

微型机在数字控制中的应用

P. 卡 茨 著

王永初、邓志林、周立峰译

四川省自动化与仪器仪表学会

一九八五年一月

序 言

利用微处理器设计控制器是一个变化与迅速发展的题目。据本人的经验,刚从高等院校毕业的年轻工程师很快就熟悉这个领域,而在模拟控制器设计方面有经验的老练控制工程师觉得由模拟网络线路的设计去编制微处理器的程序,往往不是一件容易的事情。

因为大多数被控制对象都是连续的,所以在连续控制器设计方面取得经验是很宝贵的。实际上所有实现了的数字控制系统都是以连续系统的设计为基础的。因此,本书附带的目的是帮助有经验的控制设计者掌握数字控制。

最近几年间,出版了许多数字处理与数字滤波方面的优秀著作。但必须指出,信号的数据处理与数字控制两者是有区别的。信号处理并不是实时的,某些延迟是允许的。其实现过程可包含有浮点表示法与效的舍入。相反,微控制器的处理是实时的,而且只采用定点二进制的运算,因此它是数字的。设计者在实际完成数字控制器设计过程中,主要的精力都集中在围绕有限字长、采样速度选择、算式的灵巧编程、变量与系数的合理换算,以及模拟到数字与数字到模拟转换器的选择这样一些问题。本书利用恰当的例子重点介绍这些问题。

根轨迹与Bode图已经研究得很充分,这样一些图解手段仍然是有用的,但是不需要掌握所有精确图表的细度,因为大多数计算机系统,现在通常都是采用计算机编程来计算和跟踪这些曲线。熟悉掌握快速绘制曲线图方法的最大好处,在于设计者有能力去组织控制系统的初步设计。本书包括有根轨迹与Bode图近似绘制的基本规则,因为这些规则,对于将 w 平面引入数字控制是很有用处的。

本书是根据著者及著者的同事在利用微处理器设计数字控制器方面的经验编写的。材料的选择与编排的基础是著者在Technion的以色列工艺学院讲授的数字控制教材,该教材讲授时间为一学期。

本书适用于最后一年的本科学学生与具有实践经验的工程师。本书尽量减少理论的详细证明。微控制器的大部分例子都是实际做出的系统。第一章概要说明离散理论、线性定常系统、并强调连续系统离散的概念。第二章介绍建立在模拟控制器设计基础上的数字控制器的设计方法,解释采样引起诸如假频等的各种现象,并对所有的模拟控制器的离散方法作出比较。第三章讨论在离散域内所采用的设计方法,这些设计方法的基础同前面介绍的模拟控制器的设计方法不同,并不意味着设计不要根据以前模拟控制器的设计经验。第四章研究多输入多输出离散控制系统,这些系统是建立在状态变量表示方法的基础上,简单说明极点配置、观测器设计与线性最优设计,也是本章内容的一部分。附录A给出这些定理和证明。第五章包括在微处理器中数字控制器的程序编制,介绍程序编制的各种方法,并综述微处理器和微处理器开发系统。第六章对设计者来说是最重要的。算式用实际数值来实现时,包含所有量化引起的有关问题,这是实际设计者最关心

的。不正确的数值程序编排可能破坏精心设计的数字控制器的特性。第六章介绍所有的这些误差和伴随出现的数值现象。本章介绍的议题是根据理论和经验推荐合理地程序编排。第七章介绍的内容同第六章有关，即关于采样速度的选择。提高采样速度需要增加字长，从经济上考虑，这两项都是设计者力求减少的目标。介绍有关采样速度两个新的概念：响应保真度与粗糙度函数。在第八与第九章中，详细介绍具体设计的例子。这些例子是实际的而不是课堂上的例子，通过例子验证前面各章的理论和效果。附录A和B对第四章和第七章讨论的理论给予详细的解释和证明。

所建议练习的求解可以在教师手册中找到，这些手册在书店可以买到。

我衷心感谢我的同事和学生，从他们那里我学到很多东西，他们为本书献出了自己的经验与知识。尤其是Ytihak Shendeyg 在微控制器方面的开创性工作。Baruch Glic, Nahum Nechemia与Yakor Sharoni, 他们所从事的微控制器系统的设计，验证了第四、五与七章的例子。具有经验的工程师 Ferd Berkowitg 与Avner Ben-zwi, 他们提供了第八章与9·1节的主要材料。著者同样感谢R·J·Simpson博士，他仔细地审阅了本书的原稿并提出许多有益的建议。执行编辑Henry Hirschberg给予有益的指导，生产经理Ron Decent由于他的巨大努力，本书能在短期内得到出版。

