



读考研书 找人大社



2010 考研

历届数学真题题型解析(数学一)

主编 黄先开 曹显兵

● 囊括**23年**全部真题 ● 名师归纳总结**127**题型

全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1987—2009年真题
题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路
章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见
每章后附自测练习题，全部来自数二、三、四的历年真题，互相借鉴，触类旁通
23年试卷附录在后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明



中国人民大学出版社

013-44/199

:2010(1)

2009

考研历届数学真题 题型解析(数学一)

► 主 编 黄先开 曹显兵
► 编 者 黄先开 曹显兵
施明存 殷先军

正版查询及服务程序



← 刮 开 涂 层



← 获取 20 位 数 字 编 码



← 上 www.1kao.com.cn 注册



← 登录增值服务进免费课堂



2010

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

考研历届数学真题题型解析·数学一/黄先开,曹显兵主编.4版

北京:中国人民大学出版社,2009.3

ISBN 978-7-300-07360-6

I. 考…

II. ①黄…②曹…

III. 高等数学-研究生-入学考试-解题

IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 016464 号

考研历届数学真题题型解析(数学一)

主 编 黄先开 曹显兵

出版发行	中国人民大学出版社	
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码 100080
电 话	010-62511242(总编室)	010-62511398(质管部)
	010-82501766(邮购部)	010-62514148(门市部)
	010-62515195(发行公司)	010-62515275(盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn	
	http://www.1kao.com.cn (中国 1 考网)	
经 销	新华书店	
印 刷	北京鑫霸印务有限公司	
规 格	210 mm×285 mm 16 开本	版 次 2006 年 6 月第 1 版
		2009 年 3 月第 4 版
印 张	29.75	印 次 2009 年 3 月第 1 次印刷
字 数	829 000	定 价 46.00 元

郑重声明

黄先开、曹显兵教授主编的《考研历届数学真题题型解析》系列图书，因其名师的底蕴、全面的内容、权威的解析，名副其实地成为全面、权威、实用的数学真题类考研辅导书。

当前考研图书市场盗印盗销行为猖獗。盗版行为在侵害作者和出版者权益的同时，也因其印装粗劣、错漏百出，使考生蒙受金钱损失、精力损失，甚至误导考生，毁掉考生考研前程。

多年来，我们一直与盗版行为作着艰苦的斗争，并让一些盗版者受到了应有的处罚。今年，我们将进一步加大打击盗版的力度，并利用包括法律手段在内的一切手段，让盗版者受到严惩。

请广大考生认准以下防盗版特征：(1) 封面防伪标带 20 位密码网上注册查真伪。
(2) 封面压有带人大出版社社标的压纹。

在以上措施的基础上，我们奉行以服务打击盗版，让买人大版图书的考生享受到实实在在的服务。今年我们将继续为购书考生提供网上增值服务，详情请及时登录中国 1 考网 (www.1kao.com.cn) 查询。

为保障您和您尊敬的老师的合法权益，请将您掌握的盗版者信息及时提供给我们。

举报电话：010-62515275

编辑电话：010-62511915

咨询电话：010-62511349

电子邮箱：1kao2005@163.com

中国人民大学出版社授权律师
北京市洪范广住律师事务所
徐波

2009 年 2 月

真题复习

攻克数学的突破口

数学在研究生入学考试中分值之高，使其对于考研的成功与否起着至关重要的作用。而要攻克这一重点与难关，必须要把真题复习作为突破口。

黄先开、曹显兵教授多年从事研究生入学考试的研究与辅导，在考生中广受赞誉，他们积丰富经验所主编的这套《考研历届数学真题题型解析》，内容权威，覆盖面广，解析精准，对于考生深度复习真题，全面提高应试能力大有帮助益。

