浙江大学数学系列丛书

Mathematical Analysis

数学分析

李胜宏 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

浙江大学数学系列丛书

数学分析

主编 李胜宏

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析/李胜宏主编. —杭州：浙江大学出版社，2009.7

（浙江大学数学系列丛书）

ISBN 978-7-308-06856-7

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.数学分析—高等学校—教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 097768 号

数学分析

李胜宏　主编

责任编辑　徐素君

封面设计　刘依群

出版发行　浙江大学出版社

（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）

（网址：http://www.zjupress.com）

排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司

印　　刷　德清县第二印刷厂

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　21

字　　数　485 千

版 印 次　2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-06856-7

定　　价　38.00 元

序

为了弘扬浙江大学数学系的优良传统和学风，适应当代数学研究和教学的发展，2004年起浙江大学数学系组织力量对本科生课程设置和教材进行了重要改革，尤其是对数学系主干课程如数学分析、高等代数、解析几何、实变函数、常微分方程、数值分析基础、概率论等的教材进行了重新编写，并在浙江大学出版社出版浙江大学数学系列丛书。这是本套系列丛书的第一部分。

丛书的主要特点：

一、加强基础，突出普适性。丛书在内容取舍上，对数学核心内容不仅不削弱，反而有所加强，尤其注重数学基本理论、基本方法的训练。同时，为了适应浙江大学"宽口径"的学生培养制度，对数学应用、数学试验等内容也给予了高度关注。

二、关注前沿理论，强调创新。丛书试图从现代数学的观点审视和选择经典的内容，以新的视角来处理传统的数学内容，使丛书更加适合浙江大学教学改革的需要，适合通才教育的培养目标。

三、注重实践，突出适用性。丛书出版以前，有的作为讲义或正式出版物在浙江大学数学系试用过多次，使丛书的内容和框架、结构比较完善。同时，为了适合不同层次的学生合理取舍，丛书在内容选取上，为学生进一步学习准备了丰富的材料。

在编写过程中，数学系教授们征求了许多学生的意见，并希望能够在教学使用过程中对这套教材作进一步完善。今后我们还会对其他课程的教材进行相应的改革。

为了这套丛书的编写和发行，浙江大学数学系的许多教授和出版社的编辑投入了巨大的精力，我在此对他们表示衷心的感谢。

刘克峰

浙江大学数学系主任

2008年2月

前　言

本书是针对有初等微积分基础的大学一年级和二年级的学生编写的，既可以作为教科书使用，也可以作为研究生入学考试和高等数学竞赛的培训教材。除此之外，此书对广大数学爱好者来说，也是一本实用性很强的参考书。全书共六章，主要内容包括实数理论、数列与无穷级数、连续性、黎曼与斯蒂尔切斯积分、一致连续性和广义积分。书中每一章均配有大量的例题和有一定难度的习题。

浙江大学从2006年开始实行按大类招生的本科生培养计划，在大学第一年，本科新生没有确定专业方向，为了方便同学选课的一年后选专业，数学系一年级学生的数学分析、高等代数和解析几何三门基础课程和内容被调整：原来需要一年半来讲授的内容压缩到一年，许多结论和定理的详细证明被忽略。本书弥补了理论推导和定理证明的不够，因而，它不仅可以作为本科生第三学期数学分析教材，也可以作为第四学期提高班的辅导教材。

目前市面上有各种版本的数学分析教材，且数学分析的内容基本成型，因而编写一本具有特色的教材并非易事。首先遇到的问题是材料的取舍和内容的编排。本书的读者具备初等微积分的基础，使得编书时合理选材更加重要。我们从实数理论入手，选取重要的且能培养和提高读者逻辑推理能力的结构和定理作为本书的重要内容。例如数列与级数，一致收敛性和广义积分等，尽量做到所选内容是数学分析的核心问题，避免出现后继课程将要讨论的课题。

与一般数学分析教材不同的是，本书可作为研究生入学考试的辅导教材和大学生高等数学竞赛的培训教材，对一般数学分析教材中的内容作了推广和加深，并精选了部分富有启发性的例题和有一定难度的习题供读者练习。独立完成部分或全部习题，是读者检验自己推理能力和提高学习效率的重要途径，通过练习，可以加深对教材主要内容的理解和掌握。