最后，感谢RAFAEL以列色MOD，在那里成千上万的科学家产生了浓厚的创造性气氛，给予著者道义上的支持并提供打字设备。

目 录

序

第一章	分析的基础知识	(1)
1.1	概 述.....	(1)
1.2	线性、定常、离散系统.....	(2)
1.3	有限差分的计算.....	(4)
1.4	z 变换.....	(7)
1.5	逆变换.....	(11)
1.6	连续系统的离散化.....	(13)
1.7	离散特性与离散线性系统.....	(20)
1.8	变离散信号为连续信号.....	(24)
附录1A	经典数据采样理论的综述.....	(27)
练 习		(29)
第二章	利用连续的设计方法进行数字控制设计	(32)
2.1	概 述.....	(32)
2.2	连续的设计方法与补偿网络离散化.....	(32)
2.3	数字滤波器的特性、频率响应、假频.....	(34)
2.4	模拟滤波器的离散方法.....	(39)
2.5	各种离散方法的比较.....	(49)
2.6	设计例题.....	(54)
附录2A	采用低通滤波器、双线性变换与频率预改型方法设计滤波器.....	(57)
练 习		(59)
第三章	数字控制的离散设计方法	(61)
3.1	概 述.....	(61)
3.2	分析的设计方法.....	(61)
3.3	在 z 域上的设计.....	(68)
3.4	在 w 平面与 w' 平面上的设计.....	(72)
3.5	利用在 w 平面上的频率响应进行补偿设计.....	(75)
3.6	w 与 w' 平面设计方法的举例.....	(81)
练 习		(85)
第四章	多变量数字控制, 状态空间方法	(88)
4.1	概 述.....	(88)

4.2	状态空间方法, 极点配置, 观测器设计	(88)
4.3	观测器设计	(96)
4.4	建立在二次型综合方法基础上的最优控制	(103)
4.5	在有噪声情况下的最优滤波	(105)
4.6	模型随动方法	(109)
	练习	(112)
第五章	在微控制器上编制控制算式的程序	(115)
5.1	概述	(115)
5.2	藉助于并行、直接、规范与串接的编制, 实现迭代计算	(115)
5.3	微型计算机的特点	(122)
5.4	天线抛物面反射器的稳定性, 微控制器设计的例子	(125)
	练习	(138)
第六章	数值算式实现的分析	(139)
6.1	概述	(139)
6.2	有限字长的二进制运算、数值误差形式及其在各种表示形式中的生成	(139)
6.3	量化噪声通过系统的产生和传播	(143)
6.4	系数误差及其对控制器动态的影响	(152)
6.5	量化、静带和极限环所引起的控制器的非线性特征	(155)
6.6	A/D转换器、存储器、运算单元和D/A转换器的字长	(162)
6.7	设计举例——用微处理器实现的一种数字自动驾驶仪	(166)
	练习	(188)
第七章	采样速度的选择	(190)
7.1	概述	(190)
7.2	未建模的状态与寄生频率的前置滤波	(190)
7.3	时间响应与外界噪声的响应及其同采样速度的关系	(196)
7.4	采样引起的控制粗糙度	(199)
7.5	响应保真度与采样速度	(204)
7.6	采样速度的实际选择	(206)
	练习	(207)
第八章	设计例题1	(209)
8.1	概述	(209)
8.2	模拟方式	(209)
8.3	离散模型与所要求的计算能力的估计	(211)
8.4	计算系统	(216)
	练习	(219)
第九章	设计例子2	(221)

