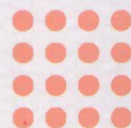


高等学校“十一五”规划教材



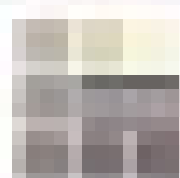
LILUN LIXUE

理论力学

主 编 王爱勤

西北工业大学出版社

教育部推荐教材 普通高等教育力学教材



EDUCATION

理论力学

（第二版）

高等教育出版社

高等学校“十一五”规划教材

理论力学

主 编 王爱勤

编 者 王爱勤 商泽进

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部高等学校工科本科理论力学课程(中、少学时)教学的基本要求和教育部工科学课程教学指导委员会面向 21 世纪工科学课程教学改革的要求编写而成的。全书共三篇十章,分别阐述了运动学、静力学、动力学的基本理论,取材得当,深入浅出。各章例题类型较为全面并配有思考题和习题,适用于课堂教学。

本书可作为高等学校工科本科及专科理论力学课程的教材,也可作为高等职业、成人教育等相关专业的教材,还可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/王爱勤主编. —西安:西北工业大学出版社,2009.1
ISBN 978-7-5612-2498-4

I. 理… II. 王… III. 理论力学 IV. O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 214362 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西宝石兰印务有限责任公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:15

字 数:362 千字

版 次:2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷

定 价:22.00 元

前 言

本书是根据国家教育部高等学校工科本科理论力学课程(中、少学时)教学的基本要求、教育部工科力学课程教学指导委员会面向 21 世纪工科力学课程教学改革的要求编写而成的。

在编写过程中,作者根据多年来在理论力学教学中积累的经验,注意汲取同类教材的精华,试图用现代和实用的观点阐述理论力学的核心内容和方法,既保持了本课程的基本要求,又注意与先修的高等数学、大学物理的衔接及向材料力学等后续课的过渡。在优化教学内容的同时,加强学生能力的培养,全书特点概括如下:

(1)充分利用先修课程的基础,减少课程间内容的重复。教材内容做了较大幅度的整合和调整,变先讲静力学为先讲运动学,提高起点,激发学生的学习兴趣 and 主观能动性。

(2)由于分析力学方法在近代计算力学中日益显示出其重要性,因此,适当补充了分析运动学的内容,以培养学生综合运用矢量力学和分析力学两种方法解决问题的能力,同时便于约束、自由度、广义坐标等概念在静力学和动力学中的应用。

(3)在动力学中,改变传统教材体系,先讲动能定理,然后将动量定理和动量矩定理合并成动量原理讲授,再讲达朗伯原理,以此突出动能定理处理单自由度已知主动力求运动的特点,克服动量定理不能处理先求运动再求动反力的问题。同时有利于学生理解动量原理和达朗伯原理在处理动力学问题上的等价性。

(4)注重以工程实际为背景,加深对物理概念的阐述和工程建模能力的培养,重视对运动过程的分析,而不仅限于特定瞬时或特定位置的运动。因此,也适当加强建立和处理运动方程及运动微分方程的训练。

(5)本书定位明确,可作为高等学校相关专业本科及专科理论力学课程(中、少学时)的教材。

(6)本书选配了一定数量的典型例题、思考题和习题供教师和学生选用。

本书内容分三篇,共 10 章。绪论、第一篇运动学(第 1~3 章)、第二篇静力学(第 4~6 章)由王爱勤编写,第三篇动力学(第 7~10 章)由商泽进编写。王爱勤担任主编,负责全书统稿、修改和定稿工作。

在编写过程中,长安大学力学系的老师们给予了大力的支持与帮助,同时,编者还参考了国内外一些优秀教材,并选用了其中部分例题和习题。在出版过程中,西北工业大学出版社的同志付出了辛勤的劳动,在此一并表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限,欠妥之处在所难免,恳请同行及读者批评指正。

编 者

2009 年 1 月

目 录

绪论.....	1
---------	---

第一篇 运动学

第一章 运动学基础.....	7
1-1 点的运动学.....	7
1-2 刚体的基本运动	14
1-3 平面机构运动的分析法	19
思考题	21
习题	23
第二章 点的合成运动	26
2-1 点的合成运动的基本概念	26
2-2 点的速度合成定理	28
2-3 点的加速度合成定理	29
思考题	35
习题	36
第三章 刚体的平面运动	41
3-1 刚体平面运动的描述	41
3-2 平面运动刚体上点的速度	42
3-3 平面运动刚体上点的加速度	51
思考题	56
习题	58