本书讲解力求由浅入深，难度坡度设置合理，语言表述在详尽严谨的同时努力做到通俗流畅，便于教师讲解以及读者学习和理解。

在本书的编写期间，作者得到了许多的帮助和支持。我的同事，浙江大学数学系教师姜海益老师阅读和校对了第五次校样稿，同时提出了许多有价值的修改意见。我的研究生汪刘根、鲍群芳、杨晨、马一宁和张碧原等同学参与了第四、五、六和第七次校稿，并帮助选配了部分习题。本书虽然经过多次认真校对，但书中存在的不足和可能的谬误概由编者负责。感谢浙江大学教务处、理学院本科生科在编写过程中所给予的支持和帮助。

感谢浙江大学出版社的编辑徐素君、杨晓鸣提供的帮助。

李胜宏

2009年7月

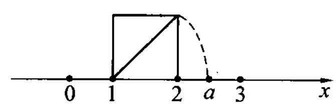
目　录 >>

Contents

第一章　实 数 系

微积分的一些基本结论，如数列的收敛性，函数的连续性、可微性和可积性等，都是建立在实数理论之上的，利用了实数所具有的性质．例如，所有实数组成的集合 **R**—实数系，关于加，减，乘，除(分母不为零）四种运算是封闭的，即对 **R** 中任意两个元素，经过这四种运算后仍然属于 **R**；实数系的另一重要性质是 **R** 中的元素与数轴上的点是 1—1 对应的．虽然有理数集合 **Q** 关于上述四种运算也是封闭的，且对 **Q** 中每一个元素都能在数轴上找到一点与之对应，但反过来，在数轴上存在这样的点，找不到有理数与它对应．

如果 a 表示边长为 1 的正方形的对角线的长度，那么，这个数就无法用有理数来表示，这表明与 a 对应的点位于有理数集合的"空隙"中．



为了填补有理数在数轴上的空隙，自然的想法是扩充有理数系．由于有理数能表示成有限小数或无限循环小数，所以，扩充有理数集合的直接方式之一就是把所有无限不循环小数(称为无理数）吸收进来，让无理数填补有理数在数轴上的所有"空隙"．全体有理数和所有无理数组成的集合称为实数系，并以有理数的四则运算为基础，建立实数系的运算，这样构造出来的实数系不仅保留了有理数系的重要性质，而且比有理数具有更多的性质．

在这一章中，我们将讨论实数系的构造和基本性质，并证明实数系的几个基本定理．

1.1　整　数

整数是数学中最基本的概念之一，相信大家对整数的四则运算，绝对值以及比较整数的大小等知识已经了解，也熟悉集合和集合的运算等概念．

首先介绍几个常用记号：**R** 为全体实数集合，有时，也表示区间$(-\infty, +\infty)$，**Q** 为全体有理数集合，**Z** 为全体整数集合，$\mathbf{Z}^+$ 为所有正整数集合，**N** 为所有自然数集合，不包括 0．全体正整数，即自然数组成的集合具有一些特殊的性质，如最小正整数原理，或称最小自然数原理便是其中之一，它有着极其广泛的应用．

最小正整数原理：任何非空的正整数集合必有一个最小的数．

正整数的另一个重要性质是归纳原理，即

如果 P 是一个正整数集合，且具有下列性质：

1. $1 \in P$,即 1 属于 P.

2. 如果 $n \in P$,则 $n+1 \in P$,即当 n 属于 P 时,$n+1$ 也属于 P.

那么,P 包含所有正整数.

归纳原理是我们常用的数学归纳法的基础,即

设 $P(n)$ 是关于正整数的一个命题,如果

1. 当 $n=1$(或 $n=n_0$,n_0 为某个非负整数)时,$P(1)$($P(n_0)$)成立,

2. 当 $P(n)(n>n_0)$ 成立时,可推出 $P(n+1)$ 也成立.

则 $P(n)$ 对所有正整数都成立.

例 1 数 1 是最小的正整数.

证明 1 (根据最小正整数原理).

由最小正整数原理,所有正整数集合中有一个最小的数,不妨设为 k,若 $k<1$,则将 $0<k<1$ 两边同乘以 k,得到 $0<k^2<k$. 而 k^2 仍为正整数,这与 k 为最小正整数矛盾,故 1 为最小的正整数.

证明 2 (利用归纳原理).

设 $A=\{x\geqslant 1 \mid x\in \mathbf{Z}^+\}$,则 $1\in A$. 如果正整数 $n\in A$,那么 $n\geqslant 1$,因为 $1\leqslant n<n+1$,所以 $n+1\in A$. 由归纳原理,有 $A=\mathbf{Z}^+$. 故任一正整数大于或等于 1,1 为最小的正整数.

