上海交通大学学术出版基金资助

矢量新说

A New View on Vectors

桂祖华 著

上海交通大学出版社

上海交通大学学术出版基金资助

矢量新说

（A New View on Vectors）

桂祖华　著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是对矢量进行深入研究与探讨的学术著作。全书共分五章，引进了矢量倍积、轮换矢量、广矢量和二重矢量等新概念，指出了它们在几何方面的应用，并提出解决几何问题的新方法。本书内容翔实，概念清晰，思路开阔，别具一格，理论与实际并重，方法独特，应用简便。

本书可供对空间解析几何的爱好者以及有志于研究数学的大学生、研究生、教师及科研工作者学习或参考。

图书在版编目(CIP)数据

矢量新说＝A New View on Vectors/桂祖华著.
—上海:上海交通大学出版社,2009
上海交通大学学术出版基金资助项目
ISBN978-7-313-05472-2

Ⅰ.矢…　Ⅱ.桂…　Ⅲ.矢量—研究　Ⅳ.O183.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 168189 号

矢量新说
(A New View on Vectors)
桂祖华　著
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 951 号　邮政编码 200030)
电话:64071208　出版人:韩建民
上海交大印务有限公司 印刷　全国新华书店经销
开本:880mm×1230mm 1/32　印张:8.75　字数:246 千字
2009 年 4 月第 1 版　2009 年 4 月第 1 次印刷
印数:1～1 760
ISBN978-7-313-05472-2/O·223　定价:19.00 元

人必须确信，如果他是在给科学添加许多新的术语而让读者接着研究那摆在他们面前的奇妙难尽的东西，那么他就已经使科学获得了巨大的进展。

柯西(Cauchy)

前　言

本书是作者继**“微积分新探”**(**New Exprolation on Calculus**)(上海交通大学出版社出版,2004)后,又一本关于高等数学方面的教学与研究工作的回顾与总结,它同样是一本有趣和值得深入探讨的学术著作.

大家知道**解析几何**(或称**坐标几何**)把数学造成一个双面的工具.几何概念可用代数表示,几何的目标可通过代数达到.反过来给代数语言以几何的解释,可以直观地掌握那些语言的意义,又可以得到启发去提出新的结论.**拉格朗日**曾把这些优点讲述为:“只要当这两门科学结合成伴侣时,它们就互相吸取新鲜的活力,从那以后就以快速的步伐走向完善.”解析几何的这个创造是数学中最丰富、最有效的设想之一.由于矢量概念的引进,用它代替坐标,使几何问题在不改变固有内在几何性质的前提下,表示与叙述在形式上变得更为简洁,且便于将问题推广到高维空间去.因此用矢量作为工具代替坐标,又使解析几何前进了一大步.

1　已知结果

(1) 直线方程 $L: x-x_0 : y-y_0 : z-z_0 = l:m:n$(坐标表示)或

$$x=x_0+tl, y=y_0+tm, z=z_0+tn.$$

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}=(x,y,z), \boldsymbol{R}_0=(x_0,y_0,z_0),$$

$$\boldsymbol{E}=(l,m,n)\text{(矢量表示)或}$$

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\text{,其中 }\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{E}.$$

(2) 平面方程 $M: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$(坐标表示)或

$$Ax+By+Cz+D=0\text{,其中 }D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)\cdot\boldsymbol{N}=0, \boldsymbol{R}_0=(x_0,y_0,z_0), \boldsymbol{N}=(A,B,C)\text{(矢量表示),或}$$

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}=p\text{,其中 }p=Ax_0+By_0+Cz_0.$$

(3) 设 $\boldsymbol{R}=(x_1,x_2,\cdots,x_h)$,$\boldsymbol{R}_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{h0})$,$\boldsymbol{E}=(e_1,e_2,\cdots,$

e_h),$\boldsymbol{N}=(n_1,n_2,\cdots,n_h)$,

上述(1)、(2)在不改变矢量表示形式的情况下可推广到 h 维空间.显然要比用坐标表示来得简洁.但是就现有已知常规的矢量运算法则,还存在不少缺陷与不足.有时很难甚至于无法处理如下提出的一些问题.为此我们需要对矢量运算法则做进一步的探讨与研究.

