SHUXUELINGYU
XINFAXIAN

数学领域新发现

吴国银◎著

天津科学技术出版社

数学领域新发现

吴国银　著

天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学领域新发现/吴国银著.—天津:天津科学技术出版社,2009.1

ISBN 978-7-5308-4217-1

Ⅰ.数... Ⅱ.吴... Ⅲ.数学理论—文集 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 198625 号

责任编辑:张 萍

责任印制:白彦生

天津科学技术出版社出版

出版人:胡振泰

天津市西康路 35 号 邮编 300051

电话(022)23332398(事业部) 23332697(发行)

网址:www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

天津市津通印刷有限公司印刷

开本 889×1 194 1/16 印张 7.5 字数 187 000

2009 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

定价:24.00 元

序

《数学领域新发现》收录了吴国银工程师的四篇数学论文。这四篇论文的内容主要集中在数列方面。他的论说是在斐波那契数列论的基础上,又受到华罗庚等数学家研究成果的启发而产生的。这是他研究多年的新发现,应当说是非常令人振奋的,也是数学界的一桩喜事。因为新发现往往是可遇而不可求的事。

我不是一个数学家。本来没有资格对吴工的论文进行评说。甚至这篇序言也不该由我来写。但是吴工大哥一家与我家交往多年,所以我有幸聆听吴工讲述他的工作和研究。对于他的数学研究,吴工周围的人有的很不理解,甚至说他是退休后“有福不会享”,“吃饱了没事干”。因为吴工没有任何娱乐嗜好,他几乎把所有的时间都用在数学研究上了。陈景润研究哥德巴赫猜想废寝忘食,草稿演算有几麻袋。吴工为了他的数学梦想,也是夜以继日,计算草稿有好几箱。他周围的人大多不愿意听他讲述他的研究工作,认为他对那些枯燥的数字竟然津津乐道,不知疲倦,真是有点神经质了。可是唯独我愿意倾听他的述说,所以他把我当成了知己好友。

我之所以能够颇感兴趣听吴工讲述他的研究,并不是我懂得他研究的深奥的数学课题,而是我很敬佩他这个人。吴工早年毕业于北京航空学校,后来又在沈阳工学院数学系深造。他一直就职于飞机制造业,在模线设计领域多有创造。可以说他一生都在和数学打交道。正是这样的环境造就了他对数学的无比深情。也正是这样的环境使得他日日夜夜与数学形成了割不断的联系。精诚所致,金石为开,吴工在数学领域能够有所发现也就不奇怪了。我之所以敬佩吴工还不仅仅是由于他兢兢业业地工作,并在工作岗位上做出了不少成就,更在于他退休之后孜孜不倦地继续劳作,为了他的数学研究的理想,他放弃了一切游玩娱乐。每天从一睁眼就是计算,计算,一直到不得不躺下睡觉为止。日复一日,年复一年,吴工的研究要没有成果那反倒是怪事了。如今多少人盼退休,就是为了清闲自在,无所事事。可是又有多少人像吴工一样,退而不休。正是有许许多多像吴工这样的人,他们构成了我们民族的脊梁,他们继承了我们民族的优秀传统,才使得我们民族自强不息的精神代代相传。

听吴工讲述,他说这是他多年独立研究的心得和发现。我为吴工高兴。但是发现,成果,必须要数学界的专家和权威认定。由于我主编《中国历代文献精粹大典》时和中国科学院的数学专家有一些交往,于是就介绍吴工到北京中国科

学院的数学所找到我的山东大学的校友——数学史专家郭书春教授，然后又由郭教授介绍吴工先后拜见了北京、河北、上海的一些数学专家。他们有的是科学院院士，有的是博士生导师。吴工把自己的研究心得和成果或口头或书面向他们分别做了大致介绍。这些专家也分别对吴工的研究工作和研究成果表示浓厚的兴趣，给出了不低的评价，甚至邀请他到高校去讲课。但是对于吴工花费多年心血的数学研究，到底是怎样的发现？这些发现到底应该怎样评价？这些专家因为没有全面看到吴工的著述，所以也都没有书面结论。因此吴工决定把自己多年的研究发现先期公诸于世，然后再请专家进行评说。在吴工的大作问世之时，他以为我对他的研究工作最理解，最支持，要我写一篇序言。鉴于以上情况，我岂能推辞，只能欣然命笔。

关于吴工此书所收四篇论文的内容，在网上也有不少文章，但是人们可以加以比较，进而可以确知吴工到底有什么样的新发现，以及吴工的发现到底有怎样的价值。我希望吴工此书问世后数学界以及对数学感兴趣的人们，都能看看此书，发表各自的评论。真理是越辩越明的。

