◉ 林发兴 著

线性系统指数型二分性

XIANXING
XITONG
ZHISHUO
XING
ERFENXING

安/徽/大/学/出/版/社

图书在版编目(CIP)数据

线性系统指数型二分性/林发兴著．-合肥:安徽大学出版社,1999.3
ISBN 7-81052-233-7

Ⅰ.线…　Ⅱ.林…　Ⅲ.线性代数　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 03679 号

线性系统指数型二分性　　　　林发兴　著

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**印　刷**	安徽省统计局机关印刷厂
		开　本	787×1092　1/16
联系电话	总编室 0551-5107719	**印　张**	12.75
	发行部 0551-5107784	**字　数**	318 千
特约编辑	郑祖庥	**版　次**	1999 年 3 月第 1 版
责任编辑	李　梅	**印　次**	1999 年 3 月第 1 次印刷
封面设计	孟献辉		

ISBN 7-81052-233-7/O·14　　　　**定价** 15.80 **元**

序

线性常微分方程组有极其广泛的应用背景,并且理论上较为完整,是常微分方程理论中最基本、最重要的一类。不仅如此,还可以由它导出研究非线性系统的一些方法,例如形形色色的线性化手段和第一近似理论。然而,实际上只有常系数的情形有简明的传统方法可以给出完整实用的结果。对一般变系数的情形,这些结果则必须用各种复什的手段才能作出相应的推广。

把常系数线性系统的一系列结果予以推广的最初尝试是对常数阵 A 的特征方程 $\det|\lambda I - A| = 0$ 中的 A 代之以函数阵 A(t),由此形式地计算出"特征根"λi 通常是 t 的函数,有简单的例子表明,即使 λi 是常数而且皆具负实部,系统的零解也可以是不稳定的〔〕,换句话说,λi 不再表达系统解的特征。以后肯定还有形形色色的探索,最值得推崇的途径之一是 Liapunov 引入的函数 X(t)的示性数的概念。当 $ce^{\lambda t}$ 为常系统线性系统的解时:$ce^{\lambda t}$ 的示性数为特征值取负号($-\lambda$)。从这一理念出发的一种发展是变系数线性系统指数型二分法。福州大学 40 年的努力表明,它有效地推广常系数系统的重要结果,获得广泛应用。

本书总结林振声教授和他的学生们,当然也包括作者本人多年来的一系列研究工作,系统介绍这一领域的基础知识与进展现状。全书的内容范围作者在前言中表述得十分确切。诚然,这一领域还有许多重大有待研究的重要课题,特别是把相关结果推广到线性泛函微分方程的尝试,这提供有志于此项工作的数学工作者一个相当宽阔的探索空间。

综观全书,论述通畅,由浅及深,对于初次涉足此方向的读者是十分有益的。所以我认为可以作为很有特色的研究生补充教材,同时也是对已故林振声教授的最好纪念。

诚祈这一方向日后有更大的发展。

郑祖庥

1998.09.25

前　言

众所周知,常微分方程研究的对象是求其通解和探讨其解的各种属性。在常微分方程发展的古典时期,由于直观上的想象以及应用科学如力学、物理学、几何学发展的需要,数学家们主要是谋求各种途径来导出常微分方程的通解。然而对于众多的微分方程式,这个目的却是无法实现的。人们发现,哪怕非常简单的一阶常微分方程或者二阶线性常微分方程组,想求出它们的通解都是非常困难的,甚至绝大部份是不可能的。1841 年,Liouville 证明了这样一个结论:一阶常微分方程(*Riccati* 方程)

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x^2 + Q(t)x + R(t)$$

除了一些特殊情形以外,对于一般函数 $P(t)$,$Q(t)$,$R(t)$,其通解不可能用初等函数或者初等函数的积分来表示。因此纯粹靠求通解来研究常微分方程无疑是行不通的,但是,这并不等于说常微分方程这门学科不能发展。随着新的学科不断诞生和开辟;随着数学基础理论不断完善和创新,人们发现,研究常微分方程各种解的存在性、稳定性以及其他属性更加重要而且是完全可能的。