例 2 在整数 n 与 $n+1$ 之间没有其他整数.

证明 假设存在整数 m,使 $n<m<n+1$,则 $0<m-n<1$. 由于 $m-n$ 为整数,这与 1 为最小正整数矛盾.

我们用最小正整数原理和归纳原理分别证明了 1 为最小正整数. 事实上,最小正整数原理与归纳原理是等价的.

首先,假设归纳原理成立,证明最小正整数原理也成立.

设 A 为非空正整数集合. 如果 A 没有最小数,由例 1 知,1 为最小正整数,那么,$1\notin A$,且 1 小于 A 中的所有元素.

令 $T=\{x \mid x\in \mathbf{Z}^+,\ x<a,\ \forall a\in A\}$,则 $1\in T$,假设 $n\in T$,那么 $n+1$ 也属于 T,否则,如果 $n+1\in A$,则由 n 与 $n+1$ 间没有整数,所以 $n+1$ 为 A 的最小元素,与 A 没有最小元素矛盾. 所以,由 $n\in T$,推出 $n+1\in T$,根据归纳原理,T 包含所有正整数,A 为空集,矛盾,故 A 必有最小的数.

如果 $n+1\notin A$,则存在某个 $\alpha\in A$,使 $n+1>\alpha$,从而 $n+1>\alpha>n$,矛盾.

反之,假设最小正整数原理成立,证明归纳原理成立.

设 P 为正整数集合,满足 $1\in P$,且若 $n\in P$,则 $n+1\in P$. 须证明,P 包含所有正整数.

令 $T=\{x \mid x\notin P,\ x\in \mathbf{Z}^+\}$,如果 $T\neq\varnothing$,则由最小正整数原理表明 T 有最小的数. 不妨设 $m\in T$ 为 T 的最小数,因为 $1\in P$,所以 1 为 P 的最小正整数(最小正整数原理表明数 1 为最小). 于是 $m>1$. 从而 $m-1>0$ 为正整数. 又因为 $m-1<m$,m 为 T 的最小元素,所以 $m-1\in P$.

由归纳原理得 $(m-1)+1=m\in P$. 矛盾.

那么，$T=\varnothing$，则 $P=\mathbf{Z}^+$.

这样，便完成了两个原理等价性的证明.

例 3 设 $S=\{x^k+y^k+z^k \mid x,\ y,\ z\in\mathbf{Z}^+\cup\{0\}\}$，$k$ 为正整数，将 S 中的元素从小到大排成一列 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$. 证明：对任意 $n\geqslant 1$，$a_{n+1}-a_n<8^k a_n^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^3}$.

证明 对任意 $n\geqslant 1$，存在 $x\in\mathbf{Z}^+$，使

$$x^k<a_{n+1}\leqslant(x+1)^k.$$

由于 $a_{n+1}-x^k>0$，所以，存在 $y\in\mathbf{Z}^+$，使

$$y^k<a_{n+1}-x^k\leqslant(y+1)^k.$$

同理，存在 $z\in\mathbf{Z}^+$，使

$$z^k<a_{n+1}-x^k-y^k\leqslant(z+1)^k.$$

于是，有 $0<a_{n+1}-x^k-y^k-z^k\leqslant(z+1)^k-z^k\leqslant 2^k\cdot z^{k-1}$.

及 $x^k+y^k+z^k\leqslant a_n$.

从而 $a_{n+1}-a_n\leqslant a_{n+1}-x^k-y^k-z^k\leqslant 2^k z^{k-1}$.

另外，$z^k<a_{n+1}-x^k-y^k\leqslant(y+1)^k-y^k\leqslant 2^k\cdot y^{k-1}$.

$$y^k<a_{n+1}-x^k\leqslant(x+1)^k-x^k\leqslant 2^k\cdot x^{k-1}.$$

所以
$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&\leqslant 2^k z^{k-1}\leqslant 2^k\cdot 2^{k-1}\cdot y^{\frac{(k-1)^2}{k}}\\&\leqslant 2^k\cdot 2^{k-1}\cdot 2^{\frac{(k-1)^2}{k}}\cdot x^{\frac{(k-1)^3}{k^2}}\\&\leqslant 8^k(x^k)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^3}\leqslant 8^k a_n^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^3}.\end{aligned}$$

此例表明，为了解决与整数有关的问题，需要一定的数学思想和方法.

整数关于除法运算是不封闭的，即对整数 a，b，且 $b\neq 0$，它们的商 $\dfrac{a}{b}$ 不一定是整数.