天津社会科学院研究员　门岿

2008年11月于津门知不知斋

前　言

我是一名飞机制造工程师，深知精通数学的好处。用数学方法解决工作中的问题，就好像有仙人指路一样，既省事又准确。1965 年在沈阳飞机制造公司工作时，我负责协调歼 - 7 飞机型架和模具，根据歼 - 8 飞机理论模线，思考出“经纬度球面几何读角度”的方法。

我没有好的机遇，但我的数学头脑是天生的。在青年时代，我每天工作 8 小时，晚上要开 2 小时的轮流发言会。在开会的时候，我就低头用功做 10 ~ 20 道微积分数学题。一个暑假时间，一本《高等数学习题集》就这样做完了。沈达立教授看后非常惊讶，留下了底稿。实数微积分，我的毕业成绩是 100 分。在 40 岁以前，我的口袋里总装着数学书和物理书。

我们这一代人深知中华民族的苦难。现在过着安乐的老年生活，我感到十分满足和愉快。安乐的生活，使我激发起一直以来对数学的热爱，撰写了四篇数学科学论文：

一、数列通项式公式、数列合式公式和通项方程式；

二、六种数列群的综合式及其极限的演变；

三、级数定理；

四、数列方程式

$(-1)^{n-1}\cdot(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0)+f(n)$，$f(n)=b_m\cdot n^m+b_{m-1}\cdot n^{m-1}+\cdots+b_1n+b_0$。

这四篇关于数学定理和数学公式的论文，是我在数学领域中不断探索得出的，希望能够补充数学基础理论，给人们解决实际问题增加新的计算手段。

在撰写论文过程中，经中国文学作家门岿先生介绍，我见到中国科学院的几位数学专家。在此，向各位数学专家表示感谢，感谢他们对我的帮助和启发。

由于本人数学功底不深，错误之处在所难免，请学者们指正。

退休工程师　吴国银

2008 年 9 月 28 日

目　录

第一篇　数列通项式公式、数列合式公式和通项方程式

第二篇　六种数列群的综合式及其极限的演变

第三篇　级数定理

第四篇　数列方程式 $(-1)^{n-1}\cdot(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0)+f(n),f(n)=b_m\cdot n^m+b_{m-1}\cdot n^{m-1}+\cdots+b_1n+b_0$

第一篇 数列通项式公式、数列合式公式和通项方程式

本章的主要内容是数列各种公式及其推导。

在实践当中，有的数列通项式很难找到，有的数列合式很难求出。能否找到数学规律，建立数学公式，是解决数列问题的关键。有了公式找出数列的通项式，求数列的合式也是个难题。我首先从简单的自然数列找起，$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$，通项式是 n，用组合形式表示是 C_n^1，合式$\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$用组合形式表示是 C_{n+1}^2，根据杨辉公式得 $C_{n+1}^2=C_n^2+C_n^1$。再看自然数平方数列，$1^1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot\frac{[2(n+1)-1]}{3}$，$n^2$ 用组合形式表示出来必须先进行变换，

$n^2=n^2+n-n$

$n^2=(n+1)\cdot n-n$

$n^2=2C_{n+1}^2-C_n^1$

有了通项式的变换，根据杨辉公式，其数列合式也就出来了。在这种变换下，求出“n^k 三角形”和“n^k 三角形变换”，从而解决了复杂数列求合式的问题，简单、方便，避免列出很多复杂的公式。

第一章 数列高次方和的公式

一、n^k 三角形

1. $n^1=1!\ C_n^1$

$n^2=2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

$n^3=3!\ C_{n+2}^3-(1+2)\cdot2!\ C_{n+1}^2+C_n^1$

$n^4=4!\ C_{n+3}^4-(3+3)\cdot3!\ C_{n+2}^3+(6+1)\cdot2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

$n^5=5!\ C_{n+4}^5-(4+6)\cdot4!\ C_{n+3}^4+(18+7)\cdot3!\ C_{n+2}^3-(14+1)\cdot2!\ C_{n+1}^2+C_n^1$

$n^6=6!\ C_{n+5}^6-(5+10)\cdot5!\ C_{n+4}^5+(40+25)\cdot4!\ C_{n+3}^4-(75+15)\cdot3!\ C_{n+2}^3+(30+1)\cdot2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

$n^7=7!\ C_{n+6}^7-(6+15)\cdot6!\ C_{n+5}^6+(75+65)\cdot5!\ C_{n+4}^5-350\cdot4!\ C_{n+3}^4+301\cdot3!\ C_{n+2}^3-63\cdot2!\ C_{n+1}^2+C_n^1$ ……①

依规则类推：$n^8,n^9,\cdots$

n 的取值为：1，2，3，…。

2. 当 $n=1$ 时有，

$1^1=1$

$1^2=2!\ \frac{(1+1)\cdot1}{2}-1=1$

$1^3=3!\ \dfrac{(1+2)\cdot(1+1)\cdot 1}{3!}-(1+2)\cdot 2!\ \dfrac{(1+1)\cdot 1}{2!}+1=1$