我们知道,如果常系数线性齐次微分方程(简称常系数线性系统)的系数矩阵其特征根实部不为零,那么它具有非常优越的特性。这些特性如何推广到变系数线性齐次微分方程(简称线性系统)上来,这是一项非常重要和有趣的工作。*Lyapunov* 引进了特征指数的概念,利用特征指数不为零来代替常系数线性系统中系数矩阵的特征根实部不为零,这在相当程度上将定常系统的特征推广到非定常系统上来,尤其在解的稳定性方面。然而,由于特征指数的不一致性,还有一定范围的特征是无法推广的,下列六个已知的基本结论就无法利用特征指数不为零将其推广到非定常系统上。

(一)如果 A 的特征根实部不为零,则对关于变量 x 满足 Lipschitz 条件,且 Lipschitz 常数适当小的有界函数 $f(x,t)$,下列系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x,t) \tag{0.1}$$

有唯一有界解。

(二)如果(一)的条件满足,则系统(0.1)和它的线性部分

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{0.2}$$

拓扑等价。

(三)如果矩阵 A 的特征根实部不为零,则(0.2)可运动相似于对角块线性系统

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x \tag{0.3}$$

其中 A_1 的特征根实部小于零,而 A_2 的特征根实部大于零。

(四)矩阵 A 的特征根实部不为零的充分必要条件是存在可逆的二次型 $V(x) = x^T Gx$,以

及实数 $\eta>0$,使得对于(0.2)的任一解 $x(t)$,有

$$\frac{dV(x(t))}{dt}\geqslant\eta\|x(t)\|^2$$

(五)如果 A 的特征根实部不为零,则存在 $\delta>0$,当 $\|B\|<\delta$ 时,$A+B$ 的特征根实部也不为零。

(六)A 的特征根实部不为零的充分必要条件是线性系统(0.2)结构稳定。

这些基本而又重要的问题利用指数型二分性理论就可以完全推广到变系数线性系统上来。线性系统指数型二分性理论的研究是在60年代开始兴起。1963年,林振声先生首先提出了这个概念,并且解决了上述问题(四),即指数型二分性和二次型的联系。1978年,Coppel对半轴上(即 R^+ 上)指数型二分性作了总结。近年来这方面的研究非常活跃,许多显著的成果不断涌现,尤其是 G. R. Sell、K. J. Palmer, R. A. Johnson, Millionscikow, 史金麟和曾唯尧等许多学者,在这方面做了非常杰出的工作。为了使指数型二分性这一方向更系统化,让国内的读者能够更进一步了解它,作者根据几年来在这方面的研究总结把它介绍给读者,希望能起到抛砖引玉的作用。

在此书的编写过程中,得到恩师林振声教授的精心指导和帮助,对内容的每一细节,林先生都曾认真审阅和推敲过。作者在吉林大学攻读博士学位期间,周钦德教授也非常关心这本书的出版,提出过不少宝贵意见。虽然二位恩师都已逝世,但他们对我的谆谆教诲和无私相助将永远铭刻在我的心里。

此书的出版得到安徽大学郑祖庥教授的鼎力相助,从推荐、联系出版社直至审阅修改都是郑教授和蒋威博士、徐建华博士帮忙完成的,可以说,如果不是他们的支持,此书将永远是一堆无人问津的废稿纸。借此机会表示我对郑教授、蒋威博士、徐建华博士的衷心感谢。