本书引进了矢量倍积、轮换矢量、广矢量和二重矢量等新概念.巧妙地解决了下面提出的问题.并且指出广矢量和二重矢量是矢量的两种不同形式的的推广.

2 问题提出

问题 1 二次曲面(如椭球面 $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$)甚至更加高次曲面如何用矢量表示?

问题 2 直线(或平面)与二次(或高次)曲面的交集问题如何直接用矢量方法来处理?

问题 3 如何将几何元素:点、直线和平面视为等同的元素用矢量方法来统一地讨论它们相互之间的几何特性?

本书第1章用符号 P,L 和 M 分别表示点、直线和平面.用统一的公式 $Q_1Q_2,d(Q_1,Q_2)$ 计算几何元素 Q_1,Q_2 之间的方程与距离,其中 Q_1,Q_2 分别取自 P_1,L_1,M_1 和 P_2,L_2,M_2.

问题 4 如何推广**拉格朗日**定理? 设 $\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为 $2n$ 个矢量,则

(1) $D(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2;\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2)=(\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2)\cdot(\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{B}_2)$.

(2) $D(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3;\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3)=[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3][\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3]$.

(3) $D(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n;\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n)=0(n\geqslant4)$,

其中

$$D(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n;\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_n\\ \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_n\cdot\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_n\cdot\boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_n\cdot\boldsymbol{B}_n\end{vmatrix}$$

(n 阶行列式).

(1) 是大家知道的**拉格朗日**定理.(2)容易证明.(3)如何证明?

问题 5　(1) 设 $\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j(j=1,2,\cdots,2n+6)$ 为 $(4n+12)$ 个矢量，试证　① $F(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_{12})F(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_{12})$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_7\cdot\boldsymbol{B}_7 & \boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_7\cdot\boldsymbol{B}_8 & \cdots & \boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_6+\boldsymbol{A}_7\cdot\boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_8\cdot\boldsymbol{B}_7 & \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_8\cdot\boldsymbol{B}_8 & \cdots & \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_6+\boldsymbol{A}_8\cdot\boldsymbol{B}_{12}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_6\cdot\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_{12}\cdot\boldsymbol{B}_7 & \boldsymbol{A}_6\cdot\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_{12}\cdot\boldsymbol{B}_8 & \cdots & \boldsymbol{A}_6\cdot\boldsymbol{B}_6+\boldsymbol{A}_{12}\cdot\boldsymbol{B}_{12}\end{vmatrix},$$

其中 $F(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_{12})$

$$\begin{aligned}=&[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3][\boldsymbol{A}_{10},\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12}]-[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_4][\boldsymbol{A}_9,\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12}]+\\ &[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_5][\boldsymbol{A}_9,\boldsymbol{A}_{10},\boldsymbol{A}_{12}]-[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_9,\boldsymbol{A}_{10},\boldsymbol{A}_{11}]+\\ &[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4][\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12}]-[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_5][\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_{10},\boldsymbol{A}_{12}]+\\ &[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_{10},\boldsymbol{A}_{11}]+[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_5][\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_9,\boldsymbol{A}_{12}]-\\ &[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_9,\boldsymbol{A}_{11}]+[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_5,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_9,\boldsymbol{A}_{10}]-\\ &[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12}]+[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_5][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_{10},\boldsymbol{A}_{12}]-\\ &[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_{10},\boldsymbol{A}_{11}]-[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_5][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_9,\boldsymbol{A}_{12}]+\\ &[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_9,\boldsymbol{A}_{11}]-[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_5,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_9,\boldsymbol{A}_{10}]+\\ &[\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_5][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_{12}]-[\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_{11}]+\\ &[\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_5,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_{10}]-[\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_5,\boldsymbol{A}_6][\boldsymbol{A}_7,\boldsymbol{A}_8,\boldsymbol{A}_9].\end{aligned}$$

