性方程组(1.1.1)中的位置排成两行两列(横排称为**行**，竖排称为**列**)的数表，且用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.3}$$

来表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 的值，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1.4}$$

称定义为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 的式子(1.1.3)为一个**二阶行列式**，其中 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式(1.1.3)的**元素**，元素 a_{ij} 的第 1 个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第 2 个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列.

由于二阶行列式表示的是两项的代数和，根据其取值规则(1.1.4)，可用图 1.1 的对角线法则来记忆，其中实线联结的两个元素 a_{11},a_{22} 称为二阶行列式

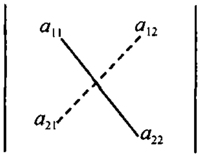

图 1.1

(1.1.3)的**主对角线**，其乘积取正号；虚线联结的两个元素 a_{12}，a_{21} 称为二阶行列式(1.1.3)的**副对角线**，其乘积取负号，即二阶行列式等于主对角线元素乘积与副对角线元素乘积之差.

根据二阶行列式的定义，线性方程组(1.1.1)的解(1.1.2)式中的 x_1，x_2 的分子也可以表示成二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则线性方程组(1.1.1)的解(1.1.2)式可以写成 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$.

类似地，用消元法解含有三个方程的三元线性方程组时，如果引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1.5}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

的值，就称(1.1.5)式为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式的取值也可用图 1.2 的对角线法则来记忆，其中实线联结的三个元素的乘积取正号，虚线联结的三个元素的乘积取负号.

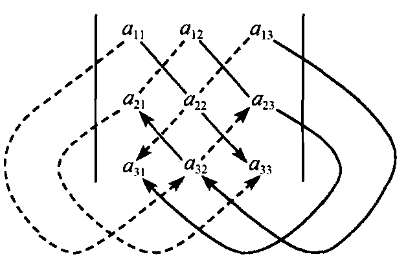

图 1.2

如果推广到解含有 n 个方程的 n 元线性方程组，就可以引入 n 阶行列式的概念，但对角线法则对 n 阶行列式($n \geqslant 4$)不适用，需引入新的取值规则. 为此，先介绍 n 阶排列的相关知识，这些知识在以后学习数学的其他分支(如概率论)时都要用到.

1.1.2 n 阶排列

定义 1.1.1 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成一个不重复的有序数组，称为一个 **n 阶排列**，也称为 **n 元排列**.

例如，1234 是一个四阶排列，32541 和 54321 都是五阶排列，1224 不是四阶排列.

由中学数学知识可知，n 阶排列共有 $n!$ 个，其中，$123\cdots(n-1)n$ 是唯一按照由小到大的自然顺序组成的排列，称为 **n 阶标准排列**（或 **n 阶自然序排列**）. 在四阶排列 3241 中，3 比 1 大，但 3 排在 1 前面，这与由小到大的自然顺序相反，这时称 3 和 1 这对数构成一个逆序. 在这个排列中，构成逆序的数对还有 32，21 和 41，因此四阶排列 3241 共有四个逆序，称这个排列的逆序数为 4. 一般地，有下面的定义.

定义 1.1.2 一个排列中的某两个数，如果较大的数排在较小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**；一个排列中包含的逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，常用记号 τ 来表示. 例如，$\tau(3241)=4$.

例 1.1.1 求五阶排列 35412 的逆序数.

解 在排列 35412 中，

3 排在首位，前面没有比它大的数，逆序数为 0；

5 的前面没有比 5 大的数，故逆序数为 0；

4 的前面有一个数(5)比 4 大，故逆序数为 1；

1 的前面有 3 个数(3，5，4)比 1 大，故逆序数为 3；

2 的前面有 3 个数(3，5，4)比 2 大，故逆序数为 3，

于是该排列的逆序数为

$$\tau(35412)=0+0+1+3+3=7.$$

例 1.1.2 求 n 阶排列 $123\cdots n$ 和 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解 n 阶排列 $123\cdots n$ 是标准排列，其中任意一对数都不构成逆序，因此

$$\tau(12\cdots n)=0,$$

而 n 阶排列 $n(n-1)\cdots 321$ 恰好与 n 阶标准排列相反，因而其逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.1.3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如，$\tau(35412)=7$，因此排列 35412 是奇排列；又如，$\tau(3412)=4$，因此排列 3412 是偶排列；$\tau(12\cdots n)=0$，因而 n 阶标准排列 $123\cdots n$ 也是偶排列.

定义 1.1.4 把排列中的两个数 i,j 的位置交换，其余数的位置保持不变，就得到一个新的排列，称这样的一个变换为**对换**，记为 (i,j).

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

排列 35412 经过对换(1,5)变成排列 31452,而原排列 35412 是奇排列,经过对换(1,5)后的新排列 31452 却是偶排列,反之亦然.一般地,有下述结论.

定理 1.1.1　排列经过一次对换后其奇偶性改变.

