数学方法趣引

孙澤瀛编

上海科学技术出版社

序

一般人認為數學是由一堆複雜的式子，奇怪的記號以及不習慣的術語所湊成的學問，尤其近來的數學專在符號、式子裏面打圈子．一般沒有數學修養的人，一看見這些符號、式子就覺頭痛，更說不上接近牠了．不錯，符號與式子是數學發展上不可或少的工具．如果沒有這些數學符號和式子，我們不可能有今天數學的這種輝煌成績，但是這祇有對數學有修養的人纔講得通．對於一般望符號和式子而生畏的人們，想叫他們知道數學的作用而引起興趣，就不得不從另一方面設法了．

其實，所謂式子、符號等等，全是為了說明上的便利，受一定約束的語言吧了，語言是表達普通思想的工具，那麼數學裏的符號與式子，也不過是表達數學思想的工具．從一個數學符號到另一個數學符號，從一個數學式子到另一個數學式子，其間的聯絡與過程，就是數學思想的運用．這種數學思想的運用，或者可以說數學的方法，不能不說是數學的核心所在了．

這種數學方法能幫助我們對事物作精細嚴密的分析而得到正確的結論．一切科學的進展，就是靠這種方法的．我們試看看一切嚴密性的科學規律，如果是僅憑了一點觀察而歸納出來的結果，那麼牠的正確性也就很成問題了．人的壽命有限，同時要

受地域的限制．因了這種時間與空間的限制，他就不能遍察一切現象．再說人類之有文化，也不過數千年的光景，以這種短短的時間想遍察悠久的宇宙現象，能辦到嗎？因此專憑觀察所得的結論，時常會掛一漏萬，不十分靠得住的．要想補救這項缺憾，就不能不靠數學方法了．這在一切自然科學上，隨處都可以找出這種數學方法運用的痕跡．

爲了使得不習慣於數學符號與式子的人們，初步了解數學方法，引起一般人對數學的興趣起見，所以寫了這本書，牠的內容是對於幾個與近代數學有關的典型問題，儘量地少用數學式子與符號，而代之以通俗的語言，去探求解決的途徑．在解決問題的過程中，我們可以看出數學的觀察與思攷，究竟是怎樣一囘事．

編者深爲抱憾的，是書內所舉的例證，都是外國的．編者也曾想多舉一些本國的或現代的例子，但限於學識，找不到適當的資料，有力不從心之苦．這一點希望以後有人能從這方面工作，那麼本書就算收到拋磚引玉的效果了．

末了，我要感謝中國科學院數學研究所所長華羅庚先生以及該所內審查本書的工作同志．他們都提了很寶貴的意見，同時他們認爲本書還不是太無聊的東西，再加以國內有關近代數學的通俗讀物很缺，所以引起編者付印的決心．以編者的淺薄，內容不洽當的地方，定難避免，深盼讀者指正，批評．

孫澤瀛

1952年11月於上海

目次

哥尼斯堡七橋問題

脈　　絡

哥尼斯堡(1)是以前東德意志的首城,現在是蘇聯的加里寧格勒城. 在第一次世界大戰時,這地方對於已沒落的普魯斯王朝有很深的淵源. 在第二次世界大戰爆發,德軍侵入波蘭時,這裏更是必經之地,在報章上,常常可以見到該城的名字;後來蘇聯大軍也是從此地打進德國的,而且哥城又是著名唯心派哲學家康德(2)的出生地;這位怪脾氣的哲學家,終生竟沒有離開哥城一步. 想不到這樣一個富於歷史意義的古城,竟又會和傳說裏的一個有名數學問題發生關係——所謂哥尼斯堡七橋問題.