9·1	概 述	(221)
9·2	控制要求	(221)
9·3	子系统的说明	(222)
9·4	控制器的设计	(223)
9·5	A/D与D/A转换器的选择	(227)
9·6	C P U	(228)
9·7	控制器的程序	(230)
练 习		(231)
附录 A	最优离散控制, 某些计算工具	(233)
A·1	连续损失函数的离散化	(233)
A·2	离散调节器问题的一般表示法	(234)
A·3	最优调节器问题的解	(235)
A·4	利用本征向量分解方法求解离散黎卡提方程式	(236)
A·5	利用本征向量分解方法计算最优滤波器	(241)
A·6	计算外界噪声稳态响应的算式	(242)
附录 B	粗糙度函数	(245)
B·1	粗糙度函数的定义	(245)
B·2	在外界噪声扰动情况下, 闭环系统的平均粗糙度函数	(246)
附录 C	z -变换和 s -变换表	(248)
参考文献		(249)

第一章 分析的基础知识

1.1 概 述

本书内容可以说明按线性、定常离散系统建模的有关控制问题。出现在理论正文中的实例，可能包含有诸如门槛与限制器之类的非线性元件，但是我们假设系统特性是线性和缓慢时变的。

线性数据采样连续控制系统的分析处理是在50年代发展起来的，并出现在一些经典的教科书上（见参考文献RA-1, JU-1）。数据采样理论的形成，随着数字计算机应用的增加，广泛引起了对数值分析的兴趣，尤其是如下几个方面：数值积分方法，数据的内插与外推、滤波、多维系统的矩阵运算，譬如状态空间方法以及连续系统模型的离散。数值分析、线性代数的许多方法及其理论是近两百年期间数学家研究出来，在近五十至六十年代间又被控制工程师与计算机科学家重新发掘出来。

为了设法区分古典的单输入-单输出的数据采样理论与多变量数字控制，本书均采用“离散”这个名词，而不用采样。

离散或数字控制的数学理论类似于数据采样理论，但增加了纯粹离散系统的内容。因此，利用线性状态空间方法容易处理多变量系统的问题。

基于上述原因，本章划分为三个方面的内容：

- (1) 利用线性差分方程式来表述线性离散系统。
- (2) 线性离散系统的 z 变换表示式。
- (3) 线性连续系统的离散化（采样），被离散系统的特点， s 平面与 z 平面之间的关系。

为了教育目的，本章最后在附录1A中，对数据采样理论作了总的复习。

1.2 线性、定常、离散系数

假设读者已熟悉线性系统的基本概念。

我们所研究的离散动态系统可以用如下几种方式建模或表示：

- (I) 离散（或差分）方程
- (II) 脉冲响应
- (III) 传递函数

1.2.1 系 统

系统 S 将输入 u 变换为输出 x ，这个关系可由图1.1的方框图来表示。输入 u 为一串的数， $u = \{ u_0, u_1, \dots, u_i \}$ ，输出 x 也为一串的数 $x = \{ x_0, x_1, \dots, x_i \}$ 。

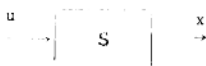


图 1-1 离散系统

对于多维系统， u 与 x 均为向量。

总之，其关系可表示为

$$x = S(u) \quad (1-1)$$

其中 S 为定义系统的变换。

下面，将定义线性、定常与脉冲响应。传递函数的概念留到Z变换一节中介绍。

1.2.2 线 性

假如系统变换 S 符合叠加原理

$$x = S(au + bu') = aS(u) + bS(u') \quad (1-2)$$

则称系统变换 S 为线性的。在这种场合下， x 为 u 的线性函数。换句话说 S 为一个线性算子。

1.2.3 定 常

假如系统 S 的响应不受输入信号加入时间的影响，则称系统 S 为定常的。

如果以 i 与 k 表示无因次时间的时序数，则对于所有 $k \geq 0$ ，有

$$S(u_{i-k}) = x_{i-k} \quad (1-3)$$

其中

$$u_{i-k} = 0, i = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

1.2.4 脉 冲 响 应

令 h_i 为系统 S 在 $i=0$ 时刻对于单位脉冲的响应。按照输入—输出术语来描述：若 $u_0 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$ ，则

$$x = S(u_0) = \{h_0, h_1, \dots, h_i\} \quad (1-4)$$

脉冲响应 h_i 是定义系统 S 的一种特性，它可由分析或试验的方式得到。

输入—输出关系是以线性叠加原理为基础的。输出是各个脉冲单独响应的总和

$$x_i = \sum_{k=0}^i h_k u_{i-k}, u = \{u_0, u_1, \dots, u_i\} \quad (1-5)$$

x 为 u 的线性卷积。

例子：

$$h_i = (0, 1)$$

$$u_i = 1, 1, 1, \dots, 1,$$

$$x_i = \sum_{n=0}^i (0.1) = 1 - \frac{(0.1)^{i+1}}{1-0.1}$$

1.2.5 离散时间系统

名词表: t —— 时间;

i —— 整数 ($0, 1, 2, \dots$);