证　考虑对任意一个 n 阶排列进行(i,j)对换.

(1) 若对换的两个数相邻,即

$$\cdots\cdots ij\cdots\cdots \tag{1.1.6}$$

$$\xrightarrow{(i,j)}\cdots\cdots ji\cdots\cdots \tag{1.1.7}$$

比较这两个排列的逆序数,排列(1.1.6)和排列(1.1.7)中只有一对数的前后顺序改变,因此排列(1.1.7)的逆序数比排列(1.1.6)的逆序数多 1 或少 1,故排列的奇偶性改变.

(2) 若对换的两个数不相邻,假设 i 和 j 之间有 s 个数,即

$$\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots \tag{1.1.8}$$

$$\xrightarrow{(i,j)}\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots \tag{1.1.9}$$

从排列(1.1.8)变成排列(1.1.9)的(i,j)对换过程,可以经过一系列相邻两个数的对换来实现.先对排列(1.1.8)作 s 次相邻两个数的对换$(i,k_1),(i,k_2),\cdots,(i,k_s)$,有

$$\cdots\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots\cdots$$

再作 $s+1$ 次相邻两个数的对换$(i,j),(k_s,j),(k_{s-1},j),\cdots,(k_1,j)$,即得排列(1.1.9),这一共作了 $2s+1$ 次相邻两个数的对换.于是,对换(i,j)使排列(1.1.8)到排列(1.1.9)的奇偶性改变了 $2s+1$ 次,故排列(1.1.8)与排列(1.1.9)的奇偶性相反.

综上所述,经过一次对换改变排列的奇偶性.

利用定理 1.1.1 可以证明下面一个重要的结论.

定理 1.1.2　在全部 $n(n\geqslant 2)$阶排列中,奇偶排列各占一半,都是$\frac{1}{2}n!$个.

证　n 阶排列的总数为 $n!$ 个,设其中奇排列为 p 个,偶排列为 q 个,则 $p+q=n!$.若对每个奇排列都作同一对换,则由定理 1.1.1,p 个奇排列全变为偶排列,故 $p\leqslant q$.同理,若对每个偶排列都作同一对换,则 q 个偶排列全变为奇排列,故 $q\leqslant p$,所以 $p=q$,从而 $p=q=\frac{1}{2}n!$.

1.1.3　*n* 阶行列式的定义

由前面的讨论知,三阶行列式(1.1.5)的一般项是$\pm a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,列标 j_1,j_2,j_3 是 1,2,3 的排列.当 j_1,j_2,j_3 取遍 1,2,3 的所有排列时,就得到三阶行列式

(1.1.5)的全部项.通过观察可以发现,对于三阶行列式(1.1.5)的展开式,有

(1) 三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和,且 3 项带正号,3 项带负号;

(2) 每项都是三个不同元素的乘积,且每个元素都处在不同的行和不同的列中;

(3) 每项的三个元素的行标都是标准排列 123,而取正号的项的三个元素的列标 123,231,312 均为偶排列;取负号的项的三个元素的列标 132,213,321 均为奇排列.

于是三阶行列式又可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是一个三阶排列, $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三阶排列求和.

类似地,可以推广出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1.5 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列,两边各加上一条竖直线段,构成记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 ***n* 阶行列式**,常记作 D,有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.其取值规则为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1.1.10}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 阶排列, $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

n 阶行列式的定义可用如下三句话来概括:

(1) n 阶行列式 D 是 $n!$ 项的代数和;

(2) 每项都是 n 个不同元素的乘积,且每个元素都处在不同的行和不同的列中;

(3) 每项都冠以一定的符号,在行标为标准排列时,其符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,其中

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.1.11}$$

称为 n 阶行列式 D 的**一般项**,元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式 D 的

主对角线;元素 $a_{1n},a_{2(n-1)},\cdots,a_{n1}$ 所在的对角线称为行列式 D 的**副对角线**.

由定理 1.1.2 知,n 阶行列式的 $n!$ 个项中,正负项各占一半(不含元素本身的符号). 不难知道,按定义 1.1.5 得到的二阶、三阶行列式,与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. **当 $n=1$ 时,规定一阶行列式** $|a|=a$,注意和 a 的绝对值区分开.

例 1.1.3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解　根据定义 1.1.5,

$$D=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

这个行列式有不少元素是 0,从而有很多项都是 0,因此只要把不为 0 的项找出来相加就可以了.

如果从零最多的第 4 行开始考虑,要使行列式的项不为零,则每项中的每个元素均应是非零元素,所以第 4 行中的元素 a_{4j_4} 只能取 a_{44};而第 3 行有两个非零元素 a_{33} 和 a_{34},但 a_{34} 在第 4 列,与 a_{44} 在同一列,不能再取,所以第 3 行中的元素 a_{3j_3} 只能取 a_{33};同理,第 2 行中的元素 a_{2j_2} 和第 1 行中的元素 a_{1j_1} 也只能分别取 a_{22} 和 a_{11},所以该行列式不为零的项只有

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44},$$

故

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

像例 1.1.3 中这种主对角线以下的元素全为零的行列式,称为**上三角形行列式**,且将例 1.1.3 的结论推广到 n 阶上三角形行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此看出,上三角形行列式是很容易计算的,因此在计算行列式特别是高阶行列式时,常常可以把它化成上三角形行列式来计算.