如果存在整数 d，使得 $\dfrac{a}{b}=d$，即 $a=bd$，则称 b 整除 a，表示成 $b\mid a$，并称 b 是 a 的除数（约数，因数）. 当 $b>0$ 时，称 b 为 a 的正约数或正因数. 如果不存在上述的整数 d，则称 b 不整除 a，记作 $b\nmid a$.

由定义，可以推出整除具有如下的性质：

(1) $b\mid a_1$，$b\mid a_2$ 的充分必要条件是对任意 x_1，$x_2\in\mathbf{Z}$，有 $b\mid a_1x_1+a_2x_2$.

(2) 如果 $b\mid a$，且 $a\neq 0$，则 $|b|\leqslant|a|$，从而如果 $b\mid a$，且 $a\mid b$，则 $|a|=|b|\neq 0$.

(3) 如果 $b\mid a$，而 $c\mid b$，则 $c\mid a$.

(4) 设 a，b 为整数，$b\neq 0$，则存在整数 d，r，使得

$$a=bd+r,\ 0\leqslant r<|b|.$$

并且 d 和 r 由上述条件唯一决定.

我们证明性质(4).

如果 $b \mid a$，则取 $r=0$，$d=\frac{a}{b}$；当 $b \nmid a$ 时，考虑集合

$$T=\{a-bk \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

由于 $b \nmid a$，所以 T 中有正整数. 因此，T 中有最小正整数，设为

$$r=a-bd>0.$$

下面证明 $r<|b|$. 因为 $b \nmid a$，所以 $r \neq |b|$. 如果 $r>|b|$，则令 $r'=r-|b|>0$，那么 $r' \in T$，这与 r 为最小正整数矛盾.

最后证明表示的唯一性.

假设还有 $a=bd_1+r_1$，$0 \leqslant r_1<|b|$.

则
$$b(d-d_1)+(r-r_1)=0.$$

从而
$$b \mid (r-r_1)\text{，但 } 0 \leqslant |r-r_1|<|b|.$$

所以 $r-r_1=0$，即 $r=r_1$，又因为 $b \neq 0$，所以 $d=d_1$，故 $r_1=r$，$d=d_1$，证毕.

设整数 $p>1$. 如果 p 没有真因子，即 p 的正约数只有 1 和 p 自身，则称 p 为素数(或质数)，否则称为合数.

不难知道，大于 1 的整数至少有一个素因子.

如果 a 和 b 没有大于 1 的公因子，则称 a、b 互质(互素)，记作 $(a, b)=1$.

例 4 素数的个数是无穷的.

证明 (反证法). 假设素数只有有限多个，不妨设 $p_1, \cdots, p_k$ 是全部素数. 考虑 $p=p_1\cdots p_k+1$. 由于 $p>1$，则 p 一定有素约数 q. 由假设 q 必须等于某个 $p_i(1 \leqslant i \leqslant k)$. 从而，$q$ 整除 $p-p_1\cdots p_k=1$，这不可能.

唯一分解定理：每个大于 1 的整数均可分解成有限个素数之积，且如果不计素因子在乘积中的次序，则分解方式是唯一的.

证明 (反证法). 假设存在某个合数，它不能写成素数的乘积.

不妨设 n 为最小的这样的数(由最小正整数原理). 因为 n 为合数，那么存在整数 a，b，使得

$$n=ab,\ 1<a<n,\ 1<b<n.$$

由于 $a<n$，所以 a 为素数或是素数的乘积，对于 b 也是如此，于是 $n=ab$ 为素数的乘积，矛盾.

再证唯一性. 设 n 为合数，且

$$n=p_1p_2\cdots p_k=q_1q_2\cdots q_s.$$

其中 p_i，$i=1, 2, \cdots, k$，q_j，$j=1, 2, \cdots, s$ 为素数.

由最小正整数原理，不妨设 n 是最小的这样的数.

由于 p_i，q_j 为素数，则所有 p_i 与 q_j 互异，否则可以消除某个 p_i 和某个 q_j，从而有一较小的整数，它具有两个不同的因子分解，不妨设

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_k \text{ 及 } q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_s.$$

因为 $p_1 \neq q_1$，不妨设 $p_1 < q_1$，现在考虑

$$m = p_1 q_2 \cdots q_s.$$

由于 $p_1 \mid m$ 及 $p_1 \mid n$，从而 $p_1 \mid (n-m)$，$n-m = (q_1 - p_1) q_2 \cdots q_s$.