T —— 采样的时间间隔;

f_s —— 采样速度;

ω_s —— 采样频率。

这些变量的关系如下

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{t}{T} \\ \omega_s &= \frac{2\pi}{T} \quad (\text{弧度/秒}) \\ f_s &= \frac{1}{T} \quad (\text{赫兹, Hz}) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

下面我们利用一个例子来说明离散时间函数 $f(i)$:

$f(i)$ —— 离散时间函数

$f(t)$ —— 时间函数

$i = 0, 1, 2, \dots$

t —— 连续变量

$$f(i) = 0.5i^2 + 2i$$

$$f(t) = \frac{0.5}{T^2} t^2 + \frac{2}{T} t$$

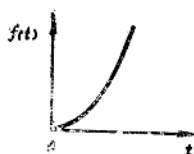
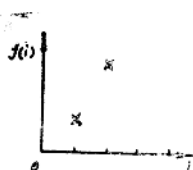


图 1-2

$f(i)$ —— 离散时间函数

$f(t)$ —— 连续时间函数

分析表达式, 如 $f(i) = 0.5i^2 + 2i$

$f(i)$ 表示方法 $\left\{ \begin{array}{l} \text{分析表达式, 如 } f(i) = 0.5i^2 + 2i \\ \text{表格, 例如} \end{array} \right.$

i	0	1	2	3	4
$f(i)$	0	2.5	6	10.5	16

$f(i)$ 可由连续函数采样产生或者作为纯离散现象的表述, 如每年产生事故的次数。

在本书中, $f(i)$ 通常由连续函数 $f(t)$ 采样产生, 即 $f(iT) = f(t)$, 我们采

用缩写记号 $f(iT) \triangleq f_i$ 。由于其它方面的原因，有时不是用 i 标记，而是用 n 或者 k 标记，本书用 n 表示 n 维系统的阶次。

1.3 有限差分的计算

有限差分的计算是分析的手段，它用公式表述、综合与分析离散系统，其作用类似于线性微分方程式对于连续动态系统的作用一样。有些文献，这种计算按照分类结构表划归于微分方程的方法。

另外，假设读者已熟悉线性微分方程式及其 s 平面表示法。我们还要经常对离散域与连续域进行比较，以便顺利地求得它们之间的变换关系。

1.3.1 离散方程式

同微分方程式的情况一样，离散方程式表示自变量 x 与因变量 i 之间的关系。系统受到强迫函数 u 与初始条件 $x_0, x_1, \dots$ 的激励。

离散方程的定义由式 (1-7) 表示

$$b_0 x_{i+2} + b_1 x_{i+1} + \dots + b_{n-1} x_{i+1} + b_n x_i = u_i \quad (1-7)$$

其中 n 为方程 (系统) 的阶次。

一阶齐次离散方程式是如下的一种形式

$$b_0 x_{i+1} + b_1 x_i = 0 \quad (1-8)$$

例如： x_i 为在 i 计算时刻的细胞数， B 为再生率， A 为死亡率。下一个时刻的细胞数为 $x_{i+1} = (B - A) x_i$ 。

其用一阶离散方程式表示为

$$x_{i+1} + (A - B) x_i = 0$$

其中初始条件为 x_0 。

二阶离散方程为如下的一种形式：

$$b_0 x_{i+2} + b_1 x_{i+1} + b_2 x_i = u_i \quad (1-9)$$

用离散方程描述的另一个例子是浮桥的总挠度。

在这种场合下，在 $i+1$ 段上， m 段浮桥的挠度 x_{i+1} 同负载 u_{i+1} 、弹性系数 k ，以及两个相邻段（见图 1-3）的挠度有关，即

$$x_{i+1} = 1/k \cdot u_{i+1} + A x_i + A x_{i+2}$$

其中 A 为正比于转动刚度的常数。



图1-3 二阶离散方程式的一个例子。浮桥挠度

注意：这是一个不常见的例子。在本书中自变量*i*不是表示时间的只有这个例子。

一个*n*阶的离散方程式，或者一个离散方程组，可由*n*个一阶方程式来表示

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots \\ \vdots & \\ & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} u_i \quad \begin{matrix} * (1) \\ (1-10) \end{matrix}$$