哥城中有一條河,叫布勒格爾河,横貫城區. 在這條河上,共搭有七座橋,如圖1所示的. 這條河有二條支流——稱爲新河、舊河——在城中心會合,成爲一條主流,我們叫牠爲大河. 在新舊兩河合流的地方,中間有一個島形的孤立地帶,這是城市繁盛的商業中心. 由於這條布勒格爾河流的分佈情形,全城分爲北區、東區、南區以及當中的島區,一共四個區域. 這四個區域分別由上述的七座橋連繫着. 爲簡單起見,我們不妨稱這七座橋

(1) Königsberg　　(2) Kant

爲第一橋、第二橋等等。

所謂七橋問題是這樣的：一個人要把這七座橋通通走過而不許在同一座橋上來囘通過二次，如何走法，纔能夠完成。爲使這個問題更容易了解起見：設想有一隊工兵，因戰略關係，奉命破壞這七座橋。上面下的命令是：將滿載炸藥的卡車，駛過一座橋，就得炸燬該橋，不許遺漏一座橋。

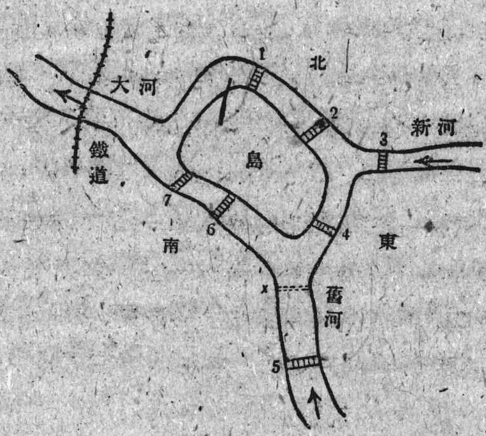


圖 1

這一隊工兵奉了命令，怎樣辦呢？試試看吧！從中間的島區出發，過第一橋開到北區，再過第二橋又囘到島區，過第七橋進入南區，駛過第六橋折囘中間的島區。現在祇剩下第四橋還可以通過，於是進到東區。這時未曾破壞的橋祇有第三與第五兩座橋了。由第三橋到北區；可是在北區的第一、二、三座橋全給燬了，不能再通過，成了一塊死地，走不出來，而剩下的第五橋就無

法去破壞了．這樣走法不成，還是由東區過第五橋進入南區吧，但是眼望着第三橋在那邊無法去炸燬，這樣還是不成．另外再換一條路線吧．由北區出發過第一橋、第七橋、第五橋、第三橋，入中央島區、南區、東區而折回到北區，再過第二橋進入島區，如果過第六橋進到南區，第四橋就無法通過了．如果過第四橋入東區，那麼第六橋又剩下了．這樣走法仍舊不行．

問題還眞不容易解決呢！假使我們把每一條可能走的路線都試試看．察一察到底要試多少回．這等於把 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 七個不同的數字，按照所有的不同排列方法排起來．這種排法共有 $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ 種．請問要是那個工兵隊把每一條可能走的路線都去試試，這得費多少時間；而且是不是其中有一條能夠如願以償，還屬未定之天．

據傳說大數學家外婁(1) 曾立刻下過斷語，說哥尼斯堡的七座橋，如照上述規約的走法，是不可能的．這眞是驚人大胆的斷語了．

外婁作此斷語，當然不是把那 5040 條不同的路線，一一試過，碰壁之後才說的．否則，那也就不稀奇了．他是仗着一種極巧妙的想法，馬上就可以得到結論的．現在讓我們來談談這種巧妙的想法吧．

爲簡單起見，先把哥城的市區圖簡化一下，如圖 2 所示的一樣．以 A 代表中央的島區，B, C, D 分別代表北東南三區；橋的名

(1) Euler

稱照舊. 像這樣以小小的點表示地區,以曲線弧或直線線段表示聯絡各區的橋樑,這對於整個問題的內容,並無改變之處. 這樣一來,七橋通過問題,變成了圖 2 是不是可用一筆勾出來——所謂一筆畫——的問題了.

