

矩阵分析

第二版

史荣昌 魏 丰 编著



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

0151.21
321

矩 阵 分 析

(第二版)

史荣昌 魏 丰 编著



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析(第二版). 史荣昌, 魏丰编著. —2 版. —北京: 北京理工大学出版社, 2005. 9(2006. 3 重印)

ISBN 7-81045-075-1

I. 矩… II. ①史…②魏… III. 矩阵分析-高等学校-教材
IV. TN701

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 19873 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

电子邮箱 / chiefeditor@bitpress.com.cn

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京地质印刷厂

开 本 / 850 毫米×1168 毫米 1/32

印 张 / 10.875

字 数 / 275 千字

版 次 / 2005 年 9 月第 2 版 2006 年 3 月第 8 次印刷

印 数 / 24001~29000 册

责任校对 / 郑兴玉

定 价 / 16.00 元

责任印制 / 刘京凤

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

本书是在 1989 年《矩阵分析》(王朝瑞、史荣昌编著,北京理工大学出版社),1995 年《矩阵分析》(史荣昌编著,北京理工大学出版社)的基础上,根据矩阵理论的基本内容,以及作者二十余年讲授的经验,并吸收了许多同仁的建议编写而成。

作者认为,一本合适的工学硕士、工程硕士研究生的教材,除了具备一定的理论深度、广度之外,行文应该深入浅出,简洁、易读,适于自学。与其余同类教科书相比,本书注意配备相当数量的例题、习题,使得读者易于理解、掌握基本理论的内容、方法。为了帮助学生自学及较顺利演算习题,作者还编写了与本书配套的《矩阵分析学习指导》一书,该书中有本书习题的全部解答。

本书与作者以往相同教材相比,除了增加例题、习题以外,还适当增加了部分内容,这是应许多读者要求而增加的,但是篇幅不多,风格特色没有改变。

本书适宜 50~60 学时教学之用。教师可以根据具体情况选用。某些章节内容用 * 标示,属较难部分。

在本书的编写过程中得到了华东理工大学谢国瑞教授、北京理工大学尤定华教授、吴惠彬副教授的帮助、指教,在此表示衷心的感谢。

本书难免有许多缺点、错误,望读者批评指正。

编著者

2005 年 6 月

目 录

第一章 线性空间和线性变换	(1)
§ 1.1 线性空间	(1)
§ 1.2 基与坐标、坐标变换	(7)
§ 1.3 线性子空间	(16)
§ 1.4 线性映射	(24)
§ 1.5 线性映射的值域、核	(33)
§ 1.6 线性变换的矩阵与线性变换的运算	(38)
§ 1.7 n 维线性空间的同构	(42)
§ 1.8 线性变换的特征值与特征向量	(45)
§ 1.9 线性变换的不变子空间	(54)
§ 1.10 矩阵的相似对角形	(59)
习题	(68)
第二章 λ -矩阵与矩阵的 Jordan 标准形	(72)
§ 2.1 λ -矩阵及标准形	(72)
§ 2.2 初等因子与相似条件	(85)
§ 2.3 矩阵的 Jordan 标准形	(95)
习题	(109)
第三章 内积空间、正规矩阵、Hermite 矩阵	(112)
§ 3.1 欧氏空间、酉空间	(112)
§ 3.2 标准正交基、Schmidt 方法	(120)
§ 3.3 酉变换、正交变换	(124)
§ 3.4 幂等矩阵、正交投影	(128)
§ 3.5 对称与反对称变换	(137)
§ 3.6 正规矩阵、Schur 引理	(139)
§ 3.7 Hermite 变换、正规变换	(153)