② $$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_{n+4}\cdot\boldsymbol{B}_{n+4} & \boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_{n+4}\cdot\boldsymbol{B}_{n+5} & \cdots & \boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_{n+3}+\boldsymbol{A}_{n+4}\cdot\boldsymbol{B}_{2n+6}\\ \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_{n+5}\cdot\boldsymbol{B}_{n+4} & \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_{n+5}\cdot\boldsymbol{B}_{n+5} & \cdots & \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_{n+3}+\boldsymbol{A}_{n+5}\cdot\boldsymbol{B}_{2n+6}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n+3}\cdot\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_{2n+6}\cdot\boldsymbol{B}_{n+4} & \boldsymbol{A}_{n+3}\cdot\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_{2n+6}\cdot\boldsymbol{B}_{n+5} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n+3}\cdot\boldsymbol{B}_{n+3}+\boldsymbol{A}_{2n+6}\cdot\boldsymbol{B}_{2n+6}\end{vmatrix}$$

$=0\quad(n\geqslant4)$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为 $2n$ 个矢量，试证

① $$\{[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4]-[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4]+[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_4]-[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3]\}\cdot$$
$$\{[\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4]-[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4]+[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_4]-[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3]\}$$

$$=\begin{vmatrix}1+\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_1 & 1+\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_2 & 1+\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_3 & 1+\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_4\\ 1+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_1 & 1+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_2 & 1+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_3 & 1+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_4\\ 1+\boldsymbol{A}_3\cdot\boldsymbol{B}_1 & 1+\boldsymbol{A}_3\cdot\boldsymbol{B}_2 & 1+\boldsymbol{A}_3\cdot\boldsymbol{B}_3 & 1+\boldsymbol{A}_3\cdot\boldsymbol{B}_4\\ 1+\boldsymbol{A}_4\cdot\boldsymbol{B}_1 & 1+\boldsymbol{A}_4\cdot\boldsymbol{B}_2 & 1+\boldsymbol{A}_4\cdot\boldsymbol{B}_3 & 1+\boldsymbol{A}_4\cdot\boldsymbol{B}_4\end{vmatrix}.$$

$$② \begin{vmatrix} 1+\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_1 & 1+\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_2 & \cdots & 1+\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_n \\ 1+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_1 & 1+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_2 & \cdots & 1+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+\boldsymbol{A}_n\cdot\boldsymbol{B}_1 & 1+\boldsymbol{A}_n\cdot\boldsymbol{B}_2 & \cdots & 1+\boldsymbol{A}_n\cdot\boldsymbol{B}_n \end{vmatrix}=0 \quad (n\geqslant 5).$$

上述记号“·”,“×”和“[]”分别表示矢量的数量积、矢量积和混合积.

问题 6 当 n 为奇数时,如何将**数量的牛顿二项式**

$$(a+b)^n=a^n+b^n+C_n^1(a^{n-1}b+ab^{n-1})+\cdots$$
$$+C_n^{(n-1)/2}(a^{(n+1)/2}b^{(n-1)/2}+a^{(n-1)/2}b^{(n+1)/2}),$$
$$(a-b)^n=a^n-b^n-C_n^1(a^{n-1}b-ab^{n-1})+\cdots$$
$$+(-1)^iC_n^i(a^{n-i}b^i-a^ib^{n-i})+\cdots$$
$$+(-1)^{(n-1)/2}C_n^{(n-1)/2}(a^{(n+1)/2}b^{(n-1)/2}-a^{(n-1)/2}b^{(n+1)/2}),$$

其中 $C_n^i=n!/i!(n-i)!$.

当 n 为偶数时…,

推广为**矢量的牛顿二项式**.

问题 7 如何推广

(1) **斯托克斯**定理 $\iint\limits_S \mathrm{rot}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}S=\int\limits_C \mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}$.

(2) **高斯**定理 $\iiint\limits_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{f}\mathrm{d}v=\iint\limits_S \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}S$,

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{R})=(f_1,f_2,f_3)$;$f_j=f_j(x,y,z)(j=1,2,3)$;$\boldsymbol{R}=(x,y,z)$;$\boldsymbol{N}=(n_1,n_2,n_3)$;$C$,$S$ 和 Ω 分别为空间的曲线、曲面和区域,并且 C 为 S 的边界曲线;S 为 Ω 的边界曲面.

问题 8 如何将广矢量的线性相关概念与空间几何元素之间建立有趣的对应关系,对几何问题的解决提供新的方法?