$1^4\ =4!\ \dfrac{(1+3)\cdot(1+2)\cdot(1+1)\cdot 1}{4!}-(3+3)\cdot 3!\ \dfrac{(1+2)\cdot(1+1)\cdot 1}{3!}$

$\quad+(6+1)\cdot 2!\ \dfrac{(1+1)\cdot 1}{2!}-1$

$\quad=1$

……

依规则类推。

3. 当 $n=2$ 时有，

$2^1=2$

$2^2=2!\ \dfrac{(2+1)\cdot 2}{2}-2=4$

$2^3=3!\ \dfrac{(2+2)\cdot(2+1)\cdot 2}{3!}-(1+2)\cdot 2!\ \dfrac{(2+1)\cdot 2}{2!}+2=8$

$2^4=4!\ \dfrac{(2+3)\cdot(2+2)\cdot(2+1)\cdot 2}{4!}-(3+3)\cdot 3!\ \dfrac{(2+2)\cdot(2+1)\cdot 2}{3!}$

$+(6+1)\cdot 2!\ \dfrac{(2+1)\cdot 2}{2!}-2=16$

依规则类推。

二、n^k 三角形变换

用杨辉公式进行变换，有如下三角形公式。

杨辉公式：$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$

$1+2+3+\cdots+n=1!\ C_{n+1}^2$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=3!\ C_{n+3}^4-(1+2)\cdot 2!\ C_{n+2}^3+C_{n+1}^2$

$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=4!\ C_{n+4}^5-(3+3)\cdot 3!\ C_{n+3}^4+(6+1)\cdot 2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=5!\ C_{n+5}^6-(4+6)\cdot 4!\ C_{n+4}^5+(18+7)\cdot 3!\ C_{n+3}^4-(14+1)\cdot 2!\ C_{n+2}^3$
$\qquad+C_{n+1}^2$

$1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6=6!\ C_{n+6}^7-(5+10)\cdot 5!\ C_{n+5}^6+(40+25)\cdot 4!\ C_{n+4}^5-(75+15)\cdot 3!$
$\qquad C_{n+3}^4+(30+1)\cdot 2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

$1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7=7!\ C_{n+7}^8-21\cdot 6!\ C_{n+6}^7+140\cdot 5!\ C_{n+5}^6-350\cdot 4!\ C_{n+4}^5+301\cdot 3!\ C_{n+3}^4$
$\qquad-63\cdot 2!\ C_{n+2}^3+C_{n+1}^2$ ……②

依规则类推。

这种变换给计算带来很大方便，省略了很多公式。

三、通项式方程

$a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_2n^2+a_1n+a_0$ ……③

求数列通项式时，可以用通项式方程式，试建立方程组，进行求解。

有了上述三个公式，建立以 n 为底数的数列方程，找出数列的通项式，其合式也就迎刃而解，具体见下文。

第二章　n^k 三角形公式及其变换公式

一、n^k 三角形公式的证明

把 n 的各次方，分解成如下的形式，并且改用组合表示。

1. $n = C_1^1$

2. $n^2 = n^2 + n - n$

$= (n+1)\cdot n - n$

$n^2 = 2!\ C_{n+1}^2 - C_n^1$

3. $n^3 = (n+2)\cdot(n+1)\cdot n - 3n^2 - 2n$

$= n^3 + 3n^2 + 2n - 3n^2 - 2n$

$= (n+2)\cdot(n+1)\cdot n - 3(n+1)\cdot n + n$

$n^3 = 3!\ C_{n+2}^3 - 3\cdot 2!\ C_{n+1}^2 + C_n^1$

4. $n^4 = (n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n - 6n^3 - 11n^2 - 6n$

$= (n^4 + 5n^3 + 6n^2 + n^3 + 5n^2 + 6n) - 6n^3 - 11n^2 - 6n$

$= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n - 6n^3 - 11n^2 - 6n$

$= (n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n - 6[3!\ C_{n+2}^3 - 3\cdot 2!\ C_{n+1}^2 + C_n^1] - 11[2!\ C_{n+1}^2 - C_n^1] - 6C_n^1$

$n^4 = 4!\ C_{n+3}^4 - 6\cdot 3!\ C_{n+2}^3 + 6\cdot 3\cdot 2!\ C_{n+1}^2 - 6C_n^1 - 11\cdot 2!\ C_{n+1}^2 + 11C_n^1 - 6C_n^1$

$n^4 = 4!\ C_{n+3}^4 - 6\cdot 3!\ C_{n+2}^3 + 7\cdot 2!\ C_{n+1}^2 - C_n^1$

5. $n^5 = (n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n - 10n^4 - 35n^3 - 50n^2 - 24n$

$= (n^4 + 7n^3 + 12n^2 + 3n^3 + 21n^2 + 36n + 2n^2 + 14n + 24)\cdot n - 10n^4 - 35n^3 - 50n^2 - 24n$