第二篇 静力学

第四章 静力学基础	65
4-1 力的概念和静力学公理	65

4-2 约束和约束反力	70
4-3 物体的受力分析及受力图	74
思考题	79
习题	80
第五章 平面力系	83
5-1 力在轴上的投影和力对点之矩	83
5-2 平面力偶理论	86
5-3 平面力系的简化	88
5-4 平面力系的平衡条件和平衡方程	92
5-5 物体系的平衡、静定和静不定问题	101
5-6 考虑摩擦时的平衡问题	107
思考题	113
习题	115
第六章 空间力系	124
6-1 力在直角坐标轴上的投影	124
6-2 力对点之矩和力对轴之矩	126
6-3 空间力系的平衡方程及其应用	129
6-4 重心	135
思考题	140
习题	140
第三篇 动力学	
第七章 动力学基础	147
7-1 动力学基本定律	147
7-2 质点运动微分方程	148
思考题	157
习题	158
第八章 动能定理	160
8-1 质心和转动惯量	160
8-2 力的功	164
8-3 动能	169
8-4 动能定理	171

8-5 功率和功率方程.....	175
思考题.....	177
习题.....	177
第九章 动量原理.....	183
9-1 基本概念.....	183
9-2 动量定理.....	187
9-3 动量矩定理.....	194
思考题.....	199
习题.....	199
第十章 达朗伯原理.....	205
10-1 惯性力 达朗伯原理	205
10-2 刚体惯性力系的简化	206
10-3 达朗伯原理应用举例	211
10-4 动力学基本定理的综合应用	215
思考题.....	219
习题.....	219
各章习题参考答案.....	224
参考文献.....	232

绪 论

一、研究内容

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学。自然界中存在着各种各样的物质运动,运动是物质的固有属性,它包括宇宙中发生的一切现象和过程。机械运动则是所有运动形式中最简单的一种,指的是物体在空间的位置随时间的改变。例如,车辆的行驶、机器的运转、大气和水的流动、建筑物的振动及宇宙飞船的运行等,都是机械运动。平衡是机械运动的特例。物质的各种运动形式在一定条件下可以互相转化,而且在高级和复杂的运动中,通常也包含或伴随着机械运动。所以,研究机械运动不仅可以揭示自然界各种机械运动的规律,而且还是研究物质其他运动形式的基础,这就决定了理论力学在自然科学研究中重要的基础地位。

理论力学研究速度远小于光速的宏观物体的机械运动,属于古典力学范畴,其科学体系是以伽利略和牛顿总结的基本定律为基础,在 15~17 世纪逐步形成之后,又不断得到改善和发展的。在 20 世纪初,出现了相对论力学和量子力学,打破了传统的时空概念,建立了现代力学的科学体系。速度接近于光速的物体和微观粒子的运动,只有应用相对论力学和量子力学的观点才能给予完善的解释。对此古典力学有明显的局限性,但对于远小于光速的宏观低速物体的运动,相对论力学对古典力学的修正几乎为零。因此,对于一般工程中所遇到的力学问题,即使是一些尖端科学中的大量力学问题,用古典力学的方法来解决,不仅方便,而且能够保证足够的精确性。所以,古典力学至今仍有重要的实用意义,并且仍在不断发展完善之中。

理论力学源于物理学的一个分支,但其内容已大大超过了物理学的内容,它不仅要求建立与力学有关的各种基本概念和理论,而且要求能运用理论知识,对从实际问题中抽象出来的力学模型进行分析和计算。

理论力学的研究内容通常包括以下三个方面。

运动学:研究物体运动的几何性质,而不考虑引起物体运动的原因。

静力学:研究力系的简化以及物体在力系作用下的平衡规律。

动力学:研究物体运动的变化与它所受力之间的关系。

静力学中所讨论的静止和平衡是运动的一种特殊形态,因此,也可以认为静力学是动力学的一种特殊情况。不过由于工程技术发展的需要,静力学已积累了丰富的内容并且形成一个相对独立的组成部分。另外,动力学问题也可以从形式上变换成平衡问题用静力学理论求解。

二、学习目的

理论力学是一门理论性很强的技术基础课。学习理论力学,掌握机械运动的客观规律,就能够理解并利用许多机械运动。例如,道路的转弯处为什么外侧要比内侧高?道路的表面为什么要宏观上平整,微观上粗糙?车辆为什么多用后轮驱动,前轮刹车?卫星如何绕地球运