考研数学的复习是一项系统工程，在全力攻克真题的同时，考生还需要在其他方面下工夫。相关图书如下：

《2010年考研数学经典讲义（理工类）》

《2010年考研数学经典讲义（经济类）》

《2010年考研数学最新精选600题（理工类）》

《2010年考研数学最新精选600题（经济类）》

《2010年考研数学经典冲刺5套卷（数学一）》

《2010年考研数学经典冲刺5套卷（数学二）》

《2010年考研数学经典冲刺5套卷（数学三）》

以上图书均由黄先开、曹显兵教授主编。经过认真复习，我们相信您定可以轻松上阵，考取高分，圆考研名校梦。

前言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来,至今已 23 年,共命制试卷近百份,有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶,它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,展示出统考以来数学考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题,是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题,可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考典型题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心分析研究,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的,相信能够满足考生的要求。

本书具有以下特点:

1. 内容最全面。汇集了统考以来 23 年的所有试题,便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余三类试卷的相关典型真题作为习题提供(如数学一每章后面精选了数学二、数学三和数学四的同类型考题),以便考生进一步巩固相关知识,考生有了本书后,也就相当于拥有了其余三类试卷的资料。

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求,每一章节均按题型进行归类,并对每一题型进行了分析、归纳和总结。这样考生可通过题型研究,把握命题特点和命题思路,做到举一反三,触类旁通。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法,然后详解——详细、规范的解答过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及的知识、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头,先列出了考试大纲规定的内容与要求,与此相对照再进行题型归类和分析总结,顺序与考试大纲和一般教材一致,便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除每类题型均有归纳总结外,每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结,这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重,从而发现命题的重点、最常考的题型,以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排,又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、复习指导书同步进行,后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析,但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注,而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后,再去看书中的分析、详解和评注,仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同;如果存在问题,应尽量查清原因,看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺,还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。注意,这



样的归纳总结过程是必不可少的,其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来,在掌握基本理论、基本概念和基本方法上,在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上,相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点,同时在这次编写完善过程中,参考了众多相关的教材和复习指导书,在此不一一提及,谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促,加上编者水平所限,书中难免还有不足之处,恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信,只要广大考生充满信心,通过脚踏实地的艰苦努力,就一定能够心想事成。

编者

2009年2月于北京

读考研书 找人大社

一、2010 人大版考研英语类图书

书 名	作者	开本	定/估价	出版时间
2010 年考研英语阅读 200 篇	郭庆民	16K	59.00	2009.2
历年考研英语真题名家详解(2010 版)	张锦芯	16K	38.00	2009.2
2010 年考研英语新教程	张锦芯	16K	48.00	2009.2
2010 年考研英语阅读 Part B 全突破	张锦芯	16K	28.00	2009.2
2010 年考研英语写作专项突破	田育英	16K	22.00	2009.2
2010 年考研英语词汇活用巧链记	白 洁	32K	25.00	2009.2
2010 年考研英语词汇复习指南	谢振元	16K	46.00	2009.2
2010 年考研英语高分词汇精记速记	谢振元	32K	39.00	2009.2
2010 年考研英语词汇必备	王长喜	16K	38.00	2009.2
2010 年考研英语短文写作及英汉翻译	刘鸿飞	16K	36.00	2009.3
2010 年考研英语阅读完形翻译全突破	袁秉政等	16K	39.00	2009.3
2010 年考研英语必备	王长喜	16K	45.00	2009.3
2010 年考研英语模拟考场	张锦芯	16K	36.00	2009.7

二、2010 人大版考研政治类图书

书 名	作者	开本	定/估价	出版时间
2010 年考研政治理论复习导本	李淮春	16K	46.00	2009.3
2010 年考研政治理论课常考知识点	包仁等	16K	48.00	2009.3
最新考研政治真题命题研究与高分策略	余学本 郭务本 肖秀荣	16K	28.00	2009.3
2010 年考研政治大纲知识点精解	辛逸等	16K	39.00	2009.7
2010 年考研政治经典题库	辛逸等	16K	39.00	2009.7
2010 年硕士研究生入学考试政治理论课复习指导	余学本等	16K	36.00	2009.7
2010 年考研政治考试大纲核心考点背诵	阳光考研中心	16K	39.00	2009.7
2010 年考研政治考试大纲配套练习题库	阳光考研中心	16K	29.00	2009.7
2010 年考研政治“形势与政策”精讲与预测	辛 逸	32K	10.00	2009.10