$= n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 24n - 10n^4 - 35n^3 - 50n^2 - 24n$

$= (n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n - 10\cdot(4!\ C_{n+3}^4 - 6\cdot 3!\ C_{n+2}^3 + 7\cdot 2!\ C_{n+1}^2 - C_n^1) - 35\cdot(3!\ C_{n+2}^3 - 3\cdot 2!\ C_{n+1}^2 + C_n^1) - 50\cdot(2!\ C_{n+1}^2 - C_n^1) - 24C_n^1$

$= 5!\ C_{n+4}^5 - 10\cdot 4!\ C_{n+3}^4 + 60\cdot 3!\ C_{n+2}^3 - 70\cdot 2!\ C_{n+1}^2 + 10C_n^1 - 35\cdot 3!\ C_{n+2}^3 + 105\cdot 2!\ C_{n+1}^2 - 35C_n^1 - 50\cdot 2!\ C_{n+1}^2 + 50C_n^1 - 24C_n^1$

$n^5 = 5!\ C_{n+4}^5 - 10\cdot 4!\ C_{n+3}^4 + 25\cdot 3!\ C_{n+2}^3 - 15\cdot 2!\ C_{n+1}^2 + C_n^1$

以上是分解到 n^5 的情况，下面对 n^6 等开始推测。

6. $n^6 = 6!\ C_{n+5}^6 - (5+10)\cdot 5!\ C_{n+4}^5 + (40+25)\cdot 4!\ C_{n+3}^4 - (75+15)\cdot 3!\ C_{n+2}^3 + (30+1)\cdot 2!\ C_{n+1}^2 - C_n^1$

验证：

$$n^6 = 6!\ \frac{(n+5)\cdot(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)n}{6!} -$$

$$15\cdot 5!\ \frac{(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)n}{5!} +$$

$$65\cdot 4!\ \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{4!} -$$

$$90\cdot 3!\ \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{3!}+$$

$$31\cdot 2!\ \frac{(n+1)\cdot n}{2!}-n$$

$$\begin{aligned}
n^6 &= (n+5)\cdot\cdots\cdot(n+1)\cdot n-15(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n \\
&\quad +65\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n \\
&\quad -90(n+2)\cdot(n+1)\cdot n \\
&\quad +31(n+1)\cdot n-n \\
&=(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot[n+5-15]+(n+2)\cdot(n+1)\cdot n[65(n+3) \\
&\quad -90]+n[31n+31-1] \\
&=(n+2)\cdot(n+1)\cdot n[(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n-10)+65n+195-90]+31n^2+30n \\
&=(n^3+3n^2+2n)\cdot[(n^2+7n+12)\cdot(n-10)+65n+105]+31n^2+30n \\
&=(n^3+3n^2+2n)\cdot[n^3+7n^2+12n-10n^2-70n-120+65n+105]+31n^2+30n \\
&=(n^3+3n^2+2n)\cdot[n^3-3n^2+7n-15]+31n^2+30n \\
&=\left\{\begin{array}{l} n^6+3n^5+2n^4 \\ \quad -3n^5-9n^4-6n^3 \\ \quad\quad +7n^4+21n^3+14n^2 \\ \quad\quad\quad -15n^3-45n^2-30n \end{array}\right\}+31n^2+30n \\
&=n^6+0+0+0-31n^2-30n+31n^2+30n
\end{aligned}$$

$n^6=n^6$

证毕。

通过推理，$n^7,n^8,\cdots$，都可以用组合式表示出来。从而得出“n^k 三角形”组合公式：

$n^1=1!\ C_n^1$

$n^2=2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

$n^3=3!\ C_{n+2}^3-(1+2)\cdot 2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

$n^4=4!\ C_{n+3}^4-(3+3)\cdot 3!\ C_{n+2}^3+(6+1)\cdot 2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

$n^5=5!\ C_{n+4}^5-(4+6)\cdot 4!\ C_{n+3}^4+(18+7)\cdot 3!\ C_{n+2}^3-(14+1)\cdot 2!\ C_{n+1}^2+C_n^1$

$n^6=6!\ C_{n+5}^6-(5+10)\cdot 5!\ C_{n+4}^5+(40+25)\cdot 4!\ C_{n+3}^4-(75+15)\cdot 3!\ C_{n+2}^3+(30+1)\cdot 2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

$n^7=7!\ C_{n+6}^7-(6+15)\cdot 6!\ C_{n+5}^6+(75+65)\cdot 5!\ C_{n+4}^5-(260+90)\cdot 4!\ C_{n+3}^4+(270+31)\cdot 3!\ C_{n+2}^3-(62+1)\cdot 2!\ C_{n+1}^2+C_n^1$