李勇教授也对此书提出过建设性意见,在此表示感谢。

由于作者水平有限,难免有不少错误,希望广大读者能给予原谅并批评指正。

目　次

前言 ………………………………………………………………………… (1)
第一章　基础知识 ………………………………………………………… (1)
　§1　预备定理 ……………………………………………………… (1)
　§2　向量和矩阵 …………………………………………………… (2)
　§3　常微分方程基础理论 ………………………………………… (10)
第二章　指数型二分性特征 ……………………………………………… (17)
　§1　基本概念 ……………………………………………………… (17)
　§2　解的特征 ……………………………………………………… (23)
　§3　指数型二分性和二次型函数的关系 ………………………… (39)
　§4　外壳系和回复线性系统 ……………………………………… (44)
第三章　指数型二分性的应用 …………………………………………… (54)
　§1　有界解与回复解 ……………………………………………… (54)
　§2　概自守解 ……………………………………………………… (64)
　§3　概周期解 ……………………………………………………… (66)
　§4　周期解 ………………………………………………………… (69)
第四章　可约性和粗糙度 ………………………………………………… (72)
　§1　可约性 ………………………………………………………… (72)
　§2　线性系统的三角化 …………………………………………… (84)
　§3　粗糙度 ………………………………………………………… (85)
第五章　指数型分解、积分分解 ………………………………………… (102)
　§1　概念和基本性质 ……………………………………………… (102)
　§2　指数型分解、积分分解与指数型二分性的关系 …………… (108)
　§3　指数型分解的粗糙度和积分分解的稠密性 ………………… (115)
第六章　结构稳定性 ……………………………………………………… (117)
　§1　概念和基本性质 ……………………………………………… (117)
　§2　结构稳定和指数型二分性的关系 …………………………… (122)
　§3　一般非线性系结构稳定性 …………………………………… (139)
　§4　局部线性化 …………………………………………………… (148)
　§5　弱结构稳定 …………………………………………………… (149)
第七章　谱理论 …………………………………………………………… (158)
　§1　基本概念 ……………………………………………………… (158)
　§2　谱点和一致特征指数 ………………………………………… (166)
　§3　谱的结构和范围 ……………………………………………… (170)
第八章　指数型三分性 …………………………………………………… (185)
参考文献 …………………………………………………………………… (195)

第一章　基础知识

本章主要介绍一些基本的知识，为今后各章作准备。

§1. 预备定理

本节介绍一些泛函分析中的重要定理。

1. Hölder 不等式，设 $p>1,q>1$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则对于任意 $2n$ 个实数 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ 下式成立：

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

特别地，当我们取 $p=2,q=2$ 时，那末

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. Minkowski 不等式，设 $p\geqslant 1$，则对于任意 $2n$ 个实数 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ 下式成立：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

特别地，我们取 $p=2$，那末

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. 闭图像定理，若 X、Y 是 Banach 空间，T 是 $D(T)\subset X$ 到 Y 的线性算子，其中 $D(T)$ 表示 T 的定义域，若 $D(T)$ 是 X 中的闭集，且 $\{(x,Tx)\,|\,x\in D(T)\}$ 是 $X\times Y$ 中的闭集，则 T 是连续算子。

4. Ascoli－Arzela 定理，设 $F=\{f_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 是一族定义在闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数，若 F 一致有界、等度连续，则可在 F 中选取一列函数 $\{f_n\,|\,n=1,2,\cdots\}$，满足：当 $i\neq j$ 时，$f_i\neq f_j$ 且 $\{f_n(t)\,|\,n=1,2,\cdots\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

F 一致有界指的是：存在常数 $M>0$，使得任意 $f_\alpha\in F$，有

$$|f_\alpha(t)|\leqslant M,\qquad t\in[a,b].$$

F 等度连续指的是：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $t_1,t_2\in[a,b]$ 且 $|t_1-t_2|<\delta$，就有

$$|f_\alpha(t_1)-f_\alpha(t_2)|<\varepsilon$$

对一切 $f_\alpha\in F$ 都成立。

注：Ascoli－Arzela 定理可推广如下：

设 $F=\{f_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 是一族从 $[a,b]$ 到 R^n 上的映射，且 F 一致有界、等度连续，则可在 F 中选取一列映射 $\{f_k\,|\,k=1,2,\cdots\}$ 满足：当 $i\neq j$ 时，$f_i\neq f_j$，且 $\{f_k(t)\,|\,k=1,2,\cdots\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

这里所指的一致有界和等度连续的概念同上述一样，只不过要将绝对值改为 n 维欧氏空间的范数。而且，当 $[a,b]$ 换为 m 维欧氏空间 $1R^m$ 中的紧集时，定理结论仍成立。

定理 1.1.　设 $F=\{f_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 是一族从 R^m 到 R^n 上的映射，对于 R^m 的任何紧集 E，F

在E上一致有界、等度连续,那么可在F中选取一列映射$\{f\backslash -k|k=1,2,\cdots,\}$,满足:当$i\neq j$时,$f_i\neq f_j$,且$\{f_k(x)|k=1,2,\cdots\}$在$R^m$的任何紧集上一致收敛。