本书是**解析几何**(即**坐标几何**)和常规**矢量代数**的一种简化、补充和发展.

本书绝大部分内容都是首次发表的,旨在抛砖引玉,使读者在学习、教学,以及在数学研究与实践工作中,在开拓思路,活跃思维创新能

力等方面得到启发与帮助. 本书对矢量理论有所创新,得到了不少新的结果,提出了许多新概念,因此如有不足,甚至错误,恳请读者批评与指正.

从全书的构思、写作、修改、定稿直至出版,前后有十余年. 在写作过程中作者最大最深的体会是:数学的内在美和数学的无穷乐趣. 真正感到数学研究无止境. 还有大量工作有待我们进一步去思考、探索与研究.

本书得到上海交通大学学术出版基金资助. 作者对出版社韩正之教授为提高本书出版质量所做的出色工作和责任编辑孙岐昆高工的辛勤劳动表示衷心感谢.

本书献给我的小爱孙 Evan Gui,祝愿他健康成长,永远快乐.

作 者

2008 年 7 月

目　　录

1 矢量回顾

我们假定读者对于三维空间里的矢量概念已经熟悉. 知道如何在直角坐标系里,利用分量来表示矢量,知道有关矢量代数的各种运算. 这里仅对矢量概念作简单回顾.

1.1 矢量概念

1.1.1 矢量

从点 T 到点 U 的一个有向直线段,用矢量$\overrightarrow{TU}$表示,它具有长度和方向(见图 1-1).

两个矢量相等是指它们有相同长度和相同方向(与矢量的起点无关,即自由矢量).

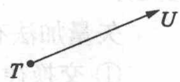

图 1-1

注 1.1 为方便起见,本书用黑斜体大写英文字母来表示矢量. 如

$$\boldsymbol{A}=\overrightarrow{TU}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=(a_1,a_2,a_3),$$

其中 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$为三个基矢量.

一个矢量的长度称为矢量的**模**,记$|\boldsymbol{A}|=\tau(a)$, $\tau^2(a)=a_1^2+a_2^2+a_3^2$. 若$|\boldsymbol{A}|=1$, $\boldsymbol{A}$ 称为**单位矢量**;若$|\boldsymbol{A}|=0$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=(0,0,0)$称为没有长度和方向的**零矢量**;若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$, $\boldsymbol{A}/|\boldsymbol{A}|$称为与 $\boldsymbol{A}$ 同方向的**单位矢量**.

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$($|\boldsymbol{A}|\cos\alpha=a_1$, $|\boldsymbol{A}|\cos\beta=a_2$, $|\boldsymbol{A}|\cos\gamma=a_3$)称为 $\boldsymbol{A}$ 的**方向余弦**,且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 若 $l:m:n=\cos\alpha:cos\beta:cos\gamma$. 则称 l,m,n 为 $\boldsymbol{A}$ 的**方向数**.

1.1.2 矢量的运算

(1) 矢量的加法.

定义 1.1 设三角形 TUV，矢量 $\boldsymbol{A}=\overrightarrow{TU}$的起点 T 到矢量 $\boldsymbol{B}=\overrightarrow{UV}$ 的终点 V 的有向线段$\overrightarrow{TV}$称为两个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的和. 记 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$（见图1-2）.

（2）矢量的减法.

定义 1.2 与矢量$\boldsymbol{A}$ 有相同长度和相反方向的矢量称为矢量$\boldsymbol{A}$ 的**负矢量**，记为$-\boldsymbol{A}$（见图 1-3）.

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$$

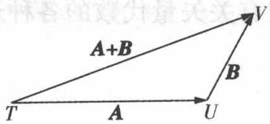

图 1-2

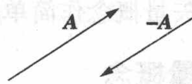

图 1-3

定义 1.3 设三角形 TUW，矢量 $\boldsymbol{B}=\overrightarrow{TW}$的终点 W 到矢量$\boldsymbol{A}=\overrightarrow{TU}$ 的终点 U 的有向线段$\overrightarrow{WU}$称为两个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的差，记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$（见图 1-4）.