转? 等等问题都可以由理论力学原理得到解释。

当然,学习理论力学不仅仅在于解释日常所见的机械运动现象,还在于掌握并应用机械运动的规律,更好地为工程实际服务。各种机械、设备和结构的设计,机器的自动调节和振动的研究等都包含着大量的力学问题。尽管有些问题单靠理论力学的知识是不够的,但在解决这些问题时,理论力学的知识却是不可或缺的。

此外,理论力学研究力学中最普遍、最基本的规律。许多工程类专业的其他课程,如材料力学、结构力学、弹性力学、流体力学、振动理论、机械原理等都需要用到理论力学的知识。所以,理论力学是工科类大多数专业的重要技术基础课,其基本理论和基本知识在基础课与专业课之间架起了桥梁,是学习一系列后续课程的基础,其分析问题和解决问题的思路,对后续课的学习也有帮助。

伴随着科学技术的日益发展和现代化进程的加快,会不断出现新的力学问题,这为力学知识的发展和应用提供了新的机遇和挑战。学好理论力学知识,将有利于解决与理论力学有关的新问题,从而促进科学技术的进步,推动理论力学不断向前发展。

三、研究方法

实践,认识,再实践,再认识,这是科学技术发展的正确途径。理论力学的发展也遵循这一规律。概括地说,就是从实际出发,经过抽象化、综合、归纳而建立公理,再应用数学演绎和逻辑推理而得到定理和结论,形成理论体系,然后再通过实践来验证理论的正确性。

理论力学是一门历史悠久的成熟学科,具有相对的稳定性。它以为数不多的几条公理、定律为基础,以统一的观点深刻地揭示了力学诸定理之间的内在联系,形成了一定的逻辑系统。其处理力学问题所遵循的方法一般是:

- (1) 将所要研究的问题抽象化为一定的力学模型,这些力学模型既要能反映问题的主体,又要便于求解。
- (2) 应用力学原理把有关的力学问题用数学形式表述。
- (3) 运用数学工具求解。
- (4) 根据具体问题,对数学解进行分析讨论,甚至决定取舍。

在理论力学的学习中,注意到这门学科理论的系统性、严密性,对于理解、掌握这门课程很有帮助。

在工程实际问题中,所研究物体复杂多样,即便是同一类型的问题,其力学状况也不尽相同,为便于研究,须将工程实际问题进行简化,以得到合理的力学模型,再在此基础上作进一步的分析和计算。将一个实际问题抽象成力学模型并非容易,须在实践中锻炼和提高这方面能力,一般而言,可从三方面加以简化:物体的几何尺寸、物体承受的载荷(力)和受到的约束。

在简化过程中,因为要略去次要因素,必然包含着某种近似。例如,某些尺寸远比其他尺寸小,则可忽略不计,因此,在微小面积上的分布力可视为集中力;接触面光滑或经过充分润滑时可不计摩擦等。究竟哪些因素可以忽略,取决于所需的资料及其精度。如果对实际存在的一些因素,不分主次全都计入,看起来似乎很符合实际,其结果可能使问题无法求解,或者虽能求解,但困难极大,耗时费力,而实际上并不需要这样高的精度。所以,对一个具体问题,在抽

象成为力学模型时,必须深入分析,力求合理可行。在理论力学中,研究物体的机械运动规律时,可把实际物体抽象为力学模型作为研究对象。理论力学中的力学模型有质点、质点系和刚体。

质点:只有质量而无几何尺寸的几何点。如果物体的尺寸和形状与其研究的问题关系不大,就可以把此物体抽象为质点。

质点系:若物体的运动与其尺寸或形状有关,则该物体可视为有限个或无限个质点组成的系统,称为质点系。它是最一般的力学模型。

刚体:当物体大小、形状的改变很小,对问题的研究影响不大时,可视为刚体,它是质点系的一个特例,是对一般固体的理想化,即刚体在力的作用下不发生变形或运动时其内任意两点之间距离保持不变。多个刚体组成的系统称为刚体系统。

上述几种理想的力学模型,都是客观存在的实际物体的科学抽象。它们并不特指某些具体物体,而是概括了各种物体,不论物体的材质,也不论是什么工程构件,在研究它们的平衡或运动时,都可以作为上述几种模型之一加以考察。它表明了理论的普遍意义。理论力学限于离散的质点、质点系、刚体和刚体系统,称为离散系统。