证明: 以$m=1$为例来证,对于闭区间$[-1,1]$,由于F在$[-1,1]$上一致有界、等度连续,由Ascoli-Arzele定理[注],在F中可选取一列映射$\{f_k^{(1)}|k=1,2,\cdots\}$满足:当$i\neq j$时,$f_i^{(1)}\neq f_j^{(1)}$,而且$\{f_k^{(1)}(t)|k=1,2,\cdots\}$在$[-1,1]$上一致收敛,记$F_1=\{f_k^{(1)}|k=1,2,\cdots\}$,因此$F_1$在$R$的任何有限区间上一致有界、等度连续。对于闭区间$[-2,2]$,由于$F_1$在$[-2,2]$上一致有界、等度连续,由Ascoli-Arzele定理[注],在F_1中可选取一列映射$\{f_k^{(2)}|k=1,2,\cdots\}$,满足:当$i\neq j$时,$f_i^{(2)}\neq f_j^{(2)}$,且$\{f_k^{(2)}(t)|k=1,2,\cdots\}$在$[-2,2]$上一致收敛。记$F_2=\{f_k^{(2)}|k=1,2,\cdots\}$,则$F_2\subseteq F_1$。归纳假设,已选取$F_r=\{f_k^{(r)}|k=1,2,\cdots\}$满足:当$i\neq j$时,$f_i^{(r)}\neq f_j^{(r)}$,且$\{f_k^{(r)}|k=1,2,\cdots\}$在$[-r,r]$上一致收敛。对于闭区间$[-r-1,r+1]$,由于$F_r$在$[-r-1,r+1]$上一致有界、等度连续,由Ascoli-Arzele定理[注],在F_r中选取一列映射$F_{r+1}=\{f_k^{(r+1)}|k=1,2,\cdots\}$满足:当$i\neq j$时,$f_i^{(r+1)}\neq f_j^{(r+1)}$,且$\{f_k^{(r+1)}|k=1,2,\cdots\}$在$[-r-1,r+1]$上一致收敛。因此由归纳法原理,存在映射列$F_r=\{f_k^{(r)}|k=1,2,\cdots\}$　$r=1,2,\cdots$满足:

$$F_1\supseteq F_2\supseteq\cdots\supseteq F_r\supseteq\cdots$$

且对于任意r,$\{f_{(k)}^{(r)}|k=1,2,\cdots\}$在$[-r,r]$上一致收敛,而当$i\neq j$时,$f_i^{(r)}\neq f_j^{(r)}$,因此对于任意$n_1,n_2$,当$n_1\neq n_2$时,$f_{n_1}^{(n_1)}\neq f_{n_2}^{(n_2)}$。

取映射列$\{f_k^{(k)}|k=1,2,\cdots\}$,则当$i\neq j$时,$f_i^{(i)}\neq f_j^{(j)}$,现证$\{f_k^{(k)}(t)|k=1,2,\cdots\}$在$R$的任何有限区间上一致收敛。

任取区间$[a,b]$,则存在自然数r,使得$[a,b]\subset[-r,r]$,由于$\{f_k^{(k)}|k=r,r+1,\cdots\}\subset\{f_k^{(r)}|k=1,2,\cdots\}$,而$\{f_k^{(r)}(t)|k=1,2,\cdots\}$在$[-r,r]$上一致收敛,所以$\{f_k^{(k)}(t)|k=1,2,\cdots\}$在$[a,b]$上一致收敛,而$[a,b]$是$R$的任何闭区间,因此$\{f_k^{(k)}(t)|k=1,2,\cdots\}$在$R$的任何有限区间上一致收敛。

5. 不动点定理,完备度量空间中的压缩映射必然存在唯一的不动点。

设X是度量空间,A是X到自身的一个映射,如果存在常数$\alpha(0\leqslant\alpha<1)$,使得对于一切$x$、$y\in X$,有

$$\rho(Ax,Ay)\leqslant\alpha\rho(x,y)$$

其中$\rho(x,y)$表示x、y的距离。则称A是X上的一个压缩映射。

如果存在$x_0\in X$,使得$Ax_0=x_0$,则称x_0是A的一个不动点。

(Banach不动点定理),设A是完备度量空间,$f:A\to A$是一映射,如果存在自然数n,使得f^n是A上的压缩映射,则f有唯一的不动点。

(Schauder不动点定理),设A是线性赋范空间,B是A中凸的紧集,$f:B\to B$是一连续映射,那么存在$x\in B$,使$f(x)=x$。

(*Schauder*不动点定理),设E是*Banach*空间,S是E中的凸闭集,$f:S\to S$是连续映射,且$f(S)$是致密集,那么存在$x\in S$,使$f(x)=x$。