这个*n*阶状态空间系统可化简成一阶离散矩阵形式

$$\bar{x}_{i+1} = B \bar{x}_i + G u_i \quad (1-11)$$

例如：假定有一个 α - β 雷达跟踪系统

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_i &= y_{i-1} + T v_{i-1} \quad * (2) \\ y_i &= \tilde{y}_i + \alpha (u_i - \tilde{y}_i) \\ v_i &= v_{i-1} + \frac{\beta}{T} (u_i - \tilde{y}_i) \end{aligned} \right\} \text{一阶差分方程组}$$

其中

y_i —— 在*i*时刻的测距；

$\tilde{y}_i$ —— 由*i*-1时刻的测量对*y_i*的预测值；

v_i —— 污染测距的测量噪声。

上述方程可改写成如下的状态变量形式

$$\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ y \\ v \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & T \\ 1 - \alpha & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{T} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ y \\ v \end{pmatrix}_{i-1} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta/T \end{pmatrix} u_i$$

1·3·2 差分方程

表述离散方程的另一种方式是分析因变量两个相邻值之间差分的性质。一阶向前差分定义为 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ，利用向前差分将离散方程变为差分方程：

$$a_0 \Delta^n x_i + a_1 \Delta^{n-1} x_i + \cdots + a_{n-1} \Delta x_i + a_n x_i = u_i \quad (1-12)$$

阶次更高的差分，其定义同一阶差分类似，即

$$\Delta^n x_i = \Delta \Delta (\Delta^{n-1} x_i) \quad (1-13)$$

* (1) 注：式(1-10)原文误为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} u_i$$

* (2) 注：原式误为 $\tilde{y}_i = y_{i-1} + T_{i-1} v_{i-1}$

根据上述定义,二阶向前差分表示为

$$\begin{aligned}\Delta^2 x_i &\triangleq \Delta(\Delta x_i) \\ &= \Delta x_{i+1} - \Delta x_i \\ &= x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i\end{aligned}\quad (1-14)$$

例子:非线性热存储可以由最近的三次测量来近似

$$Q_i = K_1(T_i - T_{i-1}) + K_2[(T_i - T_{i-1}) - (T_{i-1} - T_{i-2})]$$

若用差分来表示,则有

$$Q_i = K_1 \Delta T_i + K_2 [\Delta T_i - \Delta T_{i-1}]$$

$$Q_i = K_1 \Delta T_i + K_2 \Delta^2 T_i$$

若干有用的性质:

(I) 两个离散函数的积的一阶向前差分为

$$\Delta(f \cdot g) = f_{i+1} \Delta g + g \Delta f \quad (1-15)$$

证明:

$$\begin{aligned}\Delta(f \cdot g) &= f_{i+1} g_{i+1} - f_i g_i \\ &= f_{i+1} g_{i+1} - f_{i+1} g_i + f_{i+1} g_i - f_i g_i \\ &= f_{i+1} (g_{i+1} - g_i) + g_i (f_{i+1} - f_i) \\ &= f_{i+1} \Delta g + g_i \Delta f\end{aligned}\quad (1-16)$$

(II) 离散方程同差分方程式的关系

式(1-17)表示差分方程式系数与离散方程式系数间的关系

$$\left. \begin{aligned}b_k &= \sum_{r=0}^k (-1)^r C_{k-r}^{n-1} a_r \\ a_k &= \sum_{r=0}^k C_{k-r}^{n-1} b_r\end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

1·3·3 线性定常离散方程或差分方程式的解

离散方程的经典求解方法类似于微分方程的求解方法。

齐次方程的解

经典解法(齐次方程)

已知

$$b_0 x_{i+n} + b_1 x_{i+n-1} + \cdots + b_n x_i = 0$$

并设一个解为 $x_i = \lambda^i$, 则

$$x_{i+k} = \lambda^{i+k} = \lambda^k x_i$$

对于所有的 k , $0 \leq k \leq n$, 有

$$\lambda^i [b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_n] = 0 \quad (1-18)$$