不妨设 $q_1 - p_1 = r_1 r_2 \cdots r_l$，其中 $r_i (1 \leqslant i \leqslant l)$ 为素数.

于是
$$n - m = r_1 r_2 \cdots r_l q_2 \cdots q_s.$$

由已知，p_1 不是 q_i 中任何一个，那么 $p_1 \nmid (q_1 - p_1)$，所以，对一切 i，$p_1 \nmid r_i$.

从而，所有 q_j 和 r_i 都与 p_1 互异，另一方面，$p_1 \mid (n-m)$，有

$$n - m = p_1 t_1 t_2 \cdots t_h.$$

其中 t_i 为素数，$1 \leqslant i \leqslant h$. 于是，$n-m$ 有两个互异的因子分解.

其中一个有 p_1，另一个没有 p_1. 而 $0 < n-m < n$，这与 n 为最小数矛盾.

分解定理表明，对于大于 1 的整数 n，可唯一表示成若干个素数之积，即

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

其中 $p_j (1 \leqslant j \leqslant k)$ 为素数. 当 $k=1$ 时，n 本身为素数，此外，这样的 n 的最小素除数$p \leqslant n^{\frac{1}{k}}$.

例 5 若 p 为素数，则$\sqrt{p}$ 不是有理数.

证明 若不然，假设$\sqrt{p} = \frac{m}{n}$，($(m, n) = 1$，$m, n \in \mathbf{Z}^+$)，则

$$p = \frac{m^2}{n^2}，即 m^2 = pn^2.$$

由于平方数有偶数个素数因子，所以上式不可能成立. 因为上式左边素因子的数目为偶数，而在右边同一个数却有奇数个的素数因子，这与数的素因子分解的唯一性矛盾.

一般地，我们有

例 6 设 $k > 1$ 为整数，且 k 不是完全平方数，则$\sqrt{k}$ 不是有理数.

证明 (反证法). 若不然，设$\sqrt{k} = \frac{p}{q}$ ($(q, p) = 1$，$p, q \in \mathbf{Z}^+$). 由于 k 不是完全平方数，所以有 $m \in \mathbf{Z}^+$，使 $m < \frac{p}{q} < m+1$. 从而，

$$0 < p - mq < q.$$

在等式 $p^2 = kq^2$ 的两边减去 mpq，得到 $p^2 - mpq = kq^2 - mpq$.

即
$$\frac{p}{q} = \frac{kq - mp}{p - mq}.$$

令 $p_1 = kq - mp$，$q_1 = p - mq$. 由于 $q_1 \in \mathbf{Z}^+$，且 $q_1 < q$，所以 $p_1 \in \mathbf{Z}^+$ 且 $p_1 < p$.

对等式$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$，用同样方法反复进行讨论，可以得到两串递减的自然数列 $p > p_1 > p_2 > \cdots$ 与 $q > q_1 > q_2 > \cdots$，且满足$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \cdots$.

这是不可能的，因为从 p 或 q 开始的自然数不可能无止境地递减下去，故 $\sqrt{k}$ 不是有理数.

1.2 有理数系

所有有理数组成的集合称为有理数系，记为 $\mathbf{Q}$.

在这一节中，介绍有理数集合的一些性质，首先，有如下结论：

1. 有理数系是一个域.

也就是说，在 $\mathbf{Q}$ 中定义了两种运算，加法"+"和乘法"·"，对 $\mathbf{Q}$ 中任意元素 a, b, c，满足

(1) 加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(2) 加法交换律 $a+b=b+a$.

(3) 乘法结合律 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

(4) 乘法交换律 $a\cdot b=b\cdot a$.

(5) 乘法对加法的分配律 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

(6) 在 $\mathbf{Q}$ 中，存在零元素"0"，满足对任意 $a\in\mathbf{Q}$，有 $a+0=a$.

(7) 对每个 $a\in\mathbf{Q}$，存在 a 的负元素"$-a\in\mathbf{Q}$"，使得 $a+(-a)=0$.

(8) 在 $\mathbf{Q}$ 中，存在单位元素"e"，满足对任意 a，有 $a\cdot e=a$.

(9) 对每个非零元素 $a\in\mathbf{Q}$，存在 a 的逆元素"a^{-1}"，满足 $a\cdot a^{-1}=e$.

以上为一个给定的非空集合构成域所必须满足的条件.

2. 有理数系是一个有序域.