依规则类推。

n 的取值为：1,2,3,…。

二、n^k 三角形组合系数的填写

通过 $n^1,n^2,n^3,\cdots$，分解的组合表达公式①可以看出：

1. 首项系数为 $1!,2!,3!,4!,5!,6!,7!,\cdots,n!$；

2. 第一项系数为正值，第二项系数为负值，如此排列下去(写成$(-1)^{n-1}$)；

3. 每项系数的具体数值为：

3 次方系数：2 + 1

4 次方系数：$\begin{cases}6=3+3\\7=3\times2+1\end{cases}$

5 次方系数：$\begin{cases}10=4+6\\25=3\times6+7\\15=2\times7+1\end{cases}$

6 次方系数：$\begin{cases}15=5+10\\65=10\times4+25\\90=25\times3+15\\31=15\times2+1\end{cases}$

7 次方系数：$\begin{cases}21=6+15\\140=15\times5+65\\350=65\times4+90\\301=90\times3+31\\63=31\times2+1\end{cases}$

按公式①的系数，依此填写。

三、求自然数列之和

数列：$1,2,3,\cdots,n$

其合式：$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$

首先把自然数列，分成如下两个数列形式：

数列合式：$S_{n-1}=1+2+3+\cdots+(n-1)$

$$S_n=1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

所以，$S_n-S_{n-1}=n$

其合式 S_n,S_{n-1}又可以写成如下形式：$S_n=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}=C_{n+1}^2$

$$S_{n-1}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}=C_n^2$$

根据杨辉公式有：$C_{n+1}^2=C_n^2+C_n^1$

$$C_{n+1}^2-C_n^2=C_n^1$$

所以，$S_n=1+2+3+\cdots+C_n^1=C_{n+1}^2$

$$S_{n-1}=1+2+3+\cdots+C_{n-1}^1=C_n^2$$

从而得出自然数列其合式公式：$S_n=1+2+3+\cdots+C_n^1=C_{n+1}^2$

这就是公式④的组合表达形式。

用数学归纳法验证公式④。

$S_n=1+2+3+\cdots+C_n^1=C_{n+1}^2$

1. 当 $n=1$ 时有：$1=1$

2. 当 $n=n$ 时有：$1+2+3+\cdots+C_n^1=C_{n+1}^2$

3. 当 $n=n+1$ 时有：$1+2+3+\cdots+C_n^1+C_{n+1}^2=C_{n+1}^2+C_{n+1}^1+C_{n+2}^2=C_{(n+1)+1}^2$

证毕。

四、求自然数平方的数列之和

数列：$1^2,2^2,3^2,4^2,\cdots,n^2$

其合式：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot\frac{[2(n+1)-1]}{3}$

把数列分成如下两个数列形式：

其合式：$S_{n-1}=1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2$

$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2$

所以，$S_n-S_{n-1}=n^2$

根据公式①：$n^2=2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

根据杨辉公式有：$C_{n+2}^3-C_{n+1}^3=C_{n+1}^2$

$C_{n+1}^2-C_n^2=C_n^1$

所以，$2!\ [C_{n+2}^3-C_{n+1}^3]-[C_{n+1}^2-C_n^2]=2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

$[2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2]-[2!\ C_{n+1}^3-C_n^2]=2!\ C_{n+1}^2-C_n^1$

所以，$S_n=2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

$S_{n-1}=2!\ C_{n+1}^3-C_n^2$

从而有数列其合式：$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+[2!\ C_{n+1}^2-C_n^1]=2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

用数学归纳法验证：

1. 当 $n=1$ 时，$1=1$

2. 当 $n=n$ 时，$1^2+2^2+3^2+\cdots+[2!\ C_{n+1}^2-C_n^1]=2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

3. 当 $n=n+1$ 时，$1^2+2^2+3^2+\cdots+[2!\ C_{n+1}^2-C_n^1]+(n+1)^2$

$=2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2+(n+1)^2$

$=2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2+[2!\ C_{(n+1)+1}^2-C_{(n+1)}^1]$

$=2!\ [C_{n+2}^3+C_{(n+1)+1}^2]-[C_{n+1}^2+C_{(n+1)}^1]$

$=2!\ C_{n+3}^3-C_{n+2}^2$

$=2!\ C_{(n+1)+2}^3-C_{(n+1)+1}^2$

证毕。

五、求自然数立方的数列之和

数列：$1^3,2^3,3^3,\cdots,n^3$

其合式：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\frac{(n+1)\cdot n}{2}]^2$