§ 3.8	Hermite 矩阵、Hermite 二次齐式	(157)
§ 3.9	正定二次齐式、正定 Hermite 矩阵	(161)
§ 3.10	Hermite 矩阵偶在复相合下的标准形	(169)
§ 3.11	Rayleigh 商	(175)
习题		(179)
第四章	矩阵分解	(183)
§ 4.1	矩阵的满秩分解	(183)
§ 4.2	矩阵的正交三角分解 (UR 、 QR 分解)	(186)
§ 4.3	矩阵的奇异值分解	(190)
§ 4.4	矩阵的极分解	(195)
§ 4.5	矩阵的谱分解	(198)
习题		(211)
第五章	范数、序列、级数	(213)
§ 5.1	向量范数	(213)
§ 5.2	矩阵范数	(217)
§ 5.3	诱导范数(算子范数)	(221)
§ 5.4	矩阵序列与极限	(227)
§ 5.5	矩阵幂级数	(232)
§ 5.6	矩阵的测度	(242)
习题		(246)
第六章	矩阵函数	(248)
§ 6.1	矩阵多项式、最小多项式	(248)
§ 6.2	矩阵函数及其 Jordan 表示	(255)
§ 6.3	矩阵函数的内插多项式表示与多项式表示	(259)
§ 6.4	矩阵函数的幂级数表示	(265)
§ 6.5	矩阵指数函数与矩阵三角函数	(269)
习题		(273)
第七章	函数矩阵与矩阵微分方程	(277)
§ 7.1	函数矩阵对纯量的导数与积分	(277)

§ 7.2	函数向量的线性相关性	(283)
§ 7.3	矩阵微分方程 $\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)$	(288)
§ 7.4	线性向量微分方程 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$	(291)
习题		(295)
第八章	矩阵的广义逆	(296)
§ 8.1	广义逆矩阵	(296)
§ 8.2	伪逆矩阵	(302)
§ 8.3	广义逆与线性方程组	(307)
习题		(315)
第九章	Kronecker 积	(316)
§ 9.1	Kronecker 积的定义与性质	(316)
§ 9.2	函数矩阵对矩阵的导数	(323)
§ 9.3	Kronecker 积的特征值	(331)
§ 9.4	矩阵的列展开与行展开	(332)
§ 9.5	线性矩阵代数方程	(334)
符号说明		(337)
参考文献		(339)

第一章 线性空间和线性变换

本章所介绍的基本概念是矩阵理论的基础,线性空间、线性子空间、线性变换及其矩阵表示,线性变换的核 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 与值域 $\mathcal{A}V$,线性变换的特征值与特征向量等是本书的重要概念.

§ 1.1 线性空间

线性空间是线性代数最基本的概念. 我们将简要地介绍线性空间,所考虑的数域是实数域(记为 $\mathbf{R}$)和复数域(记为 $\mathbf{C}$),统称数域 F .

一、线性空间概念

先举几个例子.

例 1.1.1 n 阶实方阵集合 $R^{n \times n} = \{A, B, C, \dots\}$, 由线性代数知矩阵有加法运算与数乘矩阵运算. 矩阵的加法运算具有四条性质:

- (1) 加法交换律 $A+B=B+A$
- (2) 加法结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$
- (3) 存在零矩阵“0”, 满足 $A+0=0+A=A$
- (4) 对于 $R^{n \times n}$ 中任何一个矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$, 都有对应的负矩阵 $-A=(-a_{ij})_{n \times n}$, 满足 $A+(-A)=0$

数乘矩阵运算也具有四条性质:

- (5) $1 \cdot A=A$
- (6) $k(lA)=(kl)A$ (k, l 为数)
- (7) $(k+l)A=kA+lA$
- (8) $k(A+B)=kA+kB$

例 1.1.2 n 元实向量集合 $R^n = \{\alpha, \beta, \nu, \dots\}$, 由线性代数知识可知向量有加法运算与数乘向量运算. 向量的加法运算具有四条性质:

- (1) 加法交换律 $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad (\alpha, \beta \in R^n)$
- (2) 加法结合律 $(\alpha + \beta) + \nu = \alpha + (\beta + \nu) \quad (\alpha, \beta, \nu \in R^n)$
- (3) 存在零向量“0”, 满足 $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;
- (4) 对于 R^n 中任何一个实向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 都有对应的负向量 $-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$, 满足 $\alpha + (-\alpha) = 0$.