即在 $\mathbf{Q}$ 中定义了具有如下排序性质的序关系"$\leqslant$"，可满足

(1) 对 $\mathbf{Q}$ 中元素 a, b，若 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$，则 $a=b$.

(2) 对 $\mathbf{Q}$ 中元素 a, b, c，若 $a\leqslant b$, $b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$.

(3) 对 $\mathbf{Q}$ 中元素 a, b，则 $a<b$, $a=b$, $a>b$ 这三种关系中有且只有一种成立.

(4) 对 $\mathbf{Q}$ 中元素 a, b，若 $a\leqslant b$，则对任意 $c\in\mathbf{Q}$，有 $a+c\leqslant b+c$.

(5) 对 $\mathbf{Q}$ 中元素 a, b，若 $a\leqslant b$，则对任意 $c\in\mathbf{Q}$, $c>0$，有 $ac\leqslant bc$.

3. 有理数系是一个阿基米德域.

即有理数系满足阿基米德定理：对任意 $x, y\in Q$, $x>0$, $y>0$，存在一个正整数 n，使 $nx>y$.

为了今后的应用，将1，2和3均作为定理. 其中定理3表明，有理数系 $\mathbf{Q}$ 中不含有无穷小元素 α(即不妨设 $\alpha>0$，无穷小元素 α 指非零，且绝对值小于任何有理数的数. 对 $\alpha<0$，可以考虑 $-\alpha>0$)，同样的，在 $\mathbf{Q}$ 中不包含无穷大元素，即不存在有理数 β，使得 β 大于任意正有理数.

一般地，用 $\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数，$\mathbf{Q}^-$ 为负有理数.

例 1 设自然数 n 为非平方数. 令 $S=\{x\mid x^2>n,\ x\in\mathbf{Q}^+\}$，$L=\{x\mid x\notin S,\ x\in\mathbf{Q}\}$. 证明集合 S 没有最小数，L 没有最大数.

证明 假设 a 为 S 的最小元素，b 为 L 的最大元素，则由条件，有

$$a^2 > n,\ b^2 < n.$$

取两个正整数 r 和 t，使得 $r^2 > nt^2$.

并令 $b' = \dfrac{rb+tn}{tb+r},\ a' = \dfrac{ra+tn}{ta+r}$.

则
$$b'-b = \frac{t(n-b^2)}{tb+r} > 0 \text{ 及 } a'-a = \frac{t(n-a^2)}{ta+r} < 0.$$

$$(b')^2 - n = \frac{(rb+tn)^2 - n(tb+r)^2}{(tb+r)^2} = \frac{(r^2-nt^2)(b^2-n)}{(tb+r)^2} < 0.$$

$$(a')^2 - n = \frac{(ra+tn)^2 - n(ta+r)^2}{(ta+r)^2} = \frac{(r^2-nt^2)(a^2-n)}{(ta+r)^2} > 0.$$

于是
$$b' > b,\ (b')^2 < n, \text{及 } 0 < a' < a,\ (a')^2 > n.$$

这表明，b' 在 L 之内，而 a' 在 S 之内，这与 b 为 L 的最大元素及 a 为 S 的最小元素的假设矛盾.

例 2 设由有理数 $\dfrac{p}{q}$ $((p,\ q)=1)$，构造两个数 $\dfrac{p}{p+q},\ \dfrac{q}{p+q}$，再由这两个数构造 4 个数 $\dfrac{p}{2p+q},\ \dfrac{p+q}{2p+q},\ \dfrac{q}{p+2q},\ \dfrac{p+q}{p+2q}$，再由 4 个构造 8 个数，这样一直下去.

证明：按上述方式，$\dfrac{1}{2}$ 可以构造出 $(0,\ 1)$ 中所有有理数.

证明 将有理数写成：$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{1}{6},\ \dfrac{5}{6},\ \dfrac{1}{7},\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{3}{7},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{5}{7},\ \dfrac{6}{7},\ \cdots,$

因为
$$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2+1},\ \frac{2}{2+1} \to \frac{1}{3+1},\ \frac{3}{3+1},\ \frac{2}{5+1},\ \frac{3}{5+1} \to \cdots$$

所以，可以看出，由 $\dfrac{1}{2}$ 可以构造出前几个有理数.

这里"$\to$"表示一次构造.