§2. 向量和矩阵

假如$x_i(i=1,2,\cdots,n)$是n个实数,我们称

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$

为 n 阶实向量，n 阶实向量的全体记为 R^n。任取 x、$y\in R^n$，设

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}$$

定义：

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\cdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$$

假如 c 是一个实数，定义

$$cx=\begin{pmatrix}cx_1\\cx_2\\\cdots\\cx_n\end{pmatrix}$$

显然，R^n 按以上定义的向量加法以及向量和实数的乘法构成一个 n 维实线性空间。任取 $x\in R^n$，设

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$

定义范数 $\|x\|=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$，由 Minkowski 不等式，我们得到：$R^n$ 以及 $\|\cdot\|$ 构成 n 维实线性赋范空间，简记为 R^n。由泛函分析知识我们知道，有限维线性赋范空间是完备的，因此 R^n 以及按上述定义的范数构成 Banach 空间。

假如 $x_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$是定义在 R 上的某区间J 的 n 个实函数，则称

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\cdots\\x_n(t)\end{pmatrix}$$

为 n 阶实向量函数。因此对于任意 $t\in J$，$x(t)\in R^n$，所以我们可以定义 $x(t)$的范数

$$\|x(t)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

若 n 个实函数 $x_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,n)$都在 J 上连续（或可积），则称 $x(t)$是 J 上的 n 阶

连续(或可积)实向量函数。假如 n 个实函数 $x_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,n)$都在 J 上有界,则称 $x(t)$是 J 上的 n 阶有界实向量函数。因此,$x(t)$在 J 上有界的充分必要条件是:

$$\sup_{t\in J}\|x(t)\|<+\infty$$

令

$E=\{x\mid x(t)$是 J 上的 n 阶连续、有界的实向量$\}$

定义:

$$\|x\|=\sup_{t\in J}\|x(t)\|$$

则 E 以及范数 $\|\cdot\|$ 构成 Bannch 空间。

假如 J 的长度不小于 $h(h>0)$,令

$E_h=\{x\mid x(t)$是 J 上的 n 阶勒贝格可积实向量,而且$\sup\limits_{t\in J}\int_t^{t+h}\|x(r)\|dr<+\infty\}$

任取 $x\in E_h$,定义

$$\|x\|_h=\sup_{\substack{t\in J\\ t+h\in J}}\int_t^{t+h}\|x(r)\|dr$$

则 E_h 以及范数 $\|\cdot\|_h$ 构成 Banach 空间。

对于 $x\in R^n$,设

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$

定义 x 的转置向量 $x^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。假如

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}$$

定义 x,y 的内积 $(x,y)=x^Ty=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$,显然$(x,y)=(y,x)$,即 $x^Ty=y^Tx$。

由 Hölder 不等式得到:$|x^Ty|\leqslant\|x\|\|y\|$。

设 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$是 n^2 个实数,我们称

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

为 $n\times n$ 实矩阵,或 n 阶实方阵,n 阶实方阵的全体记为 U_n。

任取 $A,B\in U_n$,设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$$

定义

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

假如 c 是一个实数,定义

$$cA=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{pmatrix}$$

显然按以上定义的矩阵加法以及矩阵和数的乘法使得 U_n 构成 n^2 维实线性空间。

对于 $A\in U_n$, $x\in R^n$,设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

定义 A 和 x 的乘积

$$Ax=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i \end{pmatrix}$$

因此 $Ax\in R^n$,所以 $\|Ax\|$ 有意义。

任取 $A\in U_n$,定义

$$\|A\|=\sup_{\substack{x\in R^n \\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

因此 U_n 以及范数 $\|\cdot\|$ 构成 n^2 维实线性赋范空间,且每一个 n 阶矩阵 $A\in U_n$ 都可看成是 R^n 到 R^n 的一个线性算子,且对于 $x\in R^n$, $\|Ax\|\leqslant\|A\|\|x\|$。

对于 $A,B\in U_n$,设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

定义 A,B 的乘积

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, n)$。

容易验证:对于任意 A、B、$C \in U_n$, $x \in R^n$, $(AB)C = A(BC)$, $(AB)x = A(Bx)$。因此可得到:

$$\begin{aligned} \| AB \| &= \sup_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{\| (AB)x \|}{\| x \|} \\ &= \sup_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{\| A(Bx) \|}{\| x \|} \\ &\leqslant \| A \| \sup_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{\| Bx \|}{\| x \|} \\ &= \| A \| \, \| B \| \end{aligned}$$