三、2010 人大版考研数学类图书

书 名	作者	开本	定/估价	出版时间
2010 年考研数学经典讲义(理工类)	黄先开 曹显兵	16K	56.00	2009.2
2010 年考研数学经典讲义(经济类)	黄先开 曹显兵	16K	52.00	2009.2
考研历届数学真题题型解析(数学一)	黄先开 曹显兵	16K	46.00	2009.3
考研历届数学真题题型解析(数学二)	黄先开 曹显兵	16K	35.00	2009.3

书 名	作者	开本	定/估价	出版时间
考研历届数学真题题型解析(数学三)	黄先开 曹显兵	16K	42.00	2009.3
2010 年考研数学最新精选 600 题(理工类)	黄先开 曹显兵	16K	32.00	2009.3
2010 年考研数学最新精选 600 题(经济类)	黄先开 曹显兵	16K	25.00	2009.3
2010 年考研数学经典冲刺 5 套卷(数学一)	黄先开 曹显兵	16K	10.00	2009.11
2010 年考研数学经典冲刺 5 套卷(数学二)	黄先开 曹显兵	16K	10.00	2009.11
2010 年考研数学经典冲刺 5 套卷(数学三)	黄先开 曹显兵	16K	10.00	2009.11
2010 年考研数学新编考试参考书	李恒沛	16K	55.00	2009.4
2010 年考研数学新编考试参考书(经济类)	胡显佑等	16K	39.00	2009.4
2010 年考研数学模拟冲刺试卷(理工类)	李恒沛	16K	22.00	2009.10

四、2010 人大版其他考研图书

书 名	作者	开本	定/估价	出版时间
2010 年考研日语指南	易友人	16K	56.00	2009.4
2010 年考研俄语指南	钱晓蕙	16K	59.00	2009.4
2010 年考研西医综合科目辅导讲义	于吉人	16K	68.00	2009.4

五、2010 人大版法硕(1 月份考试)图书

	书 名	作者	开本	定/估价	出版时间
基础篇	全国法律硕士专业学位研究生入学联考考试指南(第十版)	全国法硕 指导委员会	16K	109.00	2009.7
	2010 年法律硕士联考大纲变化解读及历年试题汇编	编写组	16K	36.00	2009.7
	2010 年法律硕士联考考试大纲配套练习	曾宪义等	16K	69.00	2009.9
强化篇	全国法律硕士研究生入学联考标准化题库	白文桥等	16K	67.00	2009.3
	2010 年法律硕士联考考试大纲重要知识点深度解析及模拟试卷	法硕联考 命题研究组	16K	78.00	2009.9
	法律硕士联考六年真题归类详解及知识清单	北京万国学校	16K	29.00	2009.5
高分篇	法律硕士联考重要法条释解	曾宪义等	16K	32.00	2009.5
	2010 年法律硕士联考最新试题分析及考点解析	曾宪义等	16K	32.00	2009.5
	法律硕士联考专业基础课必备 经典案例分析	刘守芬等	16K	32.00	2009.3
冲刺篇	2010 年全国法律硕士专业学位研究生入学联考模拟试卷及解析	曾宪义等	16K	56.00	2009.10
	2010 年全国法律硕士专业学位研究生入学联考大串讲	曾宪义等	16K	52.00	2009.10
	法律硕士联考考前最后 5 套题	刘守芬等	16K	23.00	2009.11

中国 1 考网:www.1kao.com.cn
 咨询信箱:lity@crup.com.cn
 读者服务部:(010)62514148 62516566(人大院内)

咨询电话:(010)62511349
 (010)62515978
 邮购电话:(010)82501766

目 录

第一部分

第一章 函数、极限、连续 3

- 题型 1.1 函数的概念及其特性 3
- 题型 1.2 极限的概念与性质 5
- 题型 1.3 函数极限的计算 6
- 题型 1.4 函数极限的逆问题 11
- 题型 1.5 数列的极限 13
- 题型 1.6 无穷小量的比较 15
- 本章总结 17
- 自测练习题 18
- 自测练习题答案或提示 22