下面用归纳法证明，假如对所有形如 $\dfrac{b}{m},\ b<m,\ (b,\ m)=1,\ b,\ m \in \mathbf{Z}^+$ 的有理数均可以由 $\dfrac{1}{2}$ 构造出，那么对于 $\dfrac{b'}{m+1}$，其中 $b' < m+1,\ (b',\ m+1)=1,\ b',\ m \in \mathbf{Z}^+$，取 $d = \max\{m+1-b',\ b'\},\ c = \min\{m+1-b',\ b'\}$.

则 $d \leqslant m,\ c < d,\ (c,\ d)=1$. 由归纳假设，$\dfrac{c}{d}$ 可由 $\dfrac{1}{2}$ 构造出.

即 $\dfrac{1}{2} \to \cdots \to \dfrac{c}{d}$，由于 $\dfrac{c}{d} \to \dfrac{c}{c+d},\ \dfrac{d}{c+d}$.

又由于 $c+d=m+1,\ c,\ d$ 中必有一个为 b'，所以，在 $\dfrac{c}{c+d},\ \dfrac{d}{c+d}$ 中必有一个为 $\dfrac{b'}{m+1}$，

故$\dfrac{b'}{m+1}$可以由$\dfrac{1}{2}$构造出.

例 3 存在一族开区间 I_k, $k\in\mathbf{Z}$,满足对任意有理数 r,至少存在一个 k,使得 $r\in I_k$,且这些区间的长度之和可以任意小.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$,设 b_1, b_2, b_3, $\cdots$ 为所有有理数,每一个有理数在数轴上对应一个点,称为有理点.对数轴上的每一个有理点 b_k,作开区间 I_k:以 b_k 为中心,且区间 I_k 的长度为 $2^{-k}\varepsilon$,这样,便得到一族开区间 I_k 覆盖所有有理点的集合,并且它的长度之和为

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{\varepsilon}{2^3}+\cdots=\varepsilon.$$

1.3 有理数数列

定义 1 将无穷多个有理数按一定顺序排成一列,即

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{1.3.1}$$

则称(1.3.1)为有理数数列,记作$\{a_n\}$, a_n 为通项,下标 n 表示数 a_n 在这个数列中的第 n 项.

定义 2 对给定的有理数数列$\{a_n\}$及有理数 a,若对任意有理数 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$|a_n-a|<\varepsilon$.则称有理数数列$\{a_n\}$收敛,或有极限,且 a 为它的极限,称数列$\{a_n\}$收敛于数 a,记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $a_n\to a\ (n\to\infty)$.

如果这样的有理数 a 不存在,则称$\{a_n\}$在有理数系中不收敛.

例 1 设 $a_1=\dfrac{3}{8}$, $a_{n+1}=a_1+\dfrac{a_n^2}{2}$,则由有理数性质,$\{a_n\}$为有理数数列.

不难验证,$0<a_n<1$,且 $a_{n+1}>a_n$, $n=1,\ 2,\ \cdots$.

于是,$\{a_n\}$为单调有界数列,假设它有极限,不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则

$$a=a_1+\frac{a^2}{2}.$$

即 $a=1\pm\dfrac{1}{2}$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$.

如果取 $a_1=\dfrac{1}{8}$,则 $a=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ 为无理数.

这时,数列$\{a_n\}$在有理数系中无极限.

例 2 设 $a_n=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$,则$\{a_n\}$为有理数数列.

显然,$\{a_n\}$是单调的,并且,由于 $a_n<1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}<3$,即$\{a_n\}$有上界,

且不难证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. 从而，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \mathrm{e}$.

下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不是有理数.

如果此结论不成立，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ 为有理数，其中$(p, q)=1$, $p, q\in \mathbf{Z}^+$.

由于对任意 m, $0< a_{n+m}-a_n = \dfrac{1}{(n+1)!}+\cdots+\dfrac{1}{(n+m)!}<\dfrac{1}{n!n}$. 令$m\to+\infty$，得到$0<\mathrm{e}-a_n\leqslant\dfrac{1}{n!n}$.

由于 $2<\mathrm{e}<3$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不是自然数，因此 $q\geqslant 2$.

于是

$$0<q!(\mathrm{e}-a_q)\leqslant\frac{1}{q}\leqslant\frac{1}{2}.$$

但 $q!(\mathrm{e}-a_q)=(q-1)!\cdot p-q!\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{q!}\right)$ 为整数，矛盾.

于是$\{a_n\}$ 在有理数系中不收敛.

定义3 设$\{a_n\}$ 为有理数数列，如果对任意有理数$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n, m>N$时有$|a_n-a_m|<\varepsilon$. 则称$\{a_n\}$ 为柯西(A. L. Cauchy)有理数数列，或称有理数基本数列，简称柯西数列.