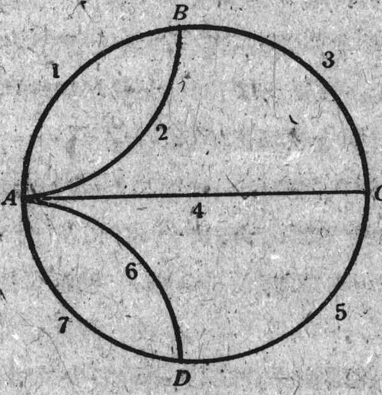


圖 2

現在讓我們對上圖作一般的考察: 在圖上,有好幾個點以及聯結這些點的好幾根線. 聯結兩點的線不限於只有一條,而且任何兩點,起碼有一條線聯結牠們. 像這種圖形,因爲缺少適當的名詞去稱呼牠,我們不妨叫牠作「脈絡」. 對於一個脈絡,是不是可用一筆把牠全描畫出來? 這是我們所要討論的問題. 所謂一筆描畫,就是說同一條線不許畫兩囘而把全體脈絡連續地勾畫出來.

假使一個脈絡可以一筆描畫出來, 那麼這個脈絡中必有一點是起點,另一點是終點,其他各點是通過點. 現在比方說 A 是起點. 如果在 A 點交會的線不祇一條,那麼由 A 點沿一條線畫出去,再沿另一線畫囘來,此後更沿另一線重新畫出去,非這樣不可. 否則進來後而不再出去,這與 A 點爲起點之假設不合. 因此,最初是畫出去, 然後進出, 進出若干次, 結局把在 A 點集中

的所有線全過完爲止，最後一次必須是出去．所以在 A 點集中的線必須是一根、三根、或五根等等，換言之，必需是奇數的線分在 A 點集中．至於終點的情形，則正與此相反，先是進來，然後出進，出進若干次，最後一次必是進來而回到原點．結果在該點集中的線分仍舊必須是奇數條．還有一種情形，就是起點與終點是同一點的時候，換言之，由一點畫起，最後仍畫回到該點止．這時是先出後進．中間或許經過幾次的進出，結局仍回到本點．因此在該點集中的線分，必須是偶數條．通過點的情形，是先進來，然後出去進來幾次，而最後一次是出去，所以集中的線分是偶數條．

由於以上的攷察，我們知道一個脈絡中的點可以分爲兩種：一種是偶數條線分所集中的；一種是奇數條線分所集中的．爲方便起見，不妨稱前者爲偶點，後者爲奇點．這種觀察與劃分，是解決問題的關鍵．

從上面的分析，我們得到如次的結論：

(一)一個脈絡如果可以一筆勾畫出來，則該脈絡中奇點的數目是 0 或者 2．

根據這個結論，我們很容易看出：哥城的七橋是不能夠如假設的條件一般地通過的．因爲 A，B，C，D 四點都是奇點．

此外，不能用一筆勾畫出來的脈絡，還有下面三種（圖 3）．因爲每一個脈絡內之奇點都是四個．

上面的結論，很簡單地把一筆畫的問題順利地解決了．讀者

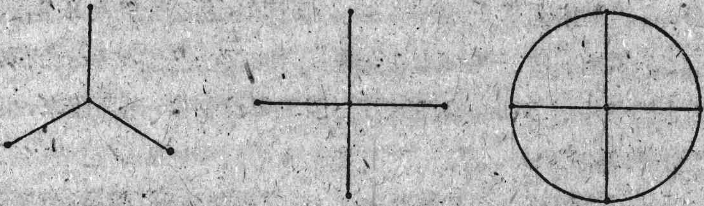


圖 3

請想想看：要解決哥城的七橋問題，不用思想的人要把 5040 條可走的路線一一試過方才曉得成與不成。而具有數學頭腦的人，他祇要計算一下脈絡內奇點的數目就立刻可以得到解答，兩者之繁簡與難易，其相差何啻天淵之別。數學之功效在此。

以上的結論，我們尙認爲不完全，除非我們還能保證：

(二) 奇點之數目如果是 0 或 2 的話，則脈絡可以一筆勾畫出來。

(一)與(二)這兩事項，說明了一筆畫的充要條件，這在數學上是非常重視的。這好比說人是動物，也就是說動物是人的必需條件，但動物是不是限定人呢？當然不是，所以動物不是人的充分條件。

