

大學叢書

高等方程式論

余介石 陸子芬編著

商務印書館出版

大學叢書
高等方程式論

余介石 陸子芬編著

商務印書館出版

一九二七年故教授東陽杜先生作樑在國立中央大學，主講是課，由編者襄理課務，對此頗感興趣。嗣杜氏壯年謝世，曾二度勉承其乏。旋入川滇，奉何師奎垣之命，復授此於重慶大學與雲南大學，備蒙誨導，雖愧未能對斯學有所闡發，然於其艱澀費解，初學不易通曉諸點，尙能洞悉其中甘苦。乃取 Dickson: Introduction to the Theory of Algebraic Equations 一書爲藍本，就數度講授之經驗，更參考 Weber, Dehn 諸家之書（參考書目，另列表附於卷末），益以自擬之數值例題多則，編成此稿。蒙奎師之校正與勉勵，爰付手民，期就正於有道。此書如於初學，不無裨益，當推奎師之力與杜先生之賜。所可惜者，杜先生講稿，係據其在柏林大學研討之心得，未及整理付梓，遽赴道山，遺稿捐贈系中，聞近已遭散佚，廣陵散遂成絕響。編者逖跡邊陲，追懷往事，真不禁有天上人間之感矣。

一九四二年六月編者同識

目次

第一章 整有理函數

1. 引論	1	8. 未定係數法之一應用	10
2. 整有理函數	1	9. 與應用 H.C.F. 法之比較	13
3. 拉果蘭諾之推值式	2	10. 根之基本性質	15
4. 對分部分數之應用	5	11. 根之函數	16
5. 整函數之商	6	12. 恆等式	17
6. 二整函數之最大公因式	7	13. 普遍方程式之根	18
7. 二整函數之互質	9	14. 係數與根之獨立性	19

第二章 二, 三, 四次普遍方程式解法原理

1. 二次方程式	21	7. 分解四次式所成兩個二次式之又一求法	30
2. 三次方程式	21	8. 拉果蘭諾解四次式法	31
3. 根之公式中根式之討論	24	9. 分解三次方程式中之根式	32
4. 拉果蘭諾解三次方程式法	26	10. 拉果蘭諾解法舉例	32
5. 四次方程式	28		
6. 分解三次式之根	30		

第三章 置換; 羣.

1. 置換	36	8. 週期	40
2. n 個文字之置換或數	36	9. 置換或等式中因式之消去	41
3. 置換之積	37	10. 置換之簡單記法	42
4. 置換對函數之作用	38	11. 三, 四, 五文字所成之一切置換	43
5. 乘積之結合性	38	12. 羣	44
6. 乘羣	39	13. 羣之級, 次; 對稱羣	45
7. 逆置換	39	14. 乘積表	45

高等方程式論

15. 循環羣	45	20. 次羣之指數	49
16. 次羣, 最大公因羣	46	21. 羣之級與其中置換之週期二者之關係	51
17. 以對換表置換	47	22. 羣之分解, 附系	51
18. 置換之奇偶	47		
19. 交代羣	48		

第四章 置換與有理函數

1. 基本定理	54	6. 拉果蘭諾定理	62
2. 求定一函數使屬於已知羣	56	7. $R(t)$ 之又一求法	67
3. 有理函數之階值	59	8. 拉果蘭諾定理之逆	69
4. 配羣	60	9. 分解方程式之唯一性	70
5. 分解方程式	61		

第五章 自羣之觀點以論普遍方程式之解法

1. 卡爾丹解法之線索	72	10. 相似置換	83
2. 普遍三次方程式解法之線索	73	11. 四次方程式解法之相關羣	88
3. 普遍四次方程式解法之線索	75	12. 自羣之觀點論三次四次方程式之解法	89
4. 拉果蘭諾解四次方程式之線索	76	13. 組合級數, 單羣與複羣	93
5. 用 24 值函數解四次方程式法	78	14. 對稱羣與交代羣之一充足條件	95
6. 用 $n!$ 值函數解 n 次普遍方程式之線索	79	15. 四文字以上對稱羣之特性	95
7. 分解方程式為二項式之必要條件	80	16. 四文字以上交代羣之特性	97
8. 不變次羣	83	17. 四文字以外對稱羣之組合級數	99
9. 置換之相配	85	18. 五次及高次方程式之不可解	96