把数列分成如下两个数列形式：

其合式：$S_{n-1}=1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3$

$S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3$

所以，$S_n-S_{n-1}=n^3$

根据公式①有：$S_n-S_{n-1}=3!\ C_{n+2}^3-3\cdot2!\ C_{n+1}^2+C_n^1$

根据杨辉公式有：$C_{n+3}^4-C_{n+2}^4=C_{n+2}^3$

$C_{n+2}^3-C_{n+1}^3=C_{n+1}^2$

$C_{n+1}^2-C_n^2=C_n^1$

所以，$3!\ [C_{n+3}^4-C_{n+2}^4]-3\cdot2!\ [C_{n+2}^3-C_{n+1}^3]+[C_{n+1}^2-C_n^2]$

$=3!\ C_{n+2}^{3}-3\cdot 2!\ C_{n+1}^{2}+C_{n}^{1}$

$[3!\ C_{n+3}^{4}-3\cdot 2!\ C_{n+2}^{3}+C_{n+1}^{2}]-[3!\ C_{n+2}^{4}-3\cdot 2!\ C_{n+1}^{3}+C_{n}^{2}]$

$=3!\ C_{n+2}^{3}-3\cdot 2!\ C_{n+1}^{2}+C_{n}^{1}$

所以，$S_n=3!\ C_{n+3}^{4}-3\cdot 2!\ C_{n+2}^{3}+C_{n+1}^{2}$

$S_{n-1}=3!\ C_{n+2}^{4}-3\cdot 2!\ C_{n+1}^{3}+C_{n}^{2}$

从而有其合式：$S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+[3!\ C_{n+2}^{3}-3\cdot 2!\ C_{n+1}^{2}+C_{n}^{1}]$

$=[3!\ C_{n+3}^{4}-3\cdot 2!\ C_{n+2}^{3}+C_{n+1}^{2}]$

验证：

1. 当 $n=1$ 时，$1=1$

2. 当 $n=n$ 时，$1^3+2^3+3^3+\cdots+[3!\ C_{n+2}^{3}-3\cdot 2!\ C_{n+1}^{2}+C_{n}^{1}]$

$=[3!\ C_{n+3}^{4}-3\cdot 2!\ C_{n+2}^{3}+C_{n+1}^{2}]$

3. 当 $n=n+1$ 时，

$1^3+2^3+3^3+\cdots+[3!\ C_{n+2}^{3}-3\cdot 2!\ C_{n+1}^{2}+C_{n}^{1}]+(n+1)^3$

$=[3!\ C_{n+3}^{4}-3\cdot 2!\ C_{n+2}^{3}+C_{n+1}^{2}]+(n+1)^3$

$=[3!\ C_{n+3}^{4}-3\cdot 2!\ C_{n+2}^{3}+C_{n+1}^{2}]+[3!\ C_{(n+1)+2}^{3}-3\cdot 2!\ C_{(n+1)+1}^{2}+C_{n+1}^{1}]$

$=3!\ [C_{n+3}^{4}+C_{n+3}^{3}]-3\cdot 2!\ [C_{n+2}^{3}+C_{n+2}^{2}]+[C_{n+1}^{2}+C_{(n+1)}^{1}]$

$=3!\ C_{n+4}^{4}-3\cdot 2!\ C_{n+3}^{3}+C_{n+2}^{2}$

$=3!\ C_{(n+1)+3}^{4}-3\cdot 2!\ C_{(n+1)+2}^{3}+C_{(n+1)+1}^{2}$

证毕。

六、求自然数4次方的数列之和

数列：$1^4,2^4,3^4,\cdots,n^4$

其合式：$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot\dfrac{2(n+1)-1}{3}\cdot\dfrac{3(n+1)\cdot n-1}{5}$

把数列分成如下两个数列形式：

其合式：$S_{n-1}=1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4$

$S_n=1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4+n^4$

所以，$S_n-S_{n-1}=n^4$

根据公式①有：$n^4=4!\ C_{n+3}^{4}-6\cdot 3!\ C_{n+2}^{3}+7\cdot 2!\ C_{n+1}^{2}-C_{n}^{1}$

根据杨辉公式有：$C_{n+4}^{5}-C_{n+3}^{5}=C_{n+3}^{4}$

$C_{n+3}^{4}-C_{n+2}^{4}=C_{n+2}^{3}$

$C_{n+2}^{3}-C_{n+1}^{3}=C_{n+1}^{2}$

$C_{n+1}^{2}-C_{n}^{2}=C_{n}^{1}$

所以，$4!\ [C_{n+4}^{5}-C_{n+3}^{5}]-6\cdot 3!\ [C_{n+3}^{4}-C_{n+2}^{4}]+7\cdot 2!\ [C_{n+2}^{3}-C_{n+1}^{3}]-[C_{n+1}^{2}-C_{n}^{2}]$

$=4!\ C_{n+3}^{4}-6\cdot 3!\ C_{n+2}^{3}+7\cdot 2!\ C_{n+1}^{2}-C_{n}^{1}$

$[4!\ C_{n+4}^{5}-6\cdot 3!\ C_{n+3}^{4}+7\cdot 2!\ C_{n+2}^{3}-C_{n+1}^{2}]-[4!\ C_{n+3}^{5}-6\cdot 3!\ C_{n+2}^{4}+7\cdot 2!\ C_{n+1}^{3}-C_{n}^{2}]$

