中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

複變函數引論

上册

И. И. ПРИВАЛОВ 著

北京大學數學力學系數學分析與函數論教研室譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

複 變 函 數 引 論

冊

И. И. 普 里 瓦 洛 夫 著
北京大學數學力學系數學分析與函數論教研室譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的伊·伊·普里瓦洛夫（И. И. Привалов）著"複變函數引論"（Введение в теорию Функции комплексного переменого）1948年第八版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合大學與師範學院物理一數學系教科書。

本書中譯本分上下兩册出版。上册內容包括複數、複變數與複變函數、線性變換與其他簡單變換、哥西定理、哥西積分、解析函數項級數、解析函數的冪級數展開式等。

本書由北京大學數學力學系數學分析與函數論教研室集體翻譯。

複　變　函　數　引　論

上　册

北京大學數學力學系數學分析與函數論教研室譯

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

新華書店華東總分店　總經售

上海南京西路一號

蔚　文　印　刷　廠　印　刷

（53211A）

1953年8月初版　1954年1月再版

版面字數 195,000　印數 3,501—5,500

定價￥11,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

第六版序

插入單獨一章，第十一章，來對橢圓函數的初等理論作專題敍述，是這一版與以前各版的主要區別。

伊·普里瓦洛夫。

第五版序

在這一版裏，我的書“複變函數引論”對前一版的正文有了部分的修改與補充。在這個工作中，接受了阿·伊·馬爾古謝維奇的幫忙，我對他表示深刻的謝意。

伊·普里瓦洛夫。

上册目錄

第一章 複 數

第二章 複變數與複變函數

第三章 線性變換與其他的簡單變換

第四章　哥西定理、哥西積分

第五章 解析函數項級數、解析函數的冪級數展開式

複變函數引論

引　論

那些在數學中必須考慮的運算可以分為兩類：正的運算與逆的運算。例如，對應於加法運算的逆運算是減法，對應於乘法的是除法，對應於正整數次乘方的就是開方。

對兩個任意的正整數施行加法運算，結果我們總還是得到正整數；換句話說，從自然數系出發，通過正運算加法，我們不會超出這個系的範圍。但逆運算——減法——就把我們引出了自然數系的範圍之外，並且只有在把零與負整數合併到自然數系之後，這個逆運算的施行才成為永遠可能。第二個逆運算——除法——，為了它自己的能够施行，就要求一個更廣泛的數的概念，這個更廣泛的概念是藉助於分數的引進才完成的。全部整數與分數合稱為有理數，這個有理數系，對於加法、減法、乘法與除法等前面四個代數基本運算來說，是封閉的，也就是說，對任意兩個有理數（除了用零除以外）施行這些運算中的任何一個時，結果得到的將依舊是這個系中的元素——有理數。最後，逆運算——開方——甚至在最簡單的二次根的情形，就一方面給我們以非有理實數的例子，即所謂無理數，而另一方面給我們以 $y\sqrt{-1}$ 形式的數，其中 y 表示實數。$y\sqrt{-1}$ 形式的數，其中 y 是任意一個不等於零的實數，稱為**純虛數**。

從以上所提到的這些例子就已經可以看出，逆運算使我們感到數

的概念有逐漸擴充的必要。假如我們現在來看比開平方根還更較複雜一些的逆運算——解 $ax^2+bx+c=0$ 形式的二次方程，其中 a, b 與 c 都是實數，那末我們就會看到，它的根將是 $x+y\sqrt{-1}$ 形式的數，其中 x 與 y 都表示實數。這樣的數稱爲**複數**。當 $y=0$ 時複數退化成實數，而當 $x=0, y\neq 0$ 時它就成爲純虛數。複數的全體，包含了全部實數，是一個對於所有的數學運算來說都封閉的數域。例如，在代數學中大家都知道，任一個複係數的 n 次方程的根就全都是複數。在複數域中能够施行所有的數學運算而使運算結果不至於超出這個數域的範圍，這一點，在極大的程度上說明了這種數在數學中所具有的巨大的意義。