第二章 一元函数微分学 23

- 题型 2.1 导数的定义 23
- 题型 2.2 利用导数求曲线的切线、
法线方程 26
- 题型 2.3 一般导函数的计算 27
- 题型 2.4 可导、连续与极限的关系 29
- 题型 2.5 微分的概念与计算 30
- 题型 2.6 利用导数确定单调区间与
极值 31
- 题型 2.7 求函数曲线的凹凸区间与
拐点 35
- 题型 2.8 求函数曲线的渐近线 36
- 题型 2.9 确定函数方程
 $f(x) = 0$ 的根 37
- 题型 2.10 确定导函数方程
 $f'(x) = 0$ 的根 39
- 题型 2.11 微分中值定理的综合应用 41
- 题型 2.12 利用导数证明不等式 43
- 本章总结 47
- 自测练习题 48
- 自测练习题答案或提示 52

第三章 一元函数积分学 54

- 题型 3.1 原函数与不定积分的概念 54

高等数学

- 题型 3.2 定积分的基本概念与性质 55
- 题型 3.3 不定积分的计算 56
- 题型 3.4 定积分的计算 58
- 题型 3.5 变限积分 60
- 题型 3.6 定积分的证明题 65
- 题型 3.7 广义积分 69
- 题型 3.8 应用题 70
- 本章总结 76
- 自测练习题 77
- 自测练习题答案或提示 81

第四章 向量代数与空间解析几何 83

- 题型 4.1 向量运算 83
- 题型 4.2 建立直线或平面的方程 84
- 题型 4.3 求点到直线和点到平面的
距离 86
- 题型 4.4 确定直线、平面之间的
几何关系 86
- 题型 4.5 建立旋转曲面的方程 87
- 题型 4.6 杂 题 89
- 本章总结 91

第五章 多元函数微分学 92

- 题型 5.1 基本概念题 92
- 题型 5.2 求多元复合函数的偏导数和
全微分 94
- 题型 5.3 求隐函数的偏导数和
全微分 98
- 题型 5.4 利用变量代换将方程变形 101
- 题型 5.5 利用偏导或全微分
确定常数 103
- 题型 5.6 求函数的方向导数和梯度 104
- 题型 5.7 多元函数微分学的
几何应用 106
- 题型 5.8 求多元函数的极值与最值 109
- 本章总结 113

自测练习题	114
自测练习题答案或提示	116

第六章 重积分

题型 6.1 交换积分顺序	119
题型 6.2 利用区域的对称性和函数的奇偶性求积分	121
题型 6.3 分块积分	125
题型 6.4 选择适当坐标系计算重积分	126
题型 6.5 重积分的应用	130
本章总结	133
自测练习题	133
自测练习题答案或提示	135

第七章 曲线、曲面积分

题型 7.1 计算第一类曲线积分	137
题型 7.2 计算第二类平面曲线积分	139
题型 7.3 有关曲线积分与路径无关的问题	144
题型 7.4 计算第二类空间曲线积分	151
题型 7.5 计算第一类曲面积分	153
题型 7.6 计算第二类曲面积分	156
题型 7.7 曲线、曲面积分的应用	166
题型 7.8 计算向量场的散度及旋度	169
本章总结	170

第二部分

第一章 行列式

题型 1.1 利用行列式的性质和按行(列)展开定理计算行列式	227
题型 1.2 利用行列式和矩阵的运算性质计算行列式	228
题型 1.3 利用秩、特征值和相似矩阵等计算行列式	231
本章总结	233
自测练习题	233
自测练习题答案或提示	235

第二章 矩阵

题型 2.1 有关逆矩阵的计算与证明	236
--------------------------	-----

第八章 无穷级数

题型 8.1 判定数项级数的敛散性	171
题型 8.2 证明数项级数的敛散性	177
题型 8.3 求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域	180
题型 8.4 求幂级数的和函数	183
题型 8.5 求数项级数的和	187
题型 8.6 求函数的幂级数展开式	189
题型 8.7 傅里叶级数	193
本章总结	197
自测练习题	197
自测练习题答案或提示	200

第九章 常微分方程

题型 9.1 一阶微分方程	201
题型 9.2 可降阶方程	205
题型 9.3 高阶常系数线性微分方程	206
题型 9.4 求解含变限积分的函数方程	210
题型 9.5 微分方程的应用	212
题型 9.6 欧拉方程	217
本章总结	218
自测练习题	219
自测练习题答案或提示	222