$=4!\ C_{n+3}^{4}-6\cdot 3!\ C_{n+2}^{3}+7\cdot 2!\ C_{n+1}^{2}-C_{n}^{1}$

所以，$S_n=4!\ C_{n+4}^5-6\cdot3!\ C_{n+3}^4+7\cdot2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

$S_{n-1}=4!\ C_{n+3}^5-6\cdot3!\ C_{n+2}^4+7\cdot2!\ C_{n+1}^3-C_n^2$

从而有其合式：$S_n=1^4+2^4+3^4+\cdots+[4!\ C_{n+3}^4-6\cdot3!\ C_{n+2}^3+7\cdot2!\ C_{n+1}^2-C_n^1]$

$=4!\ C_{n+4}^5-6\cdot3!\ C_{n+3}^4+7\cdot2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

验证：

1. 当 $n=1$ 时，$1=1$

2. 当 $n=n$ 时，$1^4+2^4+3^4+\cdots+[4!\ C_{n+3}^4-6\cdot3!\ C_{n+2}^3+7\cdot2!\ C_{n+1}^2-C_n^1]$

$=4!\ C_{n+4}^5-6\cdot3!\ C_{n+3}^4+7\cdot2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

3. 当 $n=n+1$ 时，

$1^4+2^4+3^4+\cdots+[4!\ C_{n+3}^4-6\cdot3!\ C_{n+2}^3+7\cdot2!\ C_{n+1}^2-C_n^1]+(n+1)^4$

$=[4!\ C_{n+4}^5-6\cdot3!\ C_{n+3}^4+7\cdot2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2]+[4!\ C_{(n+1)+3}^4-6\cdot3!\ C_{(n+1)+2}^3+7\cdot2!\ C_{(n+1)+1}^2-C_{(n+1)}^1]$

$=4!\ [C_{n+4}^5+C_{(n+1)+3}^4]-6\cdot3!\ [C_{n+3}^4-C_{(n+1)+2}^3]+7\cdot2!\ [C_{n+2}^3+C_{(n+1)+1}^2]-[C_{n+1}^2+C_{(n+1)}^1]$

$=4!\ C_{n+5}^5-6\cdot3!\ C_{n+4}^4+7\cdot2!\ C_{n+3}^3-C_{n+2}^2$

$=4!\ C_{(n+1)+4}^5-6\cdot3!\ C_{(n+1)+3}^4+7\cdot2!\ C_{(n+1)+2}^3-C_{(n+1)+1}^2$

证毕。

依此类推有：

$S_n=1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=[\frac{(n+1)n}{2}]^2\cdot[\frac{2(n+1)n-1}{3}]$

$S_n=1^5+2^5+3^5+\cdots+[5!\ C_{n+4}^5-10\cdot4!\ C_{n+3}^4+25\cdot3!\ C_{n+2}^3-15\cdot2!\ C_{n+1}^2+C_n^1]$

$=5!\ C_{n+5}^6-10\cdot4!\ C_{n+4}^5+25\cdot3!\ C_{n+3}^4-15\cdot2!\ C_{n+2}^3+C_{n+1}^2$

$S_n=1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6$

$S_n=1^6+2^6+3^6+\cdots+[6!\ C_{n+5}^6-15\cdot5!\ C_{n+4}^5+65\cdot4!\ C_{n+3}^4-90\cdot3!\ C_{n+2}^3+31\cdot2!\ C_{n+1}^2-C_n^1]$

$=[6!\ C_{n+6}^7-15\cdot5!\ C_{n+5}^6+65\cdot4!\ C_{n+4}^5-90\cdot3!\ C_{n+3}^4+31\cdot2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2]$

$S_n=1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7$

$S_n=1^7+2^7+3^7+\cdots+[7!\ C_{n+6}^7-21\cdot6!\ C_{n+5}^6+140\cdot5!\ C_{n+4}^5-350\cdot4!\ C_{n+3}^4+301\cdot3!\ C_{n+2}^3-63\cdot2!\ C_{n+1}^2+C_n^1]$

$S_n=7!\ C_{n+7}^8-21\cdot6!\ C_{n+6}^7+140\cdot5!\ C_{n+5}^6-350\cdot4!\ C_{n+4}^5+301\cdot3!\ C_{n+3}^4-63\cdot2!\ C_{n+2}^3+C_{n+1}^2$

七、n^k 三角形的变换公式

通过“n^k 三角形”公式①和杨辉公式，可以求解出自然数列之和，求解出自然数平方数列之和，求解出自然数立方数列之和，求解出自然数 4 次方数列之和……从而可以归纳出“n^k 三角形变换”公式②。在下面的演算中，进一步用数学归纳法验证。

$1+2+3+\cdots+n=1!\ C_{n+1}^2$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=3!\ C_{n+3}^4-(2+1)\cdot 2!\ C_{n+2}^3+C_{n+1}^2$