在本書中我們將研究複變數 $z=x+y\sqrt{-1}$ 的函數的性質，其中 x 與 y 都是獨立實變數。複變函數有它自己的很多的應用，一方面是在各種實用數學課目上，如理論物理、流體動力學、彈性理論、天體力學等，另一方面也在純粹數學的各個部門上如代數、解析數論、微分方程等。除此而外，複變函數理論是一種異常諧合一致而且具有完整的邏輯系統的理論建築，通曉這個理論中的一些基本問題，無疑地，必須是數學教育的內容之一。

爲了指出複變函數的方法的力量，我現在只來提起在純粹數學範圍內藉助於這種方法而做成的某些巨大成果：質數分佈方面的最困難的問題就建立在與某一個複變函數的零點的分佈的關係上；關於任意一個正整數表爲有限個數的任意次方之和的瓦𪊲問題也是在複變函數的方法的基礎上解決的；天體力學方面最困難的問題，所謂“三體”問題，其一般形式也還是由於吸取了複變分析的方法而解決的。最後我們還可以從讀者所熟知的一些基本數學部門中舉出許多例子來說明複變函數所具有的巨大意義與它的特殊作用。

以下僅限於少數幾個例子的敍述。例如關於每一個代數方程至少

有一個複數根的命題是代數學的基本定理。其次，複數在有理函數的積分與常係數線性微分方程求解的問題中所具有的意義，在積分學中，也是衆所熟知的。我們還必須指出，許多古典分析的問題，只是由於複變分析的出現才得到了明確的形式並找到了完全的解答。例如，大家所知道的尤拉恆等式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 就曾經用來揭破如下所述的貝路利與萊伯尼茲的詭論：

由於

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

我們把分式 $\frac{1}{1+x^2}$ 分解爲部分分式[1])

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right),$$

積分後，就求出：

$$\operatorname{arctg} x=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-x}{i+x}.$$

令 $x=1$，我們得到

$$\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-1}{i+1}=\frac{1}{4i}\ln\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2=\frac{1}{4i}\ln(-1)=$$

$$=\frac{1}{8i}\ln(-1)^2=\frac{1}{8i}\ln 1=0,\ \text{這就是說}\ \frac{\pi}{4}=0$$

尤拉指出了指數函數 e^z 的週期性之後就揭破了這個詭論。事實上，用 $-iz$ 來代替尤拉恆等式中的 x，我們得到

$$e^z=\cos(-iz)+i\sin(-iz)=\cos iz-i\sin iz. \tag{1}$$

在這個等式中用 $z+2\pi i$ 代替 z，我們就有

---

1) 以後我們總用記號 i 表示 $\sqrt{-1}$。

$$e^{z+2\pi i}=\cos(iz-2\pi)-i\sin(iz-2\pi)=\cos iz-i\sin iz=e^{z}\ ^{1)},$$

也就是說，當我們用 $z+2\pi i$ 代替 z 時，函數 e^z 不改變它的數值，換句話說，$2\pi i$ 是這個函數的週期。因此，從等式 $e^z=w$ 所確定的自然對數 $z=\ln w$，對應於一個確定的 w 的值，由於 e^z 的週期性，就有無窮多個不同的數值，其中每兩個值彼此相差一個 $2\pi i$ 的倍數。當 $w>0$ 時，$z=\ln w$ 有一個數值是實數，所有其他的數值全是虛數。$w<0$ 時，則 $z=\ln w$ 的數值，無例外地，全是虛數。所以，對數函數是多值的，假如我們取 $\ln 1=2\pi i$，詭論就無從立脚了。

尤拉恆等式揭露出三角函數與指數函數之間的關係，另外，如果在公式(1)中用 $-z$ 代替 z，我們有

$$e^{-z}=\cos iz+i\sin iz. \qquad (2)$$

對恆等式(1)與(2)施用加法與減法，我們就得到

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\cos iz, \qquad \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=-i\sin iz,$$

這些公式給出了雙曲線正弦函數與雙曲線餘弦函數通過三角函數的表達式，而這樣一來，從普通三角函數的公式出發就可以得到全部的雙曲線三角函數的公式。

我們還要從冪級數的理論中來指出一個事實，它的完全的解釋只有從複變函數的觀點才能給出來。在分析中大家都知道：展開式

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

只有當 x 的值滿足不等式 $|x|<1$ 時才成立。如果我們限制在實變數 x 的範圍，我們就沒有可能去發現原來函數的性質以及它的級數却祇有在 x 的值適合條件 $-1<x<+1$ 時才收斂這一事實之間的關係。因