矢量加法有如下性质：

① 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

② 结合律$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$（见图 1-5）.

③ 零元素 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$.

④ 逆元素 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.

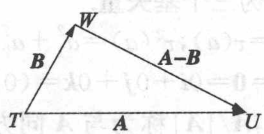

图 1-4

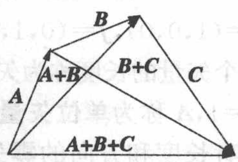

图 1-5

（3）矢量与数量的乘法.

实数 λ 与矢量$\boldsymbol{A}$ 的乘积$\lambda\boldsymbol{A}$ 是一个矢量，其模为$|\lambda\boldsymbol{A}|=|\lambda||\boldsymbol{A}|$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{A}$ 的方向与 $\boldsymbol{A}$ 相同；$\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{A}$ 的方向与 $\boldsymbol{A}$ 相反；$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

若 μ 为另一个实数，则

① 结合律 $\lambda(\mu \boldsymbol{A})=\mu(\lambda \boldsymbol{A})=(\mu\lambda)\boldsymbol{A}$.

② 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$，$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$，如 $\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$，$\mu\boldsymbol{B}=(\mu b_1,\mu b_2,\mu b_3)$，$\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B}=(\lambda a_1+\mu b_1,\lambda a_2+\mu b_2,\lambda a_3+\mu b_3)$，其中 $\boldsymbol{B}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}=(b_1,b_2,b_3)$.

(4) 矢量的积.

记 θ 为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 之夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

① $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 称为两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**数量积**，$\cos\theta=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}/|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)/\tau(a)\tau(b)$ 称为两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **夹角的余弦**.

有 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

② 记矢量 $\boldsymbol{E}$ 垂直 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，且 $|\boldsymbol{E}|=1$，则

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta\boldsymbol{E}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$ 称为两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**矢量积**.

$$\begin{aligned}\sin\theta&=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|/|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\\&=[(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2]^{1/2}/\tau(a)\tau(b)\end{aligned}$$

称为两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **夹角的正弦**，有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

③ 设 $\boldsymbol{C}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}=(c_1,c_2,c_3)$.

$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$ 称为三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的**混合积**，则

$$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}]=[\boldsymbol{k},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]=1,$$

$$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]=[\boldsymbol{j},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}]=\cdots=0.$$

设实数 λ，则

$$\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B},\lambda(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\lambda\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B},\lambda[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]=[\lambda\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}].$$

矢量乘法有如下性质：

① 交换律 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

② 反交换律 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$.

③ 分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$；$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$.

④ $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=-[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}]=-[\boldsymbol{C},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}]=-[\boldsymbol{A},\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}]$.

1.1.3 基本定理

定理 1.1 任意 n 个按顺序矢量 $\boldsymbol{A}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的封闭折线和为零矢量 $\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{0}$(见图 1-6).

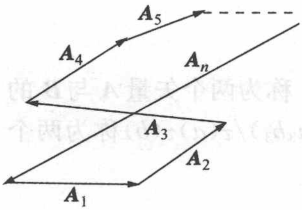

图 1-6

定理 1.2 设三个非零矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$,则

(1) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 垂直的充分必要的条件是 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$.

(2) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 平行的充分必要的条件是满足下面两者之一:

① $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

② $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]=0$.

(3) 设 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,则 $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 平行.

(4) ① $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 共面的充分必要条件是 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]=0$.

② 若 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]=0$,且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不平行,则存在唯一的两个实数 a,b 使 $\boldsymbol{C}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$.

(5) 若 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]\neq 0$,对于任意矢量 $\boldsymbol{V}$ 都可用三个矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 线性表示,即存在唯一的三个实数 a,b,c,使 $\boldsymbol{V}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}$.

设 $\boldsymbol{V}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}&=a\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{V}&=a\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{V}&=a\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C},\end{aligned}$$

由线性方程组理论得 $a=d_1/d,b=d_2/d,c=d_3/d,d=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]^2\neq 0$(见前言问题 4(2))

$$d_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{V} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{V} & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}\end{vmatrix},\quad d_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{V} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{V} & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}\end{vmatrix},$$

$$d_3=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{V}\end{vmatrix}.$$