运用力学理论分析和解决工程问题的深度和广度,在一定程度上还受到计算工具的制约。当计算工具简单时,力学模型应尽可能建立得简单些,求解时,有时只分析特定条件下的几个状态量。近代计算机的发展和普及为解决复杂的力学问题提供了新的分析方法。计算机已成为学习理论力学知识的有效工具,并在逻辑推演、公式推导、力学理论的发展中发挥着重大作用。

研究物体机械运动的普遍规律有两种基本方法,从而形成理论力学的两大体系:一是用矢量的方法研究机械运动的普遍规律,称为矢量力学;二是用数学分析方法进行研究,称为分析力学。本书以矢量研究方法为主,适当介绍一些数学分析研究方法。

四、学习方法

理论力学课程讨论物理现象,具有物理学科的特点;理论力学又与高等数学中的矢量运算、微积分、线性代数和微分方程关系密切,同时又是工程专业后续课程的基础。理论力学的基础是物理中的力学部分,而其体系完整,逻辑严谨,演绎严密,在一定程度上又具有数学课程的特点,同时,理论力学又不是抽象的纯理论学科,而是应用学科。事实上,对大多数工科学生而言,理论力学是从纯数理学科过渡到专业课程中须学习的与工程实际有关的第一门力学课程。这是一个重要的转折点。基于此,学习该课程时应注意下列问题:首先,与物理学相比,理论力学的基本概念深化了,基本理论系统了,基本方法实用了。因此,同样的定理,用理论力学方法可以解决物理中的力学问题,但反之未必。其次,理论力学系统性强,各部分环环相扣,学习时应循序渐进,及时拾遗补缺,要注意正确理解有关力学概念的来源、含义和用途;注意有关理论公式推导的根据和关键,公式的物理意义及应用条件和范围;注意各章节的主次内容及在处理问题方法上的区别和联系;注意温故知新,及时复习和常作小结。再次,有意识培养分析和解决问题的能力,要特别注重从工程实际中抽象力学问题,应用理论力学知识对提炼出的力学问题进行数学描述,并求解相应的数学问题,在分析中,既要作定性的分析,又要作定量的计

算,并能校核结果的正误。最后,对理论力学基本概念的理解和理论应用能力的提高是通过大量习题的求解逐步加深的。因此,做一定量的习题是学好理论力学的重要环节。须指出,习题应当在理解的基础上做,切忌不看书、不复习,为完成任务而埋头做题;有些习题要精做,1道题用3种方法做,往往比用1种方法做3道题有收获,切忌贪多求快,不求甚解;要能从错题中汲取教训,不要放过一些似是而非的模糊概念,学会剖析、抓错和认错;习题书写要规范,要会用简练的工程语言解决实际问题。

总之,只要方法得当,刻苦努力,学生完全可以达到理论力学课程的基本要求:准确理解基本概念、熟悉基本定理和公式并能灵活运用。

第一篇 运 动 学

运动学是从几何学的角度来观察物体的运动规律,也就是不探究引起物体运动状态变化的物理原因(如力、质量等),而单独研究物体运动的几何性质,即物体在空间的位置随时间变化的规律,其中,包括物体的运动轨迹、速度和加速度等。

在运动中所涉及的物体,一般可以抽象为两种力学模型:动点和刚体。这种抽象往往取决于所讨论问题的性质,而不在于物体本身的大小和形状。例如,子弹虽小,若要考虑其出枪膛后的旋转,就应视为刚体;火车虽长,若要考察它沿铁轨运动的距离、速度和加速度时,却可视为动点。另外,即使同一物体也可以得到不同的抽象。比如,研究地球相对于太阳公转的规律时,可视为动点,而研究其自转规律时,可视为刚体。

运动是绝对的,而运动的描述是相对的。研究物体的机械运动,必须先取另一个物体作为参考体,与参考体所固连的坐标系称为参考系。参考系是参考体的抽象,由于坐标轴可以向空间无限延伸,因此参考系不受参考体大小和形状的限制,而应理解为与参考体所固连的整个空间。在不同的参考系上描述同一物体的运动,将得到不同的结论。例如,行驶的车厢内放置的物体,对车厢而言是静止的,而对地面来讲则是运动的。工程问题中,如不特别指明,常把参考系固连在地球上。

在运动的描述中要区别“瞬时”和“时间间隔”的不同意义。瞬时是指某个确定的时刻,抽象为时间坐标轴上的一个点。时间间隔是指两个瞬时之间的一段时间,是时间坐标轴上的一个区间。在某个时间间隔内发生的运动,当时间间隔趋近于零时,其极限状态就是某个瞬时的运动状态。