1) 這裏我們利用了複變數的正弦函數與餘弦函數的週期性。這將在第 II 章，§4 第 7 段中證明。

爲事實上，函數 $\frac{1}{1+x^2}$ 對於從 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的區間內的任何 x 的值都是確定的，而且自變數的值 -1 與 $+1$ 對於它又並非是什麼特別的數值。因此我們不能了解爲什麼級數 $1-x^2+x^4-x^6+\cdots$ 當 x 的值滿足不等式：$x\leqslant-1$ 與 $x\geqslant+1$ 時就不再收歛。然而，如果在複數域中來考慮這個現象，那末它的情形就完全弄清楚了。實際上，分式 $\frac{1}{1+x^2}$ 的分母當 $x=\pm i$ 時爲零，從而自變數的這兩個值對於我們的函數來說是它的奇異值。當我們把複數 $\alpha=a+bi$ 表示爲以 a 與 b 爲坐標的平面上的點，則由於上面指出的兩個奇異點與坐標原點的距離等於一，我們可以斷定：給定的函數在以坐標原點爲中心，以一爲半徑的圓的內部沒有奇異點，而在它的圓周上却有奇異點。這種情況，我們將在正文中加以證明，就決定了給定的級數當 x 的值的模大於 1 時的發散性。

最後關於本教程的計劃有幾句話。在頭幾章裏我們將研究一些在實數分析中已知的基本概念與運算在複數域中的推廣，例如極限、導數、積分等；這樣一來，類似於實數域中的情形，我們將建立一系列研究複變函數的分析工具。在這個基礎有了之後，我們才來搞清楚所謂解析函數的一類可導的複變函數的基本性質，也就是說，我們來闡明這類函數的理論的最重要部分。

第一章 複　數

§1. 複數及其運算

1. 複數概念 具有一定順序的一對實數 a 與 b 叫做一個複數 α: $\alpha=(a,b)$。假如 $b=0$, 我們可以把這相應的一對簡記作 a, 就是說規定$(a,0)=a$。所以,全部實數是全部複數的一部分。在作爲一對實數引進了複數的概念之後,我們來確定這些數的基本運算法則。

因爲全部實數是全部複數的一部分,所以,當建立複數的基本算術運算時,我們必須要求，對於實數應用這些運算所得到的數,跟在實數的算術中所得到的數相同。另一方面，如果我們希望在分析的問題中使得複數有廣泛的應用,我們還應當要求所引進的基本運算,能够適合實數算術中的一般公理。

2. 複數的加法與乘法 我們用下面的等式來確定複數 $\alpha=(a,b)$ 與 $\beta=(c,d)$ 的加法:

$$\alpha+\beta=(a+c,\ b+d). \tag{I}$$

應用這個定義到兩個實數 a 與 c 上,我們得到

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0)=a+c,$$

這表示對於加法來說,滿足了我們引進運算法則時的第一個要求。

我們用下面的等式來定義兩個複數 α 與 β 的乘法:

$$\alpha\beta=(ac-bd,\ ad+bc). \tag{II}$$

應用這個定義到兩個實數 a 與 c 上,便成爲

$$(a,0)(c,0)=(ac,0)=ac,$$

這表示乘法的運算與實數的算術沒有矛盾。利用定義 (I)與(II), 容易

驗明複數的加法運算與乘法運算遵循大家所知道的算術的五個法則:

1) 加法交換律: $\alpha+\beta=\beta+\alpha,$

2) 乘法交換律: $\alpha\beta=\beta\alpha,$

3) 加法結合律: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma,$

4) 乘法結合律: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma,$

5) 乘法對於加法的分配律: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$

我們建議讀者自己去檢驗所有這些法則在複數域中的正確性。

數對(0, 1)所代表的我們用字母 i 來表示的數,在複數的運算中起着特殊的作用。作這個實數對的平方,也就是它的自乘,我們從定義(II)得到:

$$(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1,$$

即 $i^2=-1$, 這就是我們起初採用記號 $i=\sqrt{-1}$ 的理由。注意到這一點,我們就可以把所有的複數寫成:

$$\alpha=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi,$$

就是說任何複數 $\alpha=(a,b)$ 都可以表示成實數 a 與純虛數 bi 之和的形式。

習慣上稱 a 爲複數 α 的實數部分,並且記作 $R(\alpha)$ (來自法文字 reelle),稱 b 爲 α 的虛數部分的係數,並記作 $I(\alpha)$ (來自法文字 imaginaire)。顯然,當 $I(\alpha)=0$ 時,複數 α 變成實數,當 $R(\alpha)=0$ 時,α 就變成純虛數。按照定義,兩個複數稱爲相等,是指它們的實數部分彼此相等同時虛數部分也彼此相等。