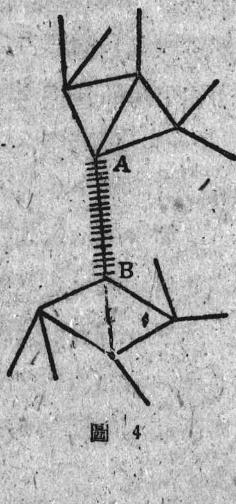


圖 4

現在讓我們來證明(二)這椿事項吧：

第一、先假定奇點的數目是 0，換言之，就是脈絡內所有的點都是偶點。此時隨意取一點 A 作爲起點，由 A 畫起，畫一條

線 AB. 然後再以 B 作爲起點,如果殘留的線可以一筆勾成的話,問題就解决了. 也就是說如果把 AB 線撤去,這樣所得到之脈絡內少了一條線. 這少了一條線的脈絡如能一筆勾成的話,(二)當然就成立了.

把 AB 線撤去後,所成的脈絡中, A 點與 B 點都變成奇點了,其他各點仍舊是偶點,所以新成的脈絡中有兩個奇點,這種脈絡讓我們在以下的第二項情形內去討論牠. 但在此有一點值得注意的,就是如果把線撤去後,新脈絡分割成爲兩個毫無聯絡的孤立部份,則一筆畫自然不會成功. 實際上,我們不必爲此担心. 因爲要是新脈絡分割爲兩個各不相同的部份時,則這兩個部份脈絡分別以 A 及 B 點爲唯一的奇點. 但這絕不可能發生的,因爲一個脈絡絕不會祇有一個奇點的. 這樁事情以後我要仔細補證的.

第二、其次假設奇點之數目是 2. 以 A 及 L 代表這兩點. 設以 A 爲起點,沿 AB 線畫至隣接之偶點 B,現在把 AB 線撤去.

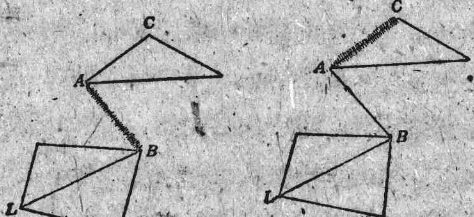


圖 5

剩餘部份所成的脈絡內,A 成爲偶點,B 成爲奇點．此時,此新脈絡內有兩個奇點 B 與 L,若以 B 爲起點,能一筆勾成,則(二)自然成立．但如將 AB 線撤去後,新成之脈絡分裂爲兩部,則絕對不能一筆勾成,故不能不另打主意．現在假使餘下的新脈絡眞的分裂爲二部,則奇點 B 與原來的奇點 L 不能不屬於同一部分;否則每一部份有一個奇點,這是不可能的(原因見後)．兩個奇點 B 與 L 旣在同一部份內,則包含 A 點的另一部份必定都是偶點所成的．所以在 A 點的隣近必有一偶點 C,把 AC 線撤去後而不致於使這個全含偶點的部分再分裂爲二(見第一)．由於這項觀察,爲了避免因 AB 線撤去後而引起的分裂現象,現在重新訂正我們的辦法:不把 AB 線撤去而把 AC 線撤除,這樣一來,不致使餘留部份所成的脈絡分裂了,此時線比原來的脈絡少了一條．最後還有一個情形不能不攷慮到,就是 A 點的隣近沒有偶點存在,這時 A 與 L 之間有奇數條的線聯絡着,如圖 6 所表示的．因此祇要沿 AL, LA, AL, LA, … 來回地描畫奇數囘,仍舊囘到 L 點,再從 L 點開始,一筆勾出其餘的部份就好了,但是後面一半的手續按照前法是可以作下去的.(因爲餘下的脈絡,其奇點之數等於 0 之故)．

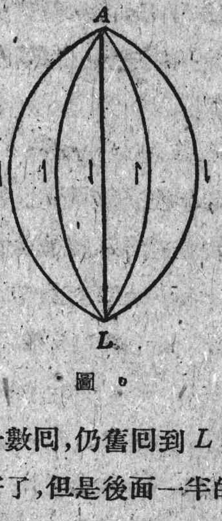


圖 6

總結:　一個脈絡無論是沒有奇點或有兩點奇點,我們利用上

述的第一、第二的方法，重複地操作下去，原脈絡不會分裂而奇數之數永遠是二。可是聯絡線的數目每回減少一條，最後達到了祇剩下一條線。一條線當然可以一筆描畫了。討論至此，可告完全結束。