数乘向量运算也具有四条性质:

- (5) $1 \cdot \alpha = \alpha$
- (6) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
- (7) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$
- (8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

例 1.1.3 设 $R[x]_n$ 表示 {次数小于 n 的变量 x 的实系数多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ 集合}. $R[x]_n$ 中的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的加法与通常多项式加法运算一样, 数乘多项式 $f(x)$ 与通常数乘多项式运算一样. 则多项式的加法运算具有四条性质:

- (1) 加法交换律 $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$
- (2) 加法结合律 $[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$
- (3) 存在零多项式 0, 满足 $f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$
- (4) 对于 $R[x]_n$ 中任何一个多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, 都有对应的负多项式 $-f(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_{n-1}x^{n-1}$, 满足 $f(x) + (-f(x)) = 0$.

数乘多项式的运算也具有四条性质:

- (5) $1 \cdot f(x) = f(x)$
- (6) $k(lf(x)) = (kl)f(x)$
- (7) $(k+l)f(x) = kf(x) + lf(x)$

$$(8) k(f(x)+g(x))=kf(x)+kg(x)$$

从这些例子中看到,所涉及的对象(集合)虽然完全不同,但是它们有共同之处. 它们都可定义加法和数乘这两种运算,而且关于这两种运算都具有八条性质. 还可以举出许多例子,都有此三例的共同之处. 为此,我们把它们统一起来加以研究,引入线性空间的概念.

定义 1.1.1 设 V 是一个非空集合, F 是一个数域,在集合 V 的元素之间定义了加法运算. 即对于 V 中任意两个元素 α 与 β , 在 V 中都有唯一的元素 ν 与它们相对应,称之为 α 与 β 的和,记为 $\nu=\alpha+\beta$,并且加法运算满足下面四条法则:

$$(1) \text{ 交换律 } \alpha+\beta=\beta+\alpha$$

$$(2) \text{ 结合律 } \alpha+(\beta+\nu)=(\alpha+\beta)+\nu$$

(3) 零元素 在 V 中有一元素 0 (称做零元素),对于 V 中任一元素 α 都有 $\alpha+0=\alpha$

(4) 负元素 对于 V 中每一个元素 α ,都有 V 中的元素 β ,使得 $\alpha+\beta=0$

在集合 V 的元素与数域 F 中的数之间还定义了一种运算,叫做数乘. 即对于 V 中任一元素 α 与 F 中任一数 k ,在 V 中有唯一的一个元素 η 与它们对应,称为 k 与 α 的数乘,记为 $\eta=k\alpha$,并且数乘运算满足下面四条法则:

$$(1) 1 \cdot \alpha = \alpha$$

$$(2) k(l\alpha) = (kl)\alpha$$

$$(3) (k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$$

$$(4) k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta.$$

其中 k, l 表示数域 F 中的任意数, α, β 表示 V 中任意元素.

称这样的集合 V 为数域 F 上的线性空间.

显然,例 1.1.1~例 1.1.3 都是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 现在再举几例.

例 1.1.4 设 A 为实数(或复数) $m \times n$ 矩阵,易证:齐次线性

方程组 $Ax=0$ 的所有解(包括零解)的集合构成实(或复)数域 $\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{C}$) 上的线性空间. 这个空间为方程组 $Ax=0$ 的解空间, 也称为矩阵 A 的核(或零)空间, 常用 $N(A)$ 表示.

例 1.1.5 设 A 为实数(或复数) $m \times n$ 矩阵, x 为 n 维列向量, 则 m 维列向量集合

$$V = \{y \in R^m(C^m) | y = Ax, x \in R^n(C^n), A \in R^{m \times n}(C^{m \times n})\}$$

构成实(或复)数域 $\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{C}$) 上的线性空间, 称为 A 的列空间或 A 的值域, 常用 $R(A)$ 表示.

*** 例 1.1.6** 设 X 为任意一个非空集合, F 为任意一个数域, 定义从 X 到 F 的每一个映射 f 为 X 上的一个 F 值函数, 将 X 上的所有 F 值函数构成的集合记做 F^X . 在 F^X 中定义加法与数乘运算如下: 对于任意 $f, g \in F^X, k \in F$, 规定

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in X$$

$$(kf)(x) = k(f(x)), \quad \forall x \in X$$

那么, 容易验证 F^X 为数域 F 上的一个线性空间.