线性代数

题型 2.2 矩阵的乘法运算	239
题型 2.3 解矩阵方程	240
题型 2.4 与初等变换有关的命题	242
题型 2.5 与伴随矩阵 A^* 有关的命题	244
题型 2.6 矩阵秩的计算与证明	245
本章总结	248
自测练习题	248
自测练习题答案或提示	252

第三章 向量

题型 3.1 向量的线性组合与线性表示	254
题型 3.2 向量组的线性相关性	256



题型 3.3	求向量组的秩与矩阵的秩	261	题型 5.2	求抽象矩阵的特征值	296
题型 3.4	有关向量空间的命题	262	题型 5.3	特征值、特征向量的 逆问题	298
本章总结		264	题型 5.4	相似矩阵的判定及其 逆问题	300
自测练习题		265	题型 5.5	可对角化的判定及其 逆问题	303
自测练习题答案或提示		268	题型 5.6	实对称矩阵的性质	304
第四章 线性方程组		269	题型 5.7	特征值、特征向量的应用	307
题型 4.1	解的判定、性质和结构	269	本章总结		310
题型 4.2	求齐次线性方程组的 基础解系、通解	271	自测练习题		310
题型 4.3	求非齐次线性方程组的 通解	273	自测练习题答案或提示		313
题型 4.4	抽象方程组的求解问题	280	第六章 二次型		316
题型 4.5	有关基础解系的命题	281	题型 6.1	二次型的矩阵、秩和正负 惯性指数	316
题型 4.6	讨论两个方程组解之间的 关系(公共解、同解)	282	题型 6.2	化二次型为标准形	317
题型 4.7	与 $AB = 0$ 有关的命题	284	题型 6.3	化二次型为标准形的 逆问题	319
题型 4.8	线性方程组的综合应用	285	题型 6.4	合同变换与合同矩阵	322
本章总结		287	题型 6.5	正定二次型与正定矩阵	323
自测练习题		288	本章总结		324
自测练习题答案或提示		292	自测练习题		324
第五章 特征值与特征向量		294	自测练习题答案或提示		325
题型 5.1	求数字矩阵的特征值和 特征向量	294			

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率		329	题型 2.3	利用常见分布计算概率	345
题型 1.1	事件关系与概率的性质	329	题型 2.4	常见分布的逆问题	347
题型 1.2	古典概型与几何概型	330	题型 2.5	随机变量函数的分布	348
题型 1.3	乘法公式、条件概率公式	333	本章总结		351
题型 1.4	全概率公式、贝叶斯公式	334	自测练习题		352
题型 1.5	事件的独立性	335	自测练习题答案或提示		354
题型 1.6	贝努利概型	337	第三章 多维随机变量及其分布		356
本章总结		338	题型 3.1	二维离散型随机变量的联合 分布、边缘分布、条件分布	356
自测练习题		339	题型 3.2	二维连续随机变量的联合分 布、边缘分布、条件分布	359
自测练习题答案或提示		341	题型 3.3	二维随机变量函数的分布	361
第二章 随机变量及其分布		342	题型 3.4	二维随机变量取值的 概率计算	369
题型 2.1	分布函数的概念及其性质	342	题型 3.5	随机变量的独立性	370
题型 2.2	求随机变量的分布律, 分布函数	343			

本章总结	372
自测练习题	372
自测练习题答案或提示	374
第四章 随机变量的数字特征	376
题型 4.1 数学期望与方差的计算	376
题型 4.2 一维随机变量函数的期望与 方差	379
题型 4.3 二维随机变量函数的期望与 方差	380
题型 4.4 协方差与相关系数的计算	382
题型 4.5 随机变量的独立性与 不相关性	384
本章总结	387
自测练习题	387
自测练习题答案或提示	391
第五章 大数定律和中心极限定理	394
题型 5.1 切比雪夫不等式	394
本章总结	395
自测练习题	395
自测练习题答案或提示	396
附录一 1987 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	418
附录二 1988 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	419
附录三 1989 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	421
附录四 1990 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	423
附录五 1991 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	425
附录六 1992 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	426
附录七 1993 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	428
附录八 1994 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	430
附录九 1995 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	431
附录十 1996 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	433
附录十一 1997 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	435
附录十二 1998 年全国硕士研究生入学	