第六章 體方程式之可約性

1. 體	101	6. 二項方程式 $x^p - A = 0$ 之不可約性	105
2. 在一體內之代數解法	102	7. 分圓方程式之不可約	107
3. 可約與不可約	102	8. 愛孫斯泰恩定理	109
4. 有公根二式之整除法	104	9. $f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$ 為不可約之見證	110
5. 高斯引理	105		

10. 有重根之方程式	110	11. 三次方程式不可約款之討論	111
-------------	-----	------------------	-----

第七章 加拉理論之導引, $n!$ 值函數

1. 拉氏加氏理論區別之所在	115	7. 加拉分解式	121
2. 體內之函數	118	8. 根之有理函數與 $n!$ 值函數	122
3. 相等之意義	117	9. 置換對關係式之影響	123
4. 不變之意義	117	10. 簡約之關係式	125
5. 體內之普偏方程式	118	11. 以 $n!$ 值函數表根	126
6. $n!$ 值函數之存在	118	12. 加拉分解式諸根之相互關係	127

第八章 方程式之羣; 置換羣之可選性

1. 方程式之羣	129	9. 不可約方程式與可選羣	143
2. 加拉羣之基本特性	130	10. 有理函數之相關羣	145
3. 根之有理關係式在加拉羣下之不變性	132	11. 一已知羣之函數	140
4. 加拉羣之充足條件	133	12. 根之有理函數所定之分解式	147
5. n 次普偏方程式之羣	134	13. 加拉對拉氏定理之推廣	149
6. 一已知方程式之羣之實際決定法	135	14. 域之附加與羣之化約	150
7. 羣之可選性	140	15. 附加量與化約後之羣之關係	152
8. 可選羣之級與次之關係	141	16. 拉加三氏理論之比較	153

第九章 用分解式之方程式解法

1. 緒論	155	6. 分解方程式之羣	163
2. 同型性	156	7. 正單方程式在解法上之應用	165
3. Γ 羣之級	159	8. 質次數之循環方程式	166
4. H 為不變羣之情形, 商羣	161	9. 方程式可用根式求解之充足條件	168
5. H 為最大不變次羣之情形	162		

第十章 特種方程式根式解法之準則

1. 亞培爾方程式	170	3. 論分圓方程式	172
2. 亞氏方程式之羣	171	4. 亞氏方程式之可解性	173

5. 論質次數之二項方程式 175	9. 亞培爾定理 180
6. 佐爾登·荷爾丹二氏定理 176	10. 用一串亞氏方程式解法之例 ... 181
7. 加拉之附加定理 176	參考書目 183
8. 方程式可用根式求解之必要條件 178	索引 185

第一章 整有理函數

1. 1. 引論 一種學理，如能使讀者研習後留一完美之印象，則可爲其已臻圓滿地位之證。二大天才數學家拉果蘭諾 (Lagrange) 與加拉 (Galois) 二氏所創之代數方程式解法理論，即其一也。

代數學之基本目的，在求方程式之解，本書所研究者爲代數解法 (algebraic solution)，即所用運算限於有盡次之四基法 (亦曰有理運算)，及開方。又在此所得結果僅需以四基法及開方之運算符號表出，即視爲業已解決。例如三次普偏方程式有三實根時，其結果不化能簡成實數形式，非吾人之所計也 (參看後文 § VI. 11)。

又在本書只論含一未知元之方程式，而多元之聯立方程式不與焉，故對消去法，亦不述及，但其理則後文論證中常須引用，讀者應預習之。

1. 2. 整有理函數 設 $F(x)$ 爲一代數函數，則

$$F(x) = 0$$

稱爲代數方程式。按複元函數論中之理：

(一) 任何代數函數必爲分析函數 (analytic function) (1)；

(1) 見 Townsend: Functions of a Complex Variable, § 69, 定理三。

(二) 只有極性無窮點 (polar infinity) (2);

(三) 單值分析函數, 如無主要異點 (essential singular point)

則必為有理函數 (3);

吾人即知單值之代數函數, 必為有理函數。因此可書

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

式中 $f(x), g(x)$ 均為整有理函數。於是代數方程式

$$F(x) = 0$$

常可化為

$$f(x) = 0,$$

而 $f(x)$ 為一整有理函數。本書所論者, 即為此種。故以後即簡稱為整函數。讀者慎勿與複元函數論中之整函數相混。

1.3. 拉果蘭諸之推值式 整函數亦稱多項式, 而均可書如下形:

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

設此式於

$$x = x_0, x_1, \dots, x_n,$$

時

$$f(x) = y_0, y_1, \dots, y_n,$$

則吾人可定 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ 諸係數之值, 如次法: 取

(2) 見同書 § 59, 定理四. (3) 見同書 § 54, 定理四.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ y_0 &= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_n + a_n \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

而消去諸 a , 得

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 0$$

展之有

$$\alpha f(x) - \alpha_0 y_0 - \alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n = 0$$

式中

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

且 α_k 爲以

易 α 中

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^n \end{vmatrix}$$

所得之行列式。

高等方程式論

因 x_i, x_j 有二相等時, $\alpha=0$, 由比較係數及次數, 知

$$\alpha = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots \boxed{(x_k - x_0)} (x_{k+1} - x_0) \cdots (x_n - x_0) \\ (x_2 - x_1) \cdots \boxed{(x_k - x_1)} (x_{k+1} - x_1) \cdots (x_n - x_1) \\ \cdots \cdots \cdots \boxed{(x_{k+1} - x_k)} (x_n - x_k) \\ \cdots \cdots \cdots (x_n - x_{n-1})$$

同理,

$$\alpha_k = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots \boxed{(x - x_0)} (x_{k+1} - x_0) \cdots (x_n - x_0) \\ (x_2 - x_1) \cdots \boxed{(x - x_1)} (x_{k+1} - x_1) \cdots (x_n - x_1) \\ \cdots \cdots \cdots \boxed{(x_{k+1} - x)} \cdots (x_n - x) \\ \cdots \cdots \cdots (x_n - x_{n-1})$$

$$\therefore \frac{\alpha_k}{\alpha} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) (x_{k+1} - x) \cdots (x_n - x)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) (x_{k+1} - x_k) \cdots (x_n - x_k)} \\ = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

$$\therefore f(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)}$$

$$+ y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)}$$

$$+ \cdots + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}$$

此式稱為拉果蘭諸推值式(interpolation formula)。

$$\begin{aligned} \text{命} \quad g(x) &= (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n) \\ \text{則} \quad g'(x) &= (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_n) \\ &\quad + (x-x_0)(x-x_2) \cdots (x-x_n) \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \\ &\quad + (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

而拉果蘭諸推值式遂可書為

$$f(x) = g(x) \left[y_0 \frac{1}{g'(x_0)(x-x_0)} + y_1 \frac{1}{g'(x_1)(x-x_1)} + \cdots + y_n \frac{1}{g'(x_n)(x-x_n)} \right]$$

$$\text{或} \quad f(x) = g(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{g'(x_i)(x-x_i)},$$

$$\text{即} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{g'(x_i)(x-x_i)}.$$

• I. 4. 對分部分數之應用 在上之聯立方程式(A)中, $a_0, a_1, \dots$ 等首若干係數, 亦可為零, 但在此不知諸係數之值, 則 n 組對應值 $x_0, y_0; x_1, y_1; \dots; x_n, y_n$ 不得任意取定。由此可知如 $f(x)$ 之次數小於 $g(x)$ 者, 則由上節最後一公式, 可化 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 為分部分數; 但在 $f(x)$ 次數大於或等於 $g(x)$ 時, 則所得僅為真分數部分。

例。求化 $\frac{x^2-3x+4}{x^3+x^2-57x+135}$ 為分部分數。

解. 在此 $f(x) \equiv x^2 - 3x + 4$,

$$g(x) \equiv x^3 + x^2 - 57x + 135 \equiv (x-3)(x-5)(x+9).$$

而 $x = x_0 = 3$ 時,

$$y_0 = f(3) = 4, \quad g'(3) = -24, \quad y_0/g'(3) = -\frac{1}{6};$$

$x = x_1 = 5$ 時,

$$y_1 = f(5) = 14, \quad g'(5) = 28, \quad y_1/g'(5) = \frac{1}{2};$$

$x = x_2 = -9$ 時,

$$y_2 = f(-9) = 112, \quad g'(-9) = 168; \quad y_2/g'(-9) = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 + x^2 - 57x + 135}$$

$$\equiv -\frac{1}{6(x-3)} + \frac{1}{2(x-5)} + \frac{2}{3(x+9)}.$$

如設 $f(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 53x^2 - 39x + 409$

$$\equiv (x+3)(x^3 + x^2 - 57x + 135) + (x^2 - 3x + 4),$$

則 $f(3), f(5), f(-9)$ 之值, 仍與上同, 而依法所求得者, 乃 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 中
真分數部分所成之分部分數.

1. 5. 整函數之商 取二整函數

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_0 \quad n \geq v$$

而作

$$f_1 = f - \frac{a_0}{\alpha_0} x^{n-v} \varphi$$

則其次數必低於 n , 書為

$$f_1 = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$$

如 $m \geq v$, 則續作

$$f_2 = f_1 - \frac{b_0}{\alpha_0} x^{m-v} \varphi$$

其次數必小於 m . 如是繼續為之, 必可至

$$f_k = f_{k-1} - \frac{p_0}{\alpha_0} x^{h-v} \varphi$$

使其次數小於 v . 將所得諸式相加, 則有

$$f = \frac{1}{\alpha_0} (a_0 x^{n-v} + b_0 x^{m-v} + \cdots + p_0 x^{h-v}) \cdot \varphi + f_k$$

或簡作

$$f = q \cdot \varphi + r$$

此即普通除法之理也. 故得

定理 二個一元整函數相除時, 所得商式及餘式, 仍為是元之有理函數.

I. 6. 二整函數之最大公因式 以歐几里德算法 (Euclid's algorithm) 施於 f 及 f_1 二整有理式, 而得

$$f = q_1 f_1 + f_2,$$

$$f_1 = q_2 f_2 + f_3,$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$f_{r-1} = q_{r-1}f_{r-2} + f_{r-3},$$

$$f_{r-2} = q_{r-3}f_{r-4} + f_{r-5},$$

此項算法至若干次後必止，因 f_i 之次數漸減， f_r 終可為一常數也。

在上之討論中，如 f 及 f_1 有常數以外之公因式，則此公因式必含於諸 f_i 中，而常數 f_r 之值，遂不得不為零，否則 f_{r-2} ， f_{r-1} 將不能有此公因式。當此時，就末式知 f_{r-1} 為 f_{r-2} 之因式，逆溯而上，更知其為諸 f_i 之公因式。且 f 及 f_1 之任何公因式，必含於其中，故 f_{r-1} 為 H.C.F.

。自上列諸式中第一式，得

$$f_2 = f - q_1 f_1$$

代入第二式，有

$$f_3 = -q_2 f + (q_1 q_2 + 1) f_1$$

如此逐漸代入次式演算，終得 f_r 對於 f 及 f_1 之平直關係式，若用下之符號

$$[\] = 1$$

$$[a_1] = a_1$$

$$[a_1, a_2] = a_1 a_2 + 1$$

$$[a_1, a_2, a_3] = a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_{n-1}]a_n + [a_1, a_{n-2}]$$

則可得

$$f_r = (-1)^{r-1} [q_2, q_3, \dots, q_{r-1}] f + (-1)^r [q_1, q_2, \dots, q_{r-1}] f_1.$$

此式爲普遍成立，不難由數學歸納法證之，於 $r=3, 4$ 時即得前二式。

設 $r=b-1$ 及 b 時此式成立。即

$$f_{b-1} = (-1)^{b-2}[q_2, q_3, \dots, q_{b-2}]f + (-1)^{b-1}[q_1, q_2, \dots, q_{b-2}]f_1,$$

$$f_b = (-1)^{b-1}[q_2, q_3, \dots, q_{b-1}]f + (-1)^b[q_1, q_2, \dots, q_{b-1}]f_1$$

代入

$$f_{b+1} = f_{b-1} - q_b f_b$$

中得

$$\begin{aligned} f_{b+1} &= (-1)^{b-2}[q_2, q_3, \dots, q_{b-1}]f + (-1)^{b-1}[q_1, q_2, \dots, q_{b-1}]f_1 \\ &\quad + (-1)^b[q_2, q_3, \dots, q_{b-1}]q_b f + (-1)^{b+1}[q_1, q_2, \dots, q_{b-1}]q_b f_1 \\ &= (-1)^b[q_2, q_3, \dots, q_b]f + (-1)^{b+1}[q_1, q_2, \dots, q_b]f_1 \end{aligned}$$

整理遂得完全證明。簡記之，可書爲

$$f_r = G_r f + G_r' f_1$$

由上所述，得一定理如下：

定理 二整函數如有公因式，則可以有理運算求得其最大公因式。

1.7. 二整函數之互質 二整函數若無常數以外之公因式，則稱爲互質 (relatively prime)，由上節之理，立可得其充要條件如次：

定理 f 與 f_1 互質之充要條件，乃可得與 Φ 與 Φ_1 二整函數使

$$\Phi f + \Phi_1 f_1 \equiv 1.$$

今以 $\varphi_1 + \psi f \equiv \Phi$ 代 Φ ，以 $\varphi - \psi f \equiv \Phi$ 代 φ ，則仍有 $\Phi f + \Phi_1 f_1 \equiv 1$ ，故與 f 及 f_1 相配之因式，使其積之和爲 1 者，不爲唯一確定。但如 f 與 f_1 二整函數之次數爲 n 及 n_1 時，則 φ 之次數低於 n 與 φ_1 之次數低於 n 者爲唯一。因如有 φ, Φ 及 φ_1, Φ_1 ，則應有

$$(\varphi_1 - \Phi)f + (\varphi - \Phi)f_1 \equiv 0$$

或
$$\frac{f}{f} \equiv -\frac{\varphi - \Phi}{\varphi_1 - \Phi}.$$

但原設 f_1 與 f 爲互質， $\frac{f_1}{f}$ 中分子分母之次數，應無可化低，故生矛盾。因此得一定理如下：

定理 一 n 次整函數 f ，與一 n 次整函數 f_1 互質，則吾人可以有理運算，求得 φ 與 φ_1 二整函數，使

$$\varphi_1 f + \varphi f_1 \equiv 1.$$

且 φ 之次數小於 n 者，與 φ_1 之次數小於 n_1 者，爲唯一確定。

1. 8. 未定係數法之一應用 如 f 及 f_1 爲二互質之整函數， Z 爲另一多項式，則吾人恆可得二多項式 A 及 B 使有恆等式

$$Ef + Af \equiv Z.$$

蓋 f 與 f_1 既互質，則必可得二整函數 φ_1 及 φ ，使

$$\varphi_1 f + \varphi f_1 \equiv 1$$

取 Z 倍乘之，得
$$\varphi_1 Z f + \varphi Z f_1 \equiv Z$$

故得
$$B \equiv \varphi_1 Z, \quad A \equiv \varphi Z.$$

普通求 φ_1 及 φ 之術，常就歐几里得算法 (§ 1. 6) 反求，計算頗繁。且所得之 B 與 A 二式次數每甚高，不合於上節定理中次數之限制。今述一應用未定係數之求法⁽¹⁾，計算既便，所得 B 及 A 二式次數亦爲最低，合於上節定理之限制，因之而爲唯一確定。

(1) 見 Goursat-Hedrick: A Course Mathematical Analysis, Vol. I, §104.