特征方程

通解为特征方程的解的线性组合。

例如：

$$x_{i+2} - 3x_{i+1} + 2x_i = 0$$

其特征方程式为

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 1$$

因此解为

$$x_i = C_1 2^i + C_2$$

注意： λ^i 在离散方程式中的作用，相当于 $e^{\lambda t}$ 在线性定常微分方程式中的作用。根 λ 的值描述解 x_i 的固有品质。假设其中一个根为实的

$$x_i = C \lambda^i \quad (1-19)$$

x_i 的数值特性列表总结于下：

λ	x_i 的值, $i = 0, 1, 2, \dots$
$\lambda > 1$	增加
$\lambda = 1$	常数
$0 < \lambda < 1$	减少
$-1 < \lambda < 0$	减少, 符号交替
$\lambda = -1$	+C 与 -C 值交替出现
$\lambda < -1$	增加, 符号交替

复数或虚数根总是以共轭对的形式出现的，假定为式 (1-20) 所示的形式解

$$x_i = C_1 \lambda^i + C_2 \lambda'^i \quad (1-20)$$

其中

$$\lambda = a + jb, \lambda' = a - jb$$

同连续系统相似， x_i 的品质由两个正弦的衰减或非衰减函数的组合来描述，而对于共轭虚数对的情况，其品质是绝振荡的。

多重实根产生由 $i \lambda^i$ 项组成的品质。

齐次方程固有品质的图解描述，对于控制工程是很重要的，这部分内容留到 z 变换一节介绍。

求常数系数线性离散方程式特解有两个重要方法：(1) 待定系数方法；(2) 变参数方法。这两种方法均需预先确定齐次解 x_{i1} 。

求解离散或差分方程式的实际方法是采用 z 变换方法。这是下一节所要介绍的内容。

1.4 Z 变 换

z 变换对于表述、综合与求解线性定常离散域问题是一种很有效的方法。类似于拉普拉斯变换在连续时间域的作用。其最大的好处是将复杂的差分方程处理成相当简单的

代数方程。

1·4·1 Z变换的定义

基本z变换(单边)定义为

$$Z[f_i] \triangleq F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} \quad (1-21)$$

$$i < 0 \Rightarrow f_i = 0$$

单边z变换满足大多数工程的应用,但必须满足如下的收敛特性:

$$\text{当 } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k f_i z^{-i} \text{ 存在}$$

$$\text{则 } Z[f_i] \text{ 存在}$$

例如

$$f_i = a^i$$

$$Z[a^i] = \sum_{i=0}^{\infty} a^i z^{-i} = \frac{z}{z-a}$$

z变换的某些特性为:

(I) 叠加

$$Z[af_i + bg_i] = aZ[f_i] + bZ[g_i] \quad (1-22)$$

(II) 实向前变换(移动定理)

$$Z[f_{i+k}] = z^k F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{k-i-1} \quad (1-23)$$

例

$$Z[a^{i+1}] = Z\left(\frac{z}{z-a}\right) - a^0 = \frac{z^2}{z-a} - 1$$

1·4·2 求离散方程式的解

利用z变换及其特性可以导出一种求解离散方程式的方法。

假定离散方程式为

$$b_0 x_{i+1} + \dots + b_n x_i = f_i$$

* 注: 原式误为

$$Z[f_{i+k}] = z^k F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{k-i-1}$$

我们可以对上式两边各项进行变换, 得

$$Z\{f_i\} = F(z) \quad (1-24)$$

这个结果可由定义或者直接查 z 变换表得到

$$Z\{b_i x_i\} = b_i x(z) \quad (1-25)$$

应用移动定理得出

$$Z\{b_{i-1} x_{i+1}\} = b_{i-1} z x(z) \quad (1-26)$$

而且最后一项为

$$Z\{b_0 z^n x_{i+1}\} = b_0 z^n x(z) \quad (1-27)$$

因此变换后的方程式为

$$(b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n) x(z) = F(z) \quad (1-28)$$