剩下的一個問題，就是以前保留而未加證明的，這就是：

祇有一個奇點的脈絡絕不存在。

要證明這項事實，我們絕不能遝畫幾千個脈絡試試看。如果因爲我們千方百計地想畫一個祇有一奇點的脈絡而不可能時，遂驟然下如上的斷言，這是非常冒險的。因爲你不能畫出時，絕不能肯定別人也不能畫出。這種純主觀的態度就是非科學的，尤其是非數學的。那麽數學的證明方法又是怎樣的呢？這就要借重精密的觀察與謹嚴的思致了。

讓我們先調查一下集中於脈絡各點的線數，這必需一個點，一個點地調查。如果這種集中於各點的線數，其總和以 T 記之，則 T 等於該脈絡中線數之二倍。這因爲一線 AB，可視爲集中於 A 點之線，也可視爲集中於 B 點之線。因此同一線須要計算二回。舉一個例，就說哥城的脈絡吧。由 A 點出發的線有 5 條，自 B, C, D 各點出發的線各 3 條。其總數爲 $5+3+3+3=14$，亦即線數 7 之二倍。

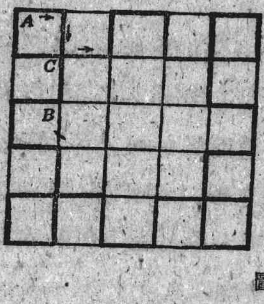
總和 T 既然是線數之二倍，所以是一個偶數。更就 T 之內容再加分析：裏面包含自偶點出發的線數與自奇點出發的線數。前者自然是偶數，而後者因此也必爲偶數，因爲自偶數減去偶數，

所餘下的也必爲偶數.

自所有奇點出發的線數既然是偶數,我們暫以 T_1 記之. 現在從每一個奇點出發之線數中除留一條外,其餘偶數條從 T_1 中減去,所剩下的當然仍爲偶數,這因爲偶數減偶數,其差必爲偶數.這個差數,以 T_2 記之.

每一個奇點的地方,祇留下一條線,這種線數目的總和是 T_2. 現在已知 T_2 是偶數,也就是說奇點之數是偶數.因此,我們得到如下的結論:無論那一個脈絡,其奇點之總數必爲偶數.所以任何一個脈絡,其奇點之數是 0(看作是偶數),2,4,6,…而絕不會是 1,3,5,…. 從此,得到前述事項之完全證明.

以上將脈絡的一筆畫問題,完全解决了. 現在再舉幾個例證:



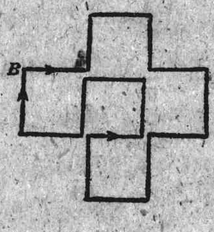


圖 7

一個棋盤的周圍有許多奇點,因此一筆勾畫不出來. 就如最簡單的田字,就一筆寫不出來. 但如把周圍的方格間隔開一個再畫的話,就可以一筆畫出,因爲這時沒有奇點了. 例如圖 7 自 A 點出發畫起沿着粗線順箭頭畫下去,一直畫到 B 點. 再畫中

央的十字架部份，如圖 7 所示的箭頭方向，回到 B 點. 此後由 B 經 C 而畫至 A 點. 全圖就算一筆畫完了.

再如圖 8 所示的一串圖形，因為只有兩個奇點，也可以一筆畫成. 此外圖 9 的三角網狀圖形，也很容易一筆畫成的.