学习运动学的目的,首先是为学习动力学打好基础。其次,运动学本身也可直接用于工程实际。例如在机械设计中机构的运动学分析已经发展成为机构运动学。在力学的发展史中,也正是机构运动学的研究丰富了运动学的内容,促进了这个学科的发展。

运动学有两种不同的研究方法——矢量法和分析法。矢量法用矢量表示物体的空间位置和运动特性,利用几何关系进行计算,尤其是相对参考系的引入和运动合成概念的建立,使得矢量法内容更加丰富和深化,直接建立速度合成和加速度合成矢量方程,求解有关的速度和加速度,而无须建立运动方程,这种矢量法又称合成法。分析法引入坐标和约束方程的概念,采用直接对标量方程求导的方法计算速度和加速度。这两种方法相互渗透,各具特色。合成法比较直观,易于对特定瞬时的运动进行分析和计算;分析法可直接利用计算机求解,多用于复杂机械运动全过程分析。

第一章 运动学基础

由于计算机的发展和普及,运动学分析法在工程计算中的地位不断提高,特别是在工程实际中常常注重对运动全过程的分析,而不仅仅限于分析特定瞬时的运动,这一要求完全可以由分析法的数值计算来满足。本章主要研究点的运动和刚体的简单运动的分析法,它是研究物体复杂运动的基础。另外,简要介绍一些平面机构运动的分析法。

1-1 点的运动学

用分析法研究动点在空间的运动,首先要选择一个合适的参考系。然后用该参考系的坐标描述动点在任意瞬时的空间位置,即建立动点的运动方程。最后,用求导数的方法计算动点的速度和加速度。本节在已有的高等数学和大学物理知识的基础上,分别介绍点运动的矢径法、直角坐标法和自然法。

1. 矢径法

在参考系上选定确定的参考点 O (相对参考系固定不动), 设动点 M 在空间作曲线运动, 则动点 M 在某瞬时 t 的位置, 由点 O 向动点 M 作矢量 $\mathbf{r}$ 来确定, 称为点 M 相对点 O 的位置矢径。显然, 当动点 M 运动时, 矢径 $\mathbf{r}$ 的大小和方向随时间 t 而变化, 是时间 t 的单值连续矢函数, 即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-1)$$

式(1-1)完全确定了任一瞬时动点在空间的位置, 称为动点以矢径表示的运动方程。

当动点运动时, 矢径端点所描绘出的曲线称为矢径 $\mathbf{r}$ 的矢端曲线, 也就是动点 M 的运动轨迹。

设动点于不同时刻 t 和 $t + \Delta t$ 在参考系中处于不同位置, 分别以 M 和 M' 表示。如图 1-1 所示, 则动点在 Δt 时间内经过的路程为 $\widehat{MM'}$, 对应的位移矢量为 $\overrightarrow{MM'}$, 记为 $\Delta \mathbf{r}$, 即

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

动点在时间 Δt 内的位移由点的起迄位置完全确定, 与所走路径无关。将位移矢量 $\Delta \mathbf{r}$ 除以位移所经历的时间间隔 Δt , 定义为动点在 Δt 时间间隔内的平均速度 $\mathbf{v}^*$, 即 $\mathbf{v}^* = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 。时间间隔的大小不同, 得到的平均速度的大小和方向也不同, 因此, 用平均速度不能准确地刻画点的运动状态。为了得到点的位置变化的精确描述, 令 $\Delta t \rightarrow 0$, 平均速度的极限

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}^* = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-2a)$$

称为点在 t 时刻的瞬时速度, 简称为速度。显然, 它是描述点在某一瞬时运动的快慢和方向的物理量。

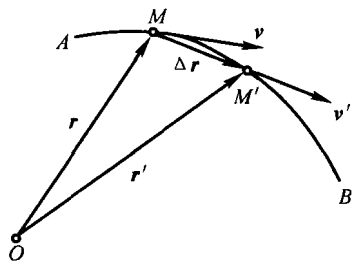


图 1-1

根据矢量导数的定义,上式可以写为

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1-2b)$$

因此,点的速度 $\mathbf{v}$ 等于点的位置矢径对于时间 t 的一阶导数,其方向就是 Δt 趋近于零时 $\Delta \mathbf{r}$ 的极限方向,即沿着动点的轨迹在该点的切线指向运动前进的一方,速度 $\mathbf{v}$ 的模为 $|\mathbf{v}|$,量纲为 $[\text{长度}][\text{时间}]^{-1}$,速度的法定计量单位为 m/s (米/秒)或 km/h (千米/时)。