第六章 数理统计的基本概念	397
题型 6.1 求统计量的数字特征	397
题型 6.2 求统计量的分布或取值的 概率	401
本章总结	403
自测练习题	403
自测练习题答案或提示	404
第七章 参数估计	405
题型 7.1 求参数的矩估计和最大 似然估计	405
题型 7.2 估计量的评价标准	410
题型 7.3 区间估计	412
本章总结	413
自测练习题	414
自测练习题答案或提示	414
第八章 假设检验	416
题型 8.1 单正态总体均值 μ 的 假设检验	416
本章总结	417

附录

附录十三 1999 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	437
附录十四 2000 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	439
附录十五 2001 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	441
附录十六 2002 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	443
附录十七 2003 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	445
附录十八 2004 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	447
附录十九 2005 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	449
附录二十 2006 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	451
附录二十一 2007 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	454
附录二十二 2008 年全国硕士研究生入学统一 考试数学一试题	456
附录二十三 2009 年全国硕士研究生入学统一 考试数学一试题	458

PART ONE

第一部分

高等数学

第一章 函数、极限、连续

考试内容与要求

考 试 内 容

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立,数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限和右极限,无穷小量和无穷大量的概念及其关系,无穷小量的性质及无穷小量的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

考 试 要 求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

题型 1.1 函数的概念及其特性

1. (88, 5 分)* 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【分析】 先由 $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 确定 $\varphi(x)$ 的表达式, 再求 $\varphi(x)$ 的定义域.

【详解】 由 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 有 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1 - x$, 解得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$.

其定义域为 $\ln(1-x) \geq 0$, 得 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$.

【评注】 假设有关系式 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知, 有两种情况:

(1) 已知 f , 求 g : 相当于求反函数 $g(x) = f^{-1}[\varphi(x)]$.

(2) 已知 g , 求 f : 一般作变量代换 $g(x) = u \Rightarrow x = g^{-1}(u)$, 于是有 $f(u) = \varphi[g^{-1}(u)]$, 再根据函数关系与变量字母无关, 得知 $f(x) = \varphi[g^{-1}(x)]$.

* (88, 5 分) 表示该题为 1988 年考研数学一真题, 其分值为 5 分, 下同.

2. (90, 3分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] =$ _____.

【答案】 应填 1.

【分析】 直接按复合函数的定义计算即可, 注意 $|f(x)| \leq 1$.

【详解】 由 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 知 $|f(x)| \leq 1$. 因此有 $f[f(x)] = 1$.

【评注】 已知 $f(x), g(x)$, 求复合函数 $f[g(x)]$ (或 $g[f(x)]$), 一般用代入法逐次复合即可, 应特别注意的是 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的对应关系.

3. (05, 4分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. 【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题可直接推证, 但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解 1】 任一原函数可表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 且 $F'(x) = f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时, 有 $F(-x) = F(x)$, 于是 $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$, 即 $-f(-x) = f(x)$, 也即 $f(-x) = -f(x)$, 可见 $f(x)$ 为奇函数;

反过来, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数, 从而 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ 为偶函数, 可见(A)为正确选项.

【详解 2】 令 $f(x) = 1$, 则取 $F(x) = x + 1$, 可排除(B), (C);

令 $f(x) = x$, 则取 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 可排除(D).

故应选(A).

【评注】 请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系?

4. (99, 3分) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数. 【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题涉及原函数的基本特性, 由于原函数有无穷多个, 如何表示它是问题的关键. 实际上, 只要找出一个原函数, 则所有的原函数就可表示出来, 而 $\int_0^x f(t)dt$ 正好就是所需要的一个原函数.

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C \xrightarrow{u=-t} \int_0^x f(-u)d(-u) + C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(-u) = -f(u)$, 从而有

$$F(-x) = \int_0^x f(u)du + C = \int_0^x f(t)dt + C = F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数,