實數部分相同而虛數部分的符號相反的兩個複數稱爲是共軛的,記作

$$\alpha=a+bi,\qquad \bar{\alpha}=a-bi.$$

作爲等式 (II) 的特殊情形,我們指出兩個共軛複數的乘法定則:

$\alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2$。

在算術中任何數與它相加結果都不變的數稱爲加法的模，這個數就是數 0。同樣，數 1 是乘法的模，任何數與它相乘結果都不變。我們要指出，在複數域中，也存在着一個加法的模（數 0）與一個乘法的模（數 1）。

實際上，設 δ 是加法的模，那就是說

$$\alpha+\delta=\alpha, \tag{1}$$

其中 α 是任意一個複數。我們要證明這樣的數 δ 是存在的而且是唯一的。在等式(1)的兩邊加上一個數 $-\alpha=\alpha\cdot-1$, 我們就得到 $\delta=0$。

又令 ε 是乘法的模，就是說

$$\alpha\cdot\varepsilon=\alpha, \tag{2}$$

其中 $\alpha\neq0$。在等式(2)兩邊各乘以一個數 $\beta=\dfrac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$，我們就得到:

$$\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\alpha\bar{\alpha}\cdot\varepsilon=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\alpha\bar{\alpha}.$$

由於 $\alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2$, 由此就推出 $\varepsilon=1$。

根據定義(II)，假如兩個乘數中的一個是零，那末這兩個數的乘積也是零。逆命題也成立：假如兩個複數的乘積等於零，那末至少兩個因子中有一個是零。事實上，設 $\alpha\cdot\xi=0$, $\alpha\neq0$。在等式兩邊各乘以一個數 $\beta=\dfrac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$，我們就得到 $\xi=0$。

3. 複數的減法與除法 我們確定減法是加法的逆運算。按照這個定義，我們稱適合等式

$$\alpha+z=\beta \tag{3}$$

的 z 是複數 $\beta=c+di$ 與 $\alpha=a+bi$ 之差。

我們要指出：在複數域中應用減法運算的結果也是唯一的，事實上，在等式(3)的兩端加上數 $-\alpha$, 我們就得到

$$z=\beta+(-\alpha)=\beta-\alpha=c-a+(d-b)i.$$

最後，我們定義除法是乘法的逆運算。按照定義，我們了解符號 $\frac{1}{\alpha}$ $(\alpha\neq 0)$ 是滿足等式

$$\alpha\cdot z=1 \tag{4}$$

的數 z。

在等式(4)兩端各乘以數 $\frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$，就得到

$$z=\frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}.$$

我們用 $\frac{\beta}{\alpha}$ 來記複數 β 與 α 的商，規定

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\cdot\beta.$$

這樣，除了用零作除數以外，在複數域中除法也唯一地規定了。

跟等式(I)與(II)比較，等式

$$(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i,$$
$$(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$$

指出了：在兩個複數的和或積中，如果把加項或因子用它們的共軛數來代替，那末結果就得到原來的和或積的共軛數。由於減法與除法分別是加法與乘法的逆運算，同樣的結論對減法與除法也成立。因此，如果我們把每一個複數的共軛數對應於原來的複數，就得到一個把整個複數系變化到它自己的變換，而這個變換具有這樣的性質：假如把等式

$$\alpha+\beta=\gamma,\ \alpha-\beta=\gamma,\ \alpha\cdot\beta=\gamma,\ \frac{\beta}{\alpha}=\gamma$$

中的數用它們的像來代替，那末這些等式依舊成立。由此可知，如果把每一個複數用它的共軛數來代替，則關於複數的那些兩端包含着加、減、乘、除運算的方程依舊成立。