设点在相邻时刻 t 和 $t + \Delta t$ 的速度分别为 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ 。如图 1-2 所示, $\Delta \mathbf{v}$ 为点在 Δt 时间间隔内的速度增量。将 $\Delta \mathbf{v}$ 除以 Δt 定义为点在 Δt 时间间隔内的平均加速度,即 $\mathbf{a}^* = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ 。当 Δt 趋近于零时,其极限定义为点在 t 时刻的瞬时加速度,简称为点的加速度,记作 $\mathbf{a}$,即

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}^* = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (1-3)$$

因此,点的加速度 $\mathbf{a}$ 等于点的速度对于时间 t 的导数,或是矢径 $\mathbf{r}$ 对时间 t 的二阶导数,它是描述点的速度快慢和方向变化的物理量。

加速度方向沿 Δt 趋近于零时 $\Delta \mathbf{v}$ 的极限方向,将图 1-2 中不同瞬时的速度矢量移到同一点 O' ,这些速度矢量的末端便描绘出一条连续的曲线,如图 1-3 所示,称为速度矢端图。那么,加速度 $\mathbf{a}$ 就等于速度矢量 $\mathbf{v}$ 的端点 M 沿速度矢端图运动的速度。所以, $\mathbf{a}$ 的方向沿着速度矢端图在 M 点的切线方向。

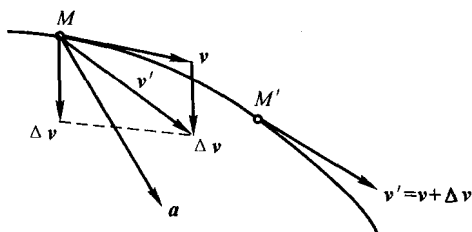


图 1-2

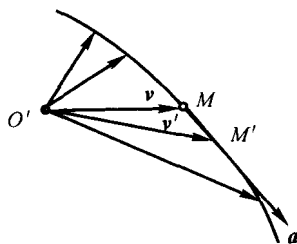


图 1-3

加速度模为 $|\mathbf{a}|$,量纲为 $[\text{长度}][\text{时间}]^{-2}$,加速度的法定计量单位为 m/s^2 (米/秒²)或 cm/s^2 (厘米/秒²)。

用矢径法表示点的运动便于定义一些物理量和公式的推导,在具体建立动点的运动方程并计算其速度和加速度时,常用直角坐标法和自然法等。

2. 直角坐标法

在参考点 O 建立直角坐标系 $Oxyz$,当动点 M 作空间曲线运动时,点的矢径形式的运动方程可解析地表示为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1-4)$$

式中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为沿三个坐标轴的单位常矢量。如图 1-4 所示,由于矢径 $\mathbf{r}$ 是时间 t 的单值连续函数,因此,直角坐标形式的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

式(1-5)也是点的轨迹的参数方程,从中消去时间 t ,即得点的轨迹方程。确定动点在空间位置

的独立坐标数称为动点的自由度。可见,自由动点有 3 个自由度。

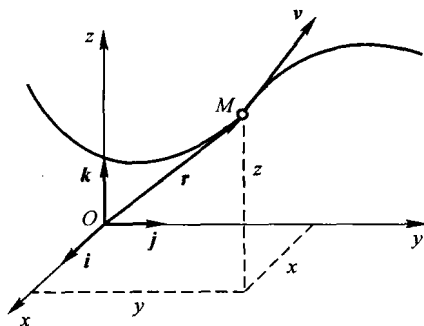


图 1-4

将式(1-4)对时间求一阶导数,有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (1-6)$$

设动点 M 的速度 $\mathbf{v}$ 在直角坐标轴上的投影为 v_x, v_y, v_z , 即

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (1-7)$$

比较式(1-6)和式(1-7)得

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

因此,速度在直角坐标轴上的投影等于动点各对应坐标对时间的一阶导数,将速度 $\mathbf{v}$ 的解析式(1-7)代入式(1-3)得

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} \quad (1-9)$$

设动点 M 的加速度 $\mathbf{a}$ 在直角坐标轴上的投影为 a_x, a_y, a_z , 即

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (1-10)$$

比较式(1-9)和式(1-10)得

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

因此,加速度在直角坐标轴上的投影等于动点的各对应坐标对时间的二阶导数。

3. 自然法

在点的运动轨迹上建立弧坐标及自然轴系,并用它们来描述和分析点的运动的方法,称为自然法。