性质 1.1 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是 n 阶实方阵,则

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \| A \| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}。$$

证明:用 e_j 表示第 j 个分量为 1,其余分量为 0 的 n 阶向量,即

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ j\ 行 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

则容易看出:

$$Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

从而 $\| Ae_j \| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\| e_j \| = 1$,则

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in R^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\geqslant \frac{\|Ae_j\|}{\|e_j\|}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

而 j 可在$(1,\cdots,n)$中任意选取,因此

$$\|A\| \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

任取 $x\in R^n$,$x\neq 0$,设

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

从而由 Hölder 不等式

$$\|Ax\| = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|$$

因此

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

而 $x\in R^n$ 是任意的,所以

$$\sup_{\substack{x\in R^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

即 $\|A\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$。

下面介绍两种特殊矩阵的范数。

性质 1.2 若 Q 是正交矩阵,则对于任意的向量 $x\in R^n$,$\|Qx\| = \|x\|$。对于任意

$A \in U_n$，$\| QA \| = \| A \|$。由此 $\| Q \| = 1$。

证明：设

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

记

$$Q^T = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

称 Q^T 为 Q 的转置矩阵。因为 Q 是正交矩阵，则 $Q^TQ = Q^{-1}Q = I$，其中 I 是单位矩阵，Q^{-1} 是 Q 的逆矩阵。因此对于任意 $x \in R^n$，

$$\begin{aligned} \| x \|^2 &= x^T x \\ &= x^T Q^T Q x \\ &= \| Qx \|^2, \end{aligned}$$

所以 $\| Qx \| = \| x \|$。则 $\| Q \| = 1$。

任意 $A \in U_n$，由于对任意向量 $x \in R^n$，

$$\begin{aligned} \| QAx \| &= \| Ax \| \\ &\leqslant \| A \| \, \| x \| \end{aligned}$$

因此 $\| QA \| \leqslant \| A \|$。

同样地

$$\begin{aligned} \| Ax \| &= \| QAx \| \\ &\leqslant \| QA \| \, \| x \| \end{aligned}$$

因此 $\| A \| \leqslant \| QA \|$，所以 $\| QA \| = \| A \|$。

性质 1.3 若 A 是实对称矩阵，A 的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 $\| A \| = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|)$。

证明：由于实对称矩阵 A 的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则存在正交矩阵 Q 满足：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

设 $|\lambda_i| = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|)(1 \leqslant i \leqslant n)$，用 e_i 表示第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的 n 阶向量，即

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} i\text{ 行}$$

取 $\xi_0 = Qe_i$，由性质 1.2 知：$\| \xi_0 \| = \| e_i \| = 1$，且

$$\| A\xi_0 \| = \| Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}\xi_0 \| = \| \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} e_i \| = |\lambda_i|$$

因此

$$\| A \| = \sup_{\substack{\xi \in R^n \\ \xi \neq 0}} \frac{\| A\xi \|}{\| \xi \|} \geqslant \frac{\| A\xi_0 \|}{\| \xi_0 \|} = |\lambda_i|。$$

又因为

$$\| A \| = \sup_{\substack{\xi \in R^n \\ \xi \neq 0}} \frac{\| A\xi \|}{\| \xi \|} = \sup_{\substack{\xi \in R^n \\ \xi \neq 0}} \frac{\| AQ\xi \|}{\| Q\xi \|} = \sup_{\substack{\xi \in R^n \\ \xi \neq 0}} \frac{\| Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \xi \|}{\| Q\xi \|}$$

$$= \sup_{\substack{\xi \in R^n \\ \xi \neq 0}} \frac{\| \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \xi \|}{\| \xi \|}$$

设

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

则

$$\| A \| = \sup_{\substack{\xi \in R^n \\ \xi \neq 0}} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \xi_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leqslant |\lambda_i|$$

所以 $\| A \| = |\lambda_i|$。至此性质 1.3 得证。

设 $a_{ij}(t)$ $(i=1,2\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$是 n^2 个定义在 J 上的实函数，我们称

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

为 J 上的 $n\times n$ 实矩阵函数。显然地,对于固定 $t\in J$,$A(t)\in U_n$,因此我们可以定义

$$\| A(t)\| = \sup_{\substack{\xi\in R^n\\ \xi\neq 0}} \frac{\| A(t)x\|}{\| x\|}。$$