開始提到的哥城地圖，如果南區與東區之間，再搭上一座橋的話(圖 1 有 × 記號，點線之處)則脈絡圖如圖 10 所示. 此時奇點只有 A, B 兩點. 因此八座橋是很容易地一次走完. 例如自

圖 8

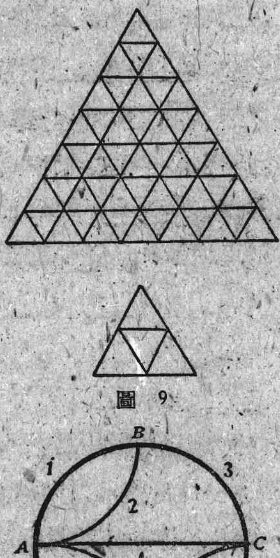


圖 9

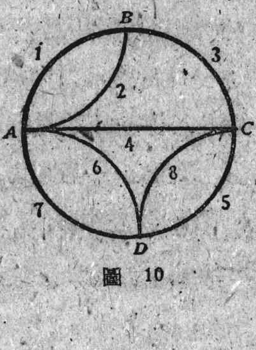


圖 10

A 點出發沿 1 3 5 7 4 8 6 2 的順序就成.

附帶地還有幾點事實必須提到的，就是脈絡中奇點之數必爲偶數. 如果那數目是 0 或 2，則一筆可以畫成；如果數目是 4 或 6 等，則需幾筆才可畫成呢？以下就這問題討論一下：根據以前的事實，有 4 個奇點的脈絡祇需二筆可以畫成. 因爲這時這個脈絡可以看作是各含有兩個奇點的兩個脈絡，互相連繫着的. 這兩個脈絡各可以一筆勾成，因此全體祇要兩筆就行了. 同樣含有 6 個奇點的脈絡需三筆纔可勾成. 一般地，有下面的定理：含有 $2n$ 個奇點的脈絡 ($n \neq 0$)，需要 n 筆畫成.

再附帶地說明一樁事實：就是無論那一個脈絡，如果每一線允許通過二遍的話，則一氣可以畫成. 這原因很簡單，因爲這時每一線都當作二重線看，各點全變成偶點了. 打一個比方，例如城市裏的電車路線都是雙軌的話，則全個線路可以不遺漏地連續通過.

迷　陣

三國時代諸葛亮困陸遜的八陣圖，傳說得神奇非常，據我們想來，也許是一種很複雜的陣營，使敵人走進後，路途迷失，不容易走出. 西洋也有一種類似的叫着迷宮[1]. 據傳說，世界上七個不可思議的東西之一，就是埃及的迷宮. 此外羅馬郊外有一種地下墓道，通路很複雜，分歧很多，進去容易出來難，這和迷宮是

(1) Labyrinth

一類的．以前更有些貴族爲了娛樂的原因，在他們的庭園裏造出一些迷宮的模型．在我國舉辦的盛大展覽會場中，爲了提高觀衆的興趣，也有用籬笆搭成的迷陣．例如1951年春季在杭州舉辦的浙江省土產展覽會場，就有一種簡單的迷陣．

圖11是現存的英國倫敦漢卜騰庭園[1]的迷陣圖樣，黑線表示籬笆，白的空隙表示通路，迷陣的中央處有二根高柱，下面有椅子，可供休息之用．A是進出口．

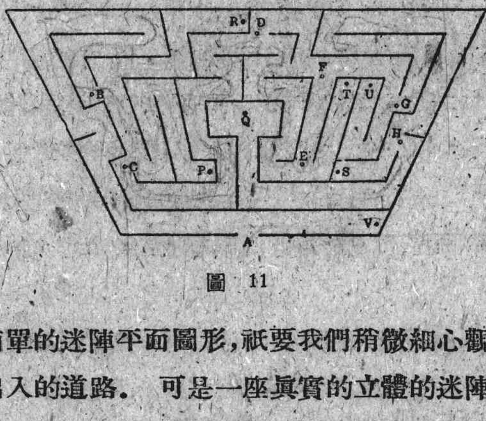


圖 11

像這種簡單的迷陣平面圖形，祇要我們稍微細心觀察一下，就不難得到出入的道路．可是一座眞實的立體的迷陣，有許多牆垣、籬笆擋在眼前．道路的分歧與曲折不能如平面圖一樣地一眼看到．那就會隨處碰壁，東拐西穿，弄得進去出不來．爲了這種原因，對於迷陣的通路的連絡，不能不先作一般性的考察．爲了簡單起見，我們仍利用圖11來說明．

在迷陣裏面，有兩處值得注意的，就是碰壁的地方，與分歧路

(1) Hampton Court