为简化起见, 略去包含初始条件的那些项。于是, 式(1-28)可改写成

$$x(z) = \frac{F(z)}{b_0 z^n + \dots + b_n} \quad (1-29)$$

其中 $b_0 z^n + \dots + b_n$ 为特征多项式。特征多项式的根就是齐次解的根 λ 。

例如:

$$x_{i+2} - 3x_{i+1} + 2x_i = 4$$

变换方程式为

$$(z^2 - 3z + 2)x(z) - z^2 x(0) - zx(1) + 3zx(0) = \frac{z}{z-4}$$

$x(z)$ 的解为

$$x(z) = \left(\frac{z}{z-4} \right) + \frac{z^2 x(0) + zx(1) + 3zx(0)}{z^2 - 3z + 2}$$

用于求 x_i 显型解的方法在逆变换一节中介绍。

1·4·3 传递函数

利用系统离散方程的表示法, 或者利用系统的脉冲响应与卷积方法, 可以求出传递函数。

(I) 系统由下列离散方程式表示

$$b_0 x_{i+n} + \dots + b_n x_i = u_i$$

在这种情况下, z 变换得出

$$(b_0 z^n + \dots + b_n) x(z) = u(z)$$

$$\frac{x(z)}{u(z)} = \frac{1}{b_0 z^n + \dots + b_n} \quad (1-30)$$

因此, 传递函数表示为

$$H(z) = \frac{1}{b_0 z^n + \dots + b_1} \quad (1-31)$$

(II) 系统是由脉冲响应 h_i 定义的

$$x_i = \sum_{k=0}^i h_k u_{i-k} \quad (1-32)$$

在这种情况下, 式(1-32) z 变换, 则有

$$X(z) = Z \left\{ \sum_{k=0}^i h_k u_{i-k} \right\} \quad (1-33)$$

可以证明上式右边的 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= Z\{h_i\} Z\{u_i\} \\ X(z) &= Z\{h_i\} U(z) \end{aligned} \quad (1-34)$$

传递函数 $H(z)$ 定义为

$$H(z) \triangleq Z\{h_i\} \quad (1-35)$$

在 z 域内, 传递函数的方框图描述方式, 同在 s 域内的描述方式是一样的。

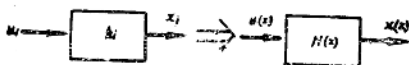


图 1-4 $H(z)$ 的方框图

1.4.4 线性离散系统传递函数的组合

如果几个离散系统互相结合在一起, 一个系统的输出作为另一个系统的输入。则闭环系统的传递函数由式(1-36)表示

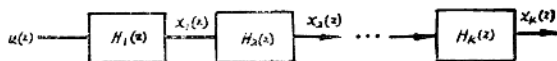


图 1-5 开环离散系统

$$\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)} \quad (1-36)$$

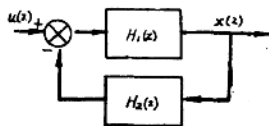


图 1-6 闭环系统的方框图

z 变换另一些有用的性质:

(Ⅲ) 初值定理 (I V T)

$$\lim_{i \rightarrow 0} f_i = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (1-37)$$

(Ⅳ) 终值定理 (F V I)

如果 $(z-1)F(z)$ 对于 $z \geq 1$ 是解析的, 即 $(z-1)F(z)$ 的所有导数在 $z \geq 1$ 的范围内存在, 则

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \quad (1-38)$$

例如:

$$f_i = \sum_{k=0}^i a^k$$

$$Z(f_i) = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} = \frac{1}{1-a}$$

1.5 逆 变 换

逆变换的目的是求离散系统的显型特性, 即差分方程在时域内的解。

同控制理论中拉普拉斯变换的应用情况一样, 求实际时间的解不是主要的。主要目的是利用变换的表达式去分析控制系统的特性。离散时间的解一般是通过数字仿真得到。

本节介绍三种方法: 建立在柯西留数定理基础上的周线积分、利用长除法将幂级数展开与查 z 变换表的实际方法。

方法 1 周线积分

因为我们所感兴趣的仅是单边变换 ($i \geq 0$), 所以假设 $F(z)$ 在环形区域 $R_1 < |z| < R_2$ 内是解析的, 而 C 为离开 R_2 的距离为 R_1 的简单闭曲线, 则单边逆 z 变换可写