另外,主对角线以上的元素全为零的行列式称为**下三角形行列式**;主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角形行列式**. 用类似例 1.1.3 的方法可得 n 阶下三角形行列式和 n 阶对角形行列式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.1.4 设五阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

求出该行列式中含有乘积因子 $a_{13}a_{34}a_{55}$ 的所有项.

解 在五阶行列式的展开式中含有因子 $a_{13}a_{34}a_{55}$ 的一般项为

$$(-1)^{\tau(3j_2 4j_4 5)}a_{13}a_{2j_2}a_{34}a_{4j_4}a_{55},$$

其中行标为标准排列 12345，列标的排列是 $3j_2 4j_4 5$，而 j_2 与 j_4 只能在 1 和 2 中选取，当 j_2 取 1，j_4 取 2 时，$\tau(31425)=3$；当 j_2 取 2，j_4 取 1 时，$\tau(32415)=4$. 因此含有乘积因子 $a_{13}a_{34}a_{55}$ 的项为

$$-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55} \quad 与 \quad a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}a_{55}.$$

定理 1.1.3 n 阶行列式 D 的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}, \tag{1.1.12}$$

其中 $i_1 i_2\cdots i_n$ 和 $j_1 j_2\cdots j_n$ 均是 n 阶排列.

证 首先，由于 $i_1 i_2\cdots i_n$ 和 $j_1 j_2\cdots j_n$ 均是 n 阶排列，所以 $a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}$ 是取自 n 阶行列式 D 中不同行不同列的元素的乘积.

其次，如果交换(1.1.12)式中的两个元素 $a_{i_s j_s}$ 和 $a_{i_t j_t}$ 的位置，则其行标的排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 经过一次 (i_s, i_t) 对换变为 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，列标的排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 经过一次 (j_s, j_t) 对换变为 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，而根据定理 1.1.1 知，对换后的行标和列标所构成的排列同时改变了奇偶性，因而它们的和的奇偶性不改变，即有

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)},$$

也就是说，交换(1.1.12)式中元素的位置，不会改变其符号. 可以经过若干次交换(1.1.12)式中元素的位置，使其行标变为标准排列，假设此时列标变为排列 $k_1 k_2\cdots k_n$，则(1.1.12)式变为

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.$$

上式结果即为定义 1.1.5 中 n 阶行列式 D 的一般项(1.1.11)式，也就是说 n 阶行列式 D 的一般项可以记为(1.1.12)式的形式.

由定理 1.1.3，可得 n 阶行列式的等价定义.

推论 1.1.1　设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个确定的 n 阶排列，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{1.1.13}$$

另外，行列式的项的因子的顺序也可以按列标的标准排列，即有如下的结论.

推论 1.1.2

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.1.14}$$

定义 1.1.5 和推论 1.1.2 也说明了行列式的行与列的地位是对称的.

例 1.1.5　求下列行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

解　这个四阶行列式 D 的各行各列都只有一个元素不为零，故该行列式只有一个项不为零，它是这四个非零元素的乘积带上相应的符号. 由(1.1.10)式得

$$D=(-1)^{\tau(3124)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}=1\times2\times3\times4=24,$$

或由(1.1.13)式得

$$D=(-1)^{\tau(4312)+\tau(4231)}a_{44}a_{32}a_{13}a_{21}=4\times3\times1\times2=24,$$

或由(1.1.14)式得

$$D=(-1)^{\tau(2314)}a_{21}a_{32}a_{13}a_{44}=2\times3\times1\times4=24.$$

习　题　1.1

1. 判断下列乘积是否为五阶行列式的项. 如果是，确定其应带的符号.

(1) $a_{12}a_{34}a_{41}a_{55}a_{13}$；　(2) $a_{25}a_{54}a_{43}a_{12}a_{31}$；　(3) $a_{25}a_{13}a_{42}a_{34}a_{51}$.

2. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的所有项.

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4. 用行列式的定义计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.

5. 如果 n 阶行列式 D 中为零的元素多于 n^2-n 个，证明：$D=0$.

1.2 行列式的性质

由 1.1 节的讨论知，当行列式的阶数比较小或行列式中零元素比较多时，可以用定义来计算行列式. 但 n 阶行列式有 $n!$ 项，每一项都是 n 个不同元素相乘，且每一项都要确定符号，若直接用行列式的定义来计算是很烦琐和困难的. 以下将讨论行列式的性质，从而寻求计算行列式的一般方法.

定义 1.2.1 将行列式 D 的行与列互换所得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'，即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2.1}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com