$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=4!\ C_{n+4}^5-(3+3)\cdot 3!\ C_{n+3}^4+(6+1)\cdot 2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=5!\ C_{n+5}^6-(4+6)\cdot 4!\ C_{n+4}^5+(18+7)\cdot 3!\ C_{n+3}^4-15\cdot 2!\ C_{n+2}^3+C_{n+1}^2$

$1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6=6!\ C_{n+6}^7-(5+10)\cdot 5!\ C_{n+5}^6+(40+25)\cdot 4!\ C_{n+4}^5-90\cdot 3!\ C_{n+3}^4+$
$(30+1)\cdot 2!\ C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$

依规则类推。

从公式②可以看出，其数列的合式与“n^k 三角形”，唯一不同的地方是各相应的组合按杨辉公式升位：$C_n^1\to C_{n+1}^2$，$C_{n+1}^2\to C_{n+2}^3$，$C_{n+2}^3\to C_{n+3}^4$，$C_{n+3}^4\to C_{n+4}^5$，…，其他都相同，这给数列的推导、计算和记忆带来了很大的方便。

用数学归纳法验证公式的比对和递归子系列的推导，都可以看出，公式①和公式②比传统公式更简捷方便。

1. 自然数数列

数列其合式：$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$

(1)当 $n=1$ 时，$1=1$

(2)当 $n=n$ 时，$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$

(3)当 $n=(n+1)$时，$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}+(n+1)$

$$=\frac{(n+1)\cdot n}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}=\frac{[(n+1)+1](n+1)}{2}$$

证毕。

组合形式数列其合式：$1+2+3+\cdots+C_n^1=C_{n+1}^2$

当 $n=n+1$ 时有，$1+2+3+\cdots+C_n^1+(n+1)=C_{n+1}^2+(n+1)$

$$=C_{n+1}^2+C_{n+1}^1$$
$$=C_{n+2}^2$$
$$=C_{(n+1)+1}^2\cdot C_{(n+1)+1}^2$$
$$=\frac{[(n+1)+1]\cdot(n+1)}{2}$$

数列两种表示形式不同，运算不同，但其结果是相同的。

2. 自然数列的递归子系列

(1)$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}=\dfrac{1}{6}(n+2)\cdot(n+1)\cdot n$

(2)$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\dfrac{1}{6}(n+2)\cdot(n+1)\cdot n$

$$=\frac{1}{24}(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n$$

(3)$1+5+15+\cdots+\dfrac{1}{24}(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n$

$$=\frac{1}{120}(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n$$

(4)$1+6+21+\cdots+\dfrac{1}{120}(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n$

$$=\frac{1}{720}(n+5)\cdot(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n$$

数学上把这些自然数数列的递归子系列都称为公式，因为都是经过复杂运算得出来的结果，如果用组合公式①和公式②表示，很快就可以得出答案。

(1)式中的$\frac{(n+1)\cdot n}{2}=\frac{1}{2}(n^2+n)$

$$=\frac{1}{2}[(2!\ C_{n+1}^2-C_n^1)+C_n^1]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2!\ C_{n+1}^2$$

$$=C_{n+1}^2$$

所以，$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+C_{n+1}^2=C_{n+2}^3$

(2)式中的$\frac{1}{6}(n+2)\cdot(n+1)\cdot n$

$$=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)$$

$$=\frac{1}{6}[(3!\ C_{n+2}^3-3\cdot 2!\ C_{n+1}^2+C_n^1)+3\cdot(2!\ C_{n+1}^2-C_n^1)+2n]$$

$$=\frac{1}{6}[3!\ C_{n+2}^3-3\cdot 2!\ C_{n+1}^2+C_n^1+3\cdot 2!\ C_{n+1}^2-3C_n^1+2C_n^1]$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 3!\ C_{n+2}^3$$

$$=C_{n+2}^3$$

所以，$1+4+10+\cdots+C_{n+2}^3=C_{n+3}^4$

依此类推有：

(3)式为：$1+5+15+\cdots+C_{n+3}^4=C_{n+4}^5$

(4)式为：$1+6+21+\cdots+C_{n+4}^5=C_{n+5}^6$

$$C_{n+5}^6=\frac{(n+5)\cdot(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{6!}$$

3. 平方数列

数列其合式：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot[\frac{2(n+1)-1}{3}]$

(1)当 $n=1,1=1$

(2)当 $n=n,1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot[\frac{2(n+1)-1}{3}]$

(3)当 $n=n+1$ ，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2$

$$=\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot[\frac{2(n+1)-1}{3}]+(n+1)^2$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\cdot[\frac{n(2n+1)}{3}+\frac{6(n+1)}{3}]$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\cdot[\frac{2n^2+n+6n+6}{3}]$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\cdot[\frac{2n^2+4n+3n+6}{3}]$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\cdot[\frac{(n+2)\cdot(2n+3)}{3}]$$