大學叢書

高等方程式論

余介石 陸子芬編著

商務印書館出版

大學叢書

高等方程式論

余介石　陸子芬編著

商務印書館出版

一九二七年故教授東陽杜先生作樑在國立中央大學，主講是課，由編者襄理課務，對此頗感興趣．嗣杜氏壯年謝世，曾二度勉承其乏．旋入川滇，奉何師奎垣之命，復授此於重慶大學與雲南大學，備蒙誨導，雖愧未能對斯學有所闡發，然於其艱澀費解，初學不易通曉諸點，尚能洞悉其中甘苦．乃取 Dickson: Introduction to the Theory of Algebraic Equations 一書為藍本，就數度講授之經驗，更參考 Weber, Dehn 諸家之書（參考書目，另列表附於卷末），益以自擬之數值例題多則，編成此稿．蒙奎師之校正與勉勵，爰付手民，期就正於有道．此書如於初學，不無裨益，當推奎師之力與杜先生之賜．所可惜者，杜先生講稿，係據其在柏林大學研討之心得，未及整理付梓，遽赴道山，遺稿捐贈系中，聞近已遭散佚，廣陵散遂成絕響．編者遯跡邊陲，追懷往事，真不禁有天上人間之感矣．

一九四二年六月編者同識

目　次

第一章　整有理函數

第二章　二,三,四次普遍方程式解法原理

第三章　置換;羣.

第四章 置換與有理函數

第五章 自羣之觀點以論普徧方程式之解法

第六章 體方程式之可約性

第七章．加拉理論之導引，$n!$ 值函數

第八章　方程式之羣；置換羣之可遷性

第九章　用分解式之方程式解法

第十章　特種方程式根式解法之準則

第一章 整有理函數

I. 1. 引論 一種學理,如能使讀者研習後留一完美之印象,則可爲其已臻圓滿地位之證.二大天才數學家拉果闌諸(Lagrange)與加拉(Galois)二氏所創之代數方程式解法理論,即其一也.

代數學之基本目的,在求方程式之解,本書所研究者爲代數解法(algebraic solution),即所用運算限於有盡次之四基法(亦曰有理運算),及開方.又在此所得結果僅需以四基法及開方之運算符號表出,即視爲業已解決.例如三次普徧方程式有三實根時,其結果不化能簡成實數形式,非吾人之所計也(參看後文§VI. 11).

又在本書只論含一未知元之方程式,而多元之聯立方程式不與焉,故對消去法,亦不述及,但其理則後文論證中常須引用,讀者應預習之.

I. 2. 整有理函數 設 $F(x)$ 爲一代數函數,則

$$F(x)=0$$

稱爲代數方程式.按複元函數論中之理:

(一) 任何代數函數必爲分析函數(analytic function)(1);

(1)見 Townsend: Functions of a Complex Variable, §69, 定理三.

(二) 只有極性無窮點 (polar infinity) [2];

(三) 單值分析函數,如無主要異點(essential singular point) 則必爲有理函數[3];

吾人卽知單值之代數函數,必爲有理函數. 因此可書

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)},$$

式中 $f(x), g(x)$ 均爲整有理函數. 於是代數方程式

$$F(x)=0$$

常可化爲

$$f(x)=0,$$

而 $f(x)$ 爲一整有理函數. 本書所論者,卽爲此種. 故以後卽簡稱爲整函數. 讀者愼勿與複元函數論中之整函數相混.

I. 3. 拉果蘭諸之推値式 整函數亦稱多項式,而均可書如下形:

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{n-1}x+a_n$$

設此式於

$$x=x_0,\quad x_1,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,x_n,$$

時 $$f(x)=y_0,\quad y_1,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,y_n,$$

則吾人可定 $a_0, a_1, \cdot\cdot\cdot a_{n-1}, a_n$ 諸係數之値,如次法: 取

(2) 見同書 § 69, 定理四. (3) 見同書 § 54, 定理四.

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n\\ y_0&=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x_0+a_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n&=a_0x_n^n+a_1x_n^{n-1}+\cdots\cdots a_{n-1}x_n+a_n \end{aligned}\right\}\quad\text{(A)}$$

而消去諸 a, 得

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2\cdots\cdots x^n\\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2\cdots\cdots x_0^n\\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2\cdots\cdots x_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ y_n & 1 & x_n & x_n^2\cdots\cdots x_n^n \end{vmatrix}=0$$

展之有

$$\alpha f(x)-\alpha_0y_0-\alpha_1y_1\cdots\cdots\alpha_ny_n=0$$

式中

$$\alpha=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2\cdots\cdots x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2\cdots\cdots x_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ 1 & x_n & x_n^2\cdots\cdots x_n^n \end{vmatrix}$$

且 α_k 爲以 $1 \quad x \quad x^2\cdots\cdots x^n$

易 α 中 $1 \quad x_k \quad x_k^2\cdots\cdots x_k^n$

所得之行列式.

因 x_i, x_j 有二相等時, $\alpha=0$, 由比較係數及次數, 知

$$\begin{aligned}\alpha=(x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots&(x_k-x_0)(x_{k+1}-x_0)\cdots(x_n-x_0)\\ (x_2-x_1)\cdots&(x_k-x_1)(x_{k+1}-x_1)\cdots(x_n-x_1)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(x_{k+1}-x_k)\quad(x_n-x_k)\\ &\cdots\cdots\\ &(x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}\alpha_k=(x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots&(x-x_0)(x_{k+1}-x_0)\cdots(x_n-x_0)\\ (x_2-x_1)\cdots&(x-x_1)(x_{k+1}-x_1)\cdots(x_n-x_1)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(x_{k+1}-x)\cdots(x_n-x)\\ &\cdots\cdots\\ &(x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{\alpha_k}{\alpha}=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x_{k+1}-x)\cdots(x_n-x)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)\cdots(x_n-x_k)}$$

$$=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$\therefore\ f(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$+\cdots+y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

此式稱爲拉果蘭諸推値式(interpolation formula).

命
$$g(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

則
$$\begin{aligned}g'(x)&=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\&+(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\&\cdots\cdots\cdots\\&+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

而拉果蘭諸推値式遂可書爲

$$f(x)=g(x)\left[y_0\frac{1}{g'(x_0)(x-x_0)}+y_1\frac{1}{g'(x_1)(x-x_1)}+\cdots+y_n\frac{1}{g'(x_n)(x-x_n)}\right]$$

或
$$f(x)=g(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{g'(x_i)(x-x_i)},$$

即
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{g'(x_i)(x-x_i)}.$$

I. 4. 對分部分數之應用　在上之聯立方程式(A)中，$a_0, a_1, \cdots$ 等首若干係數，亦可爲零，但在此如不知諸係數之値，則 n 組對應値 $x_0, y_0; x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ 不得任意取定．由此可知如 $f(x)$ 之次數小於 $g(x)$ 者，則由上節最後一公式，可化 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 爲分部分數；但在 $f(x)$ 次數大於或等於 $g(x)$ 時，則所得僅爲眞分數部分．

例． 求化 $\frac{x^2-3x+4}{x^3+x^2-57x+135}$ 爲分部分數．

解. 在此 $f(x)\equiv x^2-3x+4$,

$$g(x)\equiv x^3+x^2-57x+135\equiv(x-3)(x-5)(x+9).$$

而 $x=x_0=3$ 時,

$$y_0=f(3)=4,\quad g'(3)=-24,\quad y_0/g'(3)=-\frac{1}{6};$$

$x=x_1=5$ 時,

$$y_1=f(5)=14,\quad g'(5)=28,\quad y_1/g'(5)=\frac{1}{2};$$

$x=x_2=-9$ 時,

$$y_2=f(-9)=112,\quad g'(-9)=168;\quad y_2/g'(-9)=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\ \frac{x^2-3x+4}{x^3+x^2-57x+135}$$

$$\equiv-\frac{1}{6(x-3)}+\frac{1}{2(x-5)}+\frac{2}{3(x+9)}.$$

如設 $f(x)\equiv x^4+4x^3-53x^2-39x+409$

$$\equiv(x+3)(x^3+x^2-57x+135)+(x^2-3x+4),$$

則 $f(3),f(5),f(-9)$ 之值,仍與上同,而依法所求得者,乃 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 中真分數部分所成之分部分數.

I. 5. **整函數之商　取二整函數**

$$f=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

$$\varphi=\alpha_0x^\nu+\alpha_1x^{\nu-1}+\cdots\cdots+\alpha_\nu\qquad n\geqq\nu$$

而作 $$f_1=f-\frac{a_0}{\alpha_0}x^{n-\nu}\varphi$$

則其次數必低於 n, 書爲

$$f_1=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdot\cdot\cdot+b_m$$

如 $m\geqq\nu$, 則續作

$$f_2=f_1-\frac{b_0}{\alpha_0}x^{m-\nu}\varphi$$

其次數必小於 m。如是繼續爲之, 必可至

$$f_k=f_{k-1}-\frac{p_0}{\alpha_0}x^{h-\nu}\varphi$$

使其次數小於 ν. 將所得諸式相加, 則有

$$f=\frac{1}{\alpha_0}(a_0x^{n-\nu}+b_0x^{m-\nu}+\cdot\cdot\cdot+p_0x^{h-\nu})\cdot\varphi+f_k$$

或簡作 $$f=q\cdot\varphi+r$$

此卽普通除法之理也. 故得

定理 二個一元整函數相除時, 所得商式及餘式, 仍爲是元之有理函數.

I. 6. **二整函數之最大公因式** 以歐几里德算法 (Euclid's algorism) 施於 f 及 f_1 二整有理式, 而得

$$f=q_1f_1+f_2,$$

$$f_1=q_2f_2+f_3,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f_{r-3}=q_{r-2}f_{r-2}+f_{r-1},$$

$$f_{r-2}=q_{r-1}f_{r-1}+f_r$$

此項算法至若干次後必止，因 f_i 之次數漸減，f_r 終可爲一常數也。

在上之討論中，如 f 及 f_1 有常數以外之公因式，則此公因式必含於諸 f_i 中，而常數 f_r 之値，遂不得不爲零，否則 f_{r-2}，f_{r-1} 將不能有此公因式．當此時，就末式知 f_{r-1} 爲 f_{r-2} 之因式，逆溯而上，更知其爲諸 f_i 之公因式．且 f 及 f_1 之任何公因式，必含於其中，故 f_{r-1} 爲 H.C.F.

自上列諸式中第一式，得

$$f_2=f-q_1f_1$$

代入第二式，有

$$f_3=-q_2f+(q_1q_2+1)f_1$$

如此逐漸代入次式演算，終得 f_r 對於 f 及 f_1 之平直關係式，若用下之符號

$$[\ \ ]=1$$

$$[\alpha_1]=\alpha_1$$

$$[\alpha_1,\alpha_2]=\alpha_1\alpha_2+1$$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_3+\alpha_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]=[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}]\alpha_n+[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2}]$$

則可得

$$f_r=(-1)^{r-1}[q_2,q_3,\cdots,q_{r-1}]f+(-1)^r[q_1,q_2,\cdots,q_{r-1}]f_1.$$

此式為普徧成立,不難由數學歸納法證之,於 $r=3,4$ 時卽得前二式.設 $r=k-1$ 及 k 時此式成立.卽

$$f_{k-1}=(-1)^{k-2}[q_2,q_3,\cdots,q_{k-2}]f+(-1)^{k-1}[q_1,q_2,\cdots,q_{k-2}]f_1,$$

$$f_k=(-1)^{k-1}[q_2,q_3,\cdots,q_{k-1}]f+(-1)^{k}[q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}]f_1$$

代入

$$f_{k+1}=f_{k-1}-q_kf_k$$

中得

$$\begin{aligned}f_{k+1}&=(-1)^{k-2}[q_2,q_3,\cdots,q_{k-2}]f+(-1)^{k-1}[q_1,q_2,\cdots q_{k-2}]f_1\\&\quad+(-1)^{k}[q_2,q_3,\cdots,q_{k-1}]q_kf+(-1)^{k+1}[q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}]q_kf_1\\&=(-1)^{k}[q_2,q_3,\cdots,q_k]f+(-1)^{k+1}[q_1,q_2,\cdots,q_k]f_1\end{aligned}$$

題理遂得完全證明.簡記之,可書為

$$f_r=G_1f+Gf_1$$

由上所述,得一定理如下:

定理 二整函數如有公因式,則可以有理運算求得其最大公因式.

I. 7. **二整函數之互質** 二整函數若無常數以外之公因式,則稱為互質(relatively prime)、由上節之理,立可得其充要條件如次:

定理 f 與 f_1 互質之充要條件,乃可得與 Φ 與 Φ_1 二整函數使

$$\Phi_1f+\Phi f_1\equiv1.$$

今以 $\varphi_1+\psi f\equiv\Phi_1$ 代 φ_1, 以 $\varphi-\psi f\equiv\Phi$ 代 φ, 則仍有 $\Phi_1f+\Phi f_1\equiv1$,故與 f 及 f_1 相配之因式,使其積之和為 1 者,不為唯一確定。但如 f 與 f_1 二整函數之次數為 n 及 n_1 時,則 φ 之次數低於 n 與 φ_1 之次數低於 n 者為唯一。因如有 φ,Φ 及 φ_1,Φ_1,則應有

$$(\varphi_1-\Phi_1)f+(\varphi-\Phi)f_1\equiv 0$$

或
$$\frac{f}{f}\equiv-\frac{\varphi-\Phi_1}{\varphi-\Phi}.$$

但原設f_1與f爲互質，$\frac{f_1}{f}$中分子分母之次數，應無可化低，故生矛盾.因此得一定理如下:

定理　一n次整函數f，與一n次整函數f_1互質，則吾人可以有理運算，求得φ與φ_1二整函數，使

$$\varphi_1 f+\varphi f_1\equiv 1.$$

且φ之次數小於n者，與φ_1之次數小於n_1者，爲唯一確定.

I. 8. 未定係數法之一應用　如f及f_1爲二互質之整函數，Z爲另一多項式，則吾人恆可得二多項式A及B使有恆等式

$$Ef+Af\equiv Z.$$

蓋f與f_1既互質，則必可得二整函數φ_1及φ，使

$$\varphi_1 f+\varphi f_1\equiv 1$$

取Z徧乘之，得
$$\varphi_1 Zf+\varphi Zf_1\equiv Z$$

故得
$$B\equiv\varphi_1 Z,\quad A\equiv\varphi Z.$$

普通求φ_1及φ之術，常就歐几里得算法（§I. 6）反求，計算頗繁.且所得之B與A二式次數每甚高，不合於上節定理中次數之限制.今述一應用未定係數之求法(1)，計算既便，所得B及A二式次數亦爲最低，合於上節定理之限制，因之而爲唯一確定.

(1) 見 Goursat-Hedrick: A Course Mathematical Analysis, Vol. I, §104.