对于 $a_n = 1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$，当$m>n\geqslant 3$时，有 $|a_n-a_m|=\dfrac{1}{(n+1)!}+\cdots+\dfrac{1}{m!}=\dfrac{1}{(n+1)!}\left(1+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right)\leqslant\dfrac{1}{(n+1)!}\left(1+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}+\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{1}{n+4}+\dfrac{1}{n+4}-\dfrac{1}{n+5}+\cdots+\dfrac{1}{m-1}-\dfrac{1}{m}\right)<\dfrac{1}{(n+1)!}\left(1+\dfrac{2}{n+2}\right)<\dfrac{2}{(n+1)!}\leqslant\dfrac{1}{n}$.

于是数列$\{a_n\}$ 为柯西数列.

又如有理数数列 1, 1.4, 1.41, 1.414, …，也是一个柯西数列，但在有理数数系中不收敛.

以上的例子表明，虽然全体有理数是阿基米德有序域，但柯西有理数列在有理数系中不一定收敛. 从几何上来看，有理数系在实轴上存在有“空隙”，或称有理数系不具有完备性.

在下一节中，我们将利用有理数系，构造一个新的数系，使它不仅具有阿基米德性质，而且在数轴上不存在“空隙”，即使得任意柯西有理数数列在新的数系中必有极限，也就是说，新的数系具有完备性. 此外有理数系将作为新的数系的一个子集，当有理数作为新数系进行运算时，仍保持其原来的运算规律，这种新的数系称为实数系.

1.4 实数系

利用有理数系构造实数系的方法很多，如康托尔(G. Cantor)基本列方法，戴德金(R. Dedekind)分划法和无限小数公理法等等，在这一节中，将主要介绍康托尔基本列方法，并对另外两种方法作简单介绍.

康托尔基本列方法的核心想法是，柯西有理数数列就是实数.

例如$\{a_n\}$：3，3.1，3.14，3.141，…，为π的无穷小数展开式的前n项，而$\{a_n\}$为柯西有理数数列，该数列的极限就定义为π.

又如$a_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$的极限为e，且$\{a_n\}$也为柯西有理数数列，则该数列的极限就定义为e.

不过，π还可以表示为另一个柯西有理数数列的极限，如：

$$\{b_n\}\text{：}3.3,\ 3.2,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ \cdots,$$

那么，对于同一个实数π可以看作两个或多个不同的柯西有理数数列的极限，这些数列之间有什么关系呢？

为了揭示它们之间的关系，我们引进等价类的概念.

定义 4 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为两个柯西有理数数列，如果满足$a_n - b_n \to 0\ (n\to\infty)$.

那么，称它们是等价的，并记作$\{a_n\}\sim\{b_n\}$.

将所有等价的数列看作一类，称为等价类.

在等价类中，每一个具体的柯西有理数数列都是这个等价类的代表元，在每一个等价类中，任意一个代表元都是一样的.

定义 5 柯西有理数数列，按上述定义的等价类定义一个实数.

由于有理数也是实数，那么，哪些等价类代表有理数呢？

设r为有理数，令$a_n = r$，即

$$\{a_n\}\text{：}r,\ r,\ \cdots,\ r,\ \cdots$$

显然$\{a_n\}$也是一个柯西有理数数列，称为常驻数列.

将有理数r与由r构成的常驻数列集合$1-1$对应，若一个等价类中包含一个常驻数列$\{r_w\}$，则这个等价类代表有理数r_w.

是否存在这样的等价类，它包含2个或2个以上的常驻数列？如果存在，不妨设某等价类含有两个常驻数列$\{r\}$和$\{s\}$，因为它们等价，所以

$$r - s \to 0 \quad (n\to\infty).$$

从而　$r = s$.

即在等价类中最多能包含一个常驻数列.

将柯西有理数数列分为两类，Ⅰ类为含有某个常驻数列$\{r\}$的等价类，Ⅱ类为元素不含常驻数列的等价类.

定义 6 Ⅰ类的元素称为有理数，且$\{r\}$对应于r；Ⅱ类元素称为无理数.

实数系由Ⅰ类和Ⅱ类的元素组成.

这样，就完成了实数系$\mathbf{R}$的构造.

我们将验证，这样构造的实数系$\mathbf{R}$是一个有序域，且具有阿基米德性质，显然，有理数系是它的一个子集合，且$\mathbf{R}$在实轴上无空隙，即$\mathbf{R}$是完备系.