例 1.1.7 由上例可知, R^R 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间, C^C 为复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间.

例 1.1.8 R^+ 表示所有正实数集合, 在 R^+ 中定义加法 $\oplus$ 与数量乘法 $\odot$ 分别为

$$a \oplus b = ab, \quad \forall a, b \in R^+$$

$$k \odot a = a^k, \quad \forall a \in R^+, k \in R$$

可以验证, R^+ 构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

上述几个例子都是在一个集合 V 上定义加法与数域 F 的数量乘法, 构成一个线性空间, 但问题并不总是那么简单. 下面举两个例子, 虽然定义了加法与数量乘法, 但 V 并不构成一个线性空间.

例 1.1.9 设 V 是由系数在实数域 $\mathbf{R}$ 上, 次数为 n 的 n 次多项式 $f(x)$ 构成的集合, 其加法运算与数乘运算按照通常规定, 则 V 不是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

例 1.1.10 设线性非齐次方程组 $AX=b$ 有解, 其通解表达式为

$\xi + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$, 其中 $k_1, \cdots, k_{n-r}$ 为任意数.

可以证明: 解向量组 $\xi, \xi + \alpha_1, \xi + \alpha_2, \cdots, \xi + \alpha_{n-r}$ 是方程组 $AX=b$ 解集合的线性极大无关组 (作为练习请读者自己证明), 但是该解集合不构成线性空间.

二、向量的线性相关性

线性空间的元素 $\alpha, \beta, \nu, \cdots$ 称为向量, 这里所指的向量比线性代数中 n 元向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 的含义更为广泛.

向量的线性相关性概念与结论在叙述形式上与线性代数相同, 下面只作简单论述.

定义 1.1.2 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r \geq 1)$ 是 V 中一组向量, $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 是数域 F 中一组数, 若向量 α 可以表示成

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

则称 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示 (出), 也称 α 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合.

例如, 因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以, 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的线性组合.

定义 1.1.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r \geq 1)$, 是线性空间 V 中一组向量. 如果在数域 F 中有 r 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0 \quad (1.1.1)$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关. 如果一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 不线性相关, 就称为线性无关. 换言之, 若

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

则只有 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$, 便称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 要么线性相关, 要么线性无关, 非此即彼.

对于任何一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 都能满足等式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

因此考察一组向量是否线性相关, 关键不在于向量是否满足等式 (1.1.1), 而在于满足等式 (1.1.1) 中 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 是否只能全为零. 若只能全为零, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关. 若满足式 (1.1.1) 中的 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 除了全为零的情况以外, 还有不全为零的情况, 则向量组线性相关.

例 1.1.11 试证: $R^{2 \times 2}$ 中的一组向量(矩阵)

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的.

[证明] 若

$$k_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

即

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = 0$$

所以

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

因此满足

$$k_1 E_{11} + k_2 E_{12} + k_3 E_{21} + k_4 E_{22} = 0$$

的 k_1, k_2, k_3, k_4 只能全为零, 于是 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 线性无关.

例 1.1.12 试证: $R^{2 \times 2}$ 中的向量(矩阵)组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性相关的.

[证明] 容易验证等式

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

定理 1.1.1 设线性空间 V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 且表出是唯一的 (证明留给读者).

线性代数中向量组的极大线性无关组, 向量组的秩等概念在线性空间中也可自然地引进, 不再一一赘述.

§ 1.2 基与坐标、坐标变换

一、基与维数、坐标

定义 1.2.1 设数域 F 上线性空间 V 中有 n 个线性无关向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 而且 V 中任何一个向量 α 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n \quad (1.2.1)$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一个基, $(k_1, k_2, \dots, k_n)^T$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标. 这时, 就称 V 为 n 维线性空间, 并记 $\dim V = n$.

显然, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(1, 0, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)^T$. 即

$$\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{——} i \text{ 行} \quad (i = 1, \dots, n)$$

根据定理 1.1.1 知, 向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标 $(k_1,$

$k_2, \dots, k_n)^T$ 是唯一的. 将式(1.2.1)改写为

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

式中 $1 \times n$ 分块矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的元素 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 不是数字而是向量. 在作矩阵分块运算时可把它看成是一个数来处理.

例如, n 维线性空间 $R^{n \times n}$ 中的元素(向量)组 $\{E_{ij}\}$, 其中 n 阶矩阵 E_{ij} 是第 i 行、第 j 列处元素为 1, 其余元素全为零的矩阵, 即

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} & & 0 & & & & \\ & 0 & \vdots & & 0 & & \\ & & 0 & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & \vdots & & & \\ & 0 & & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{--- } i \text{ 行} \\ (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{array}$$

|
j 列

是 $R^{n \times n}$ 的一组基.

例 1.2.1 试证: 线性空间

$$R[x]_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} | a_i \in \mathbf{R}\}$$

是 n 维的, 并求 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ 在基 $1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^{n-1}$ 下的坐标.

[证] 先证 $R[x]_n$ 中元素

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$$

是线性无关的. 设

$$k_0 \cdot 1 + k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^2 + \dots + k_{n-1}x^{n-1} = 0$$

由于 $R[x]_n$ 中 x 是变量, 所以欲使上式对于任何 x 都成立的充分必要条件是

$$k_0 = k_1 = \dots = k_{n-1} = 0$$

于是 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 线性无关.

对于 $R[x]_n$ 中任何一个向量(多项式)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \in R[x]_n$$

均可由 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 线性表出, 这表明: $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 是 $R[x]_n$ 的基, 于是 $R[x]_n$ 是 n 维的.

不难验证: $1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^{n-1}$ 也是 $R[x]_n$ 的一组基. 因为

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

故 $f(x)$ 在这组基下的坐标为

$$f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \dots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

例 1.2.2 已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

试求: A 的核空间的两组基.

[解] A 的核空间就是 $Ax=0$ 的解空间(见例 1.1.4), 所以 $Ax=0$ 的基础解系就是核空间的基. 对 A 作初等行变换后得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此 $Ax=0$ 的解为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 为自由变量. 不难知 $Ax=0$ 的基础解系可以取为

$$\begin{cases} \alpha_1 = (-4, -3, 2, 0)^T \\ \alpha_2 = (-1, -2, 0, 1)^T \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \alpha'_1 = (-4, -3, 2, 0)^T \\ \alpha'_2 = (-6, -7, 2, 2)^T \end{cases}$$

它们都可以作为 A 的核空间的基, 核空间是二维的.

例 1.2.3 在 R^4 中, 求向量 $\alpha = (1, 2, 1, 1)^T$ 在基

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, -1, -1)^T$$

$$\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)^T, \quad \alpha_4 = (1, -1, -1, 1)^T$$

下的坐标.

[解] 设 $\alpha = (1, 2, 1, 1)^T$ 在所给基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标为 k_1, k_2, k_3, k_4 , 故

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$$

即

$$\begin{aligned} (1, 2, 1, 1)^T &= k_1(1, 1, 1, 1)^T + k_2(1, 1, -1, -1)^T + \\ &\quad k_3(1, -1, 1, -1)^T + k_4(1, -1, -1, 1)^T \\ &= (k_1 + k_2 + k_3 + k_4, k_1 + k_2 - k_3 - k_4, k_1 - k_2 + \\ &\quad k_3 - k_4, k_1 - k_2 - k_3 + k_4)^T \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1 \\ k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 2 \\ k_1 - k_2 + k_3 - k_4 = 1 \\ k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = 1 \end{cases}$$

解之得

$$k_1 = \frac{5}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{4}, \quad k_3 = -\frac{1}{4}, \quad k_4 = -\frac{1}{4}$$

所以 α 在所给基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标为 $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)^T$.

例 1.2.4 在 $R^{2 \times 2}$ 中, 求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 在基 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 下的坐标.