若 n^2 个实函数 $a_{ij}(t)$ $(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$都在 J 上连续(或可积),则称 $A(t)$在 J 上连续(或可积),若 n^2 个实函数 $a_{ij}(t)$ $(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$都在 J 上有界,则称 $A(t)$在 J 上有界。

对于 $t\in J$,由性质 1.1,

$$\max_{i\leqslant j\leqslant n}\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}(t))^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant \| A(t)\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(t))^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

因此 $A(t)$在 J 上有界的充分必要条件是

$$\sup_{t\in J}\| A(t)\| <+\infty$$

令

$F=\{A\,|\,A(t)$是 J 上有界连续的 $n\times n$ 实矩阵函数$\}$。

任取 $A\in F$,定义:

$$\| A\| = \sup_{t\in J}\| A(t)\|$$

则 F 以及范数 $\|\cdot\|$ 构成 *Banach* 空间。

假如 J 的长度不小于 $h(h>0)$,令

$F_h=\{A\,|\,A(t)$是 J 上勒贝格可积的 $n\times n$ 实矩阵函数且

$$\sup_{\substack{t\in J\\ t+h\in J}}\int_t^{t+h}\| A(r)\| dr<+\infty\}.$$

任取 $A\in F_h$,定义 $\| A\|_h=\sup\limits_{\substack{t\in J\\ t+h\in J}}\int_t^{t+h}\| A(r)\| dr$

则 F_h 以及范数 $\|\cdot\|_h$ 构成*Banach* 空间。

§3. 常微分方程基础理论

研究常微分方程理论最基本的问题之一是解的存在性和唯一性,为了叙述它,我们先引入下列不等式。

命题 1.1. (Bellman 不等式),设 $\varphi,\psi:J\rightarrow R^+$ 是局部可积函数,其中 $R^+=[0,+\infty]$,$M>0$,$t_0\in J$,且对于任意 $t\in J$,

$$\varphi(t)\leqslant M+\left|\int_{t_0}^{t}\varphi(r)\psi(r)dr\right|$$

则对于任意 $t\in J$,有

$$\varphi(t)\leqslant M\exp\left(\left|\int_{t_0}^{t}\psi(r)dr\right|\right)$$

证明:令

$$g(t)=\int_{t_0}^{t}\varphi(r)\psi(r)dr$$

若 $t\geqslant t_0$,对于任意 $\tau\in[t_0,t]$,由于

$$\varphi(\tau)\leqslant M+\int_{t_0}^{t}\varphi(r)\psi(r)dr=M+g(\tau)$$

而 $M+g(\tau)>0$,因此

$$\frac{\varphi(\tau)}{M+g(\tau)}\leqslant 1$$

两边乘以 $\psi(\tau)$,再从 t_0 到 t 积分,得到:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi(\tau)\psi(\tau)}{M+g(\tau)}d\tau\leqslant\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau$$

即

$$\ln[M+g(t)]-\ln M\leqslant\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau$$

也就是

$$M+g(t)\leqslant M\exp(\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau)$$

又 $\varphi(t)\leqslant M+g(t)$,因此

$$\varphi(t)\leqslant M\exp(\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau)=M\exp(\left|\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau\right|)$$

若 $t<t_0$,对于任意 $\tau\in[t,t_0]$,从不等式

$$\varphi(\tau)\leqslant M+\left|\int_{t_0}^{\tau}\varphi(r)\psi(r)dr\right|=M-g(\tau)$$

以及 $M-g(\tau)>0$,得到:

$$\frac{\varphi(\tau)}{M-g(\tau)}\leqslant 1,$$

两边乘以 $\psi(\tau)$,再从 t 到 t_0 积分,得到:

$$\int_{t}^{t_0}\frac{\varphi(\tau)\psi(\tau)}{M-g(\tau)}d\tau\leqslant\int_{t}^{t_0}\psi(\tau)d\tau$$

即

$$\ln M-\ln[M-g(t)]\geqslant\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau$$

也就是:

$$M-g(t)\leqslant M\,exp(-\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau)$$

又 $\varphi(t)\leqslant M-g(t)$,则

$$\varphi(t)\leqslant Mexp(-\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau)=Mexp(\left|\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau\right|)$$

因此